

# Estabilidad de amplificadores operacionales

Eugenio J. Tacconi \*, Mario Benedetti \*\*, Oscar Calvo \*\*\*

**Resumen**

Se describe un método simplificado para calcular en forma aproximada la respuesta frecuencial y temporal de sistemas realimentados lineales.

Si bien el método es de carácter general, se halla especialmente dirigido hacia su aplicación en el análisis de la estabilidad de amplificadores operacionales realimentados negativamente.

**Introducción**

El estudio de la estabilidad de los amplificadores operacionales se basa en la teoría general de los sistemas realimentados. Sus principios básicos indican que la amplificación  $G$  de un sistema realimentado negativamente como el indicado en la Fig. 1 está dada por:

$$G = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\alpha A}{1 + \beta A} \quad (1)$$

Donde  $\beta A$  es denominado factor de realimentación o ganancia de lazo.

Para elevados valores del factor de realimentación ( $\beta A \gg 1$ ) la ganancia del sistema es aproximadamente:

$$G \approx \frac{\alpha}{\beta} \quad (2)$$

Los bloques  $\alpha$  y  $\beta$  se proyectan de modo de obtener la función de transferencia  $G$  deseada y son generalmente dependientes de elementos pasivos.

Si el factor de realimentación es mucho mayor que la unidad para la banda de frecuencias de interés, la función de transferencia  $G$  resulta prácticamente independiente del amplificador operacional empleado e insensible a variaciones térmicas, polarización de los elementos activos o envejecimiento del dispositivo amplificador.

La realimentación negativa permite además reducir los efectos de distorsión y ruido generados por el amplificador, controlar la respuesta espectral del sistema y modificar las impedancias de entrada y salida del mismo. (Véase por ejemplo [1]).

**Análisis de la estabilidad del sistema**

La función de transferencia  $G$  crece sin límite, ocasionando inestabilidades del sistema en los puntos en que se anula su denominador. Por tal motivo los métodos de análisis de estabilidad se basan en la determinación de la ubicación en el plano complejo de las raíces de la ecuación característica (3) del sistema.

$$1 + \beta A(S) = 0 \quad (3)$$

Un estudio completo de la estabilidad de los sistemas realimentados no es el objetivo del presente trabajo, en el cual se presentan solamente los conceptos fundamentales necesarios para analizar el comportamiento de los amplificadores operacionales realimentados negativamente.

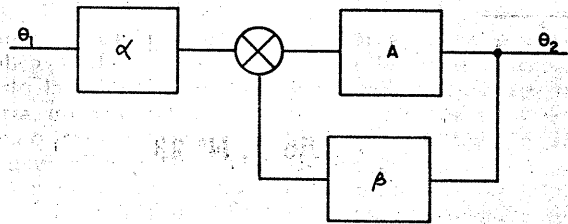
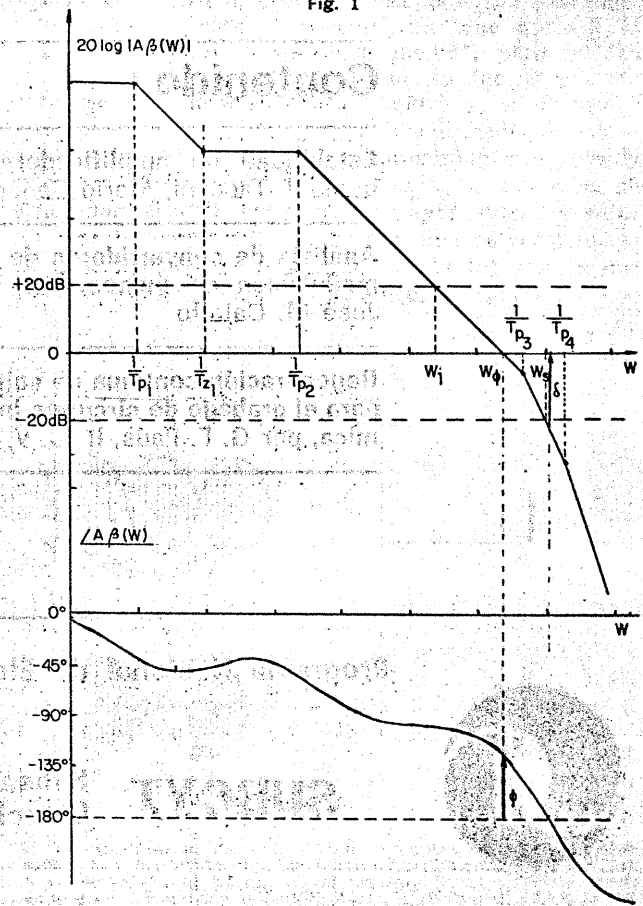


Fig. 1



Figs. 2 y 3

\* Investigador Asistente (CONICET).  
 \*\* Profesor Adjunto (UNLP).  
 \*\*\* Becario (CIC BA) Integrante del Laboratorio de Electrónica, Departamento de Física (UNLP).

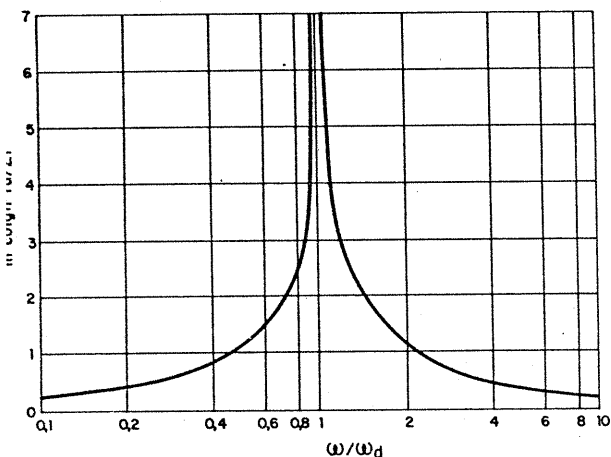


Fig. 4

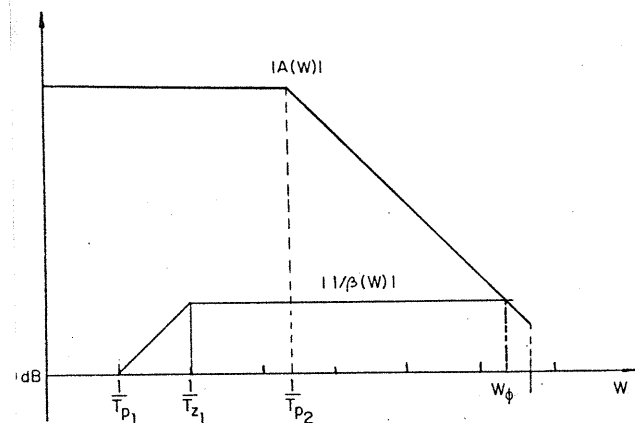


Fig. 5

De los diversos métodos clásicos existentes de análisis de estabilidad relativa de un sistema, se estudiará en este caso exclusivamente la aplicación del método rítmico de Bode, refiriendo al lector para su demostración a las referencias bibliográficas. (Véase por ejemplo [2]).

El método consiste en determinar el comportamiento del factor de realimentación  $\beta A$  en las vecindades del punto  $(-1 + j0)$ , a partir del diagrama en función de la frecuencia de su módulo y fase respectivas.

La característica de estabilidad puede especificarse en función de las siguientes cantidades:

**Punto de cruce del factor de realimentación ( $\omega_*$ ):** Es el punto en que el módulo del factor de realimentación vale la unidad.

**Margen de fase ( $\Phi$ ):** Es el suplemento cambiado de signo del ángulo de fase del factor de realimentación en su punto de cruce.

**Punto de cruce de la fase ( $\omega_*$ ):** Es el punto en que la curva representativa de la fase toma el valor de  $-180^\circ$ .

**Margen de ganancia ( $\delta$ ):** Es el valor expresado en decibelios en que debe incrementarse el factor de realimentación para anular el margen de fase.

Se puede demostrar, aplicando el criterio de Nyquist, que un sistema es estable en lazo cerrado si sus márgenes de ganancia y fase son positivos.

Suponiendo por ejemplo que las funciones de transferencia de los bloques de amplificación  $A(S)$ , de realimentación  $\beta(S)$  y el factor de realimentación  $\beta A(S)$ , sean los indicados en las expresiones (4), (5) y (6), respectivamente.

$$A(S) = \frac{K}{(1 + STp_2)(1 + STp_3)(1 + STp_4)} \quad (4)$$

$$\beta(S) = \frac{(1 + STz_1)}{(1 + STp_1)} \quad (5)$$

$$\beta A(S) = \frac{K(1 + STz_1)}{(1 + STp_1)(1 + STp_2)(1 + STp_3)(1 + STp_4)} \quad (6)$$

En las Figs. 2 y 3 se han representado los diagramas logarítmicos del módulo y la fase del factor de realimentación dado por la expresión (6) en función de la frecuencia, indicando al mismo tiempo los márgenes de ganancia y fase.

En los sistemas de mínima fase a parámetros concentrados, las respuestas en fase y amplitud están vinculadas a través de uno de los más importantes teoremas de Bode [3][4] que establece que:

$$\Phi(\omega_a) = \frac{\pi}{2} \left| \frac{dA}{du} \right|_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left| \frac{dA}{du} \right| + \left| \frac{dA}{du} \right|_0 \right\} \ln \operatorname{ctgh} \left| \frac{u}{2} \right| du \quad (7)$$

Donde:  $\Phi(\omega_a)$  = rotación de fase del circuito en radianes a la frecuencia  $\omega_a$ .

$A$  = amplificación del circuito en népers.

$\omega_a$  = frecuencia de referencia.

$u = \ln(\omega/\omega_a)$ .

La expresión anterior indica que la fase de un sistema a una dada frecuencia  $\omega_a$  puede determinarse a partir del conocimiento de la pendiente de su respuesta de amplitud para todas las frecuencias (0 a  $\infty$ ).

Sin embargo, en la resolución de la integral (7) los términos correspondientes a la banda de frecuencias próxima a  $\omega_a$  son los de mayor peso (Fig. 4) pudiendo obtenerse una visión aproximada de la fase de un sistema a una dada frecuencia, a partir del conocimiento de la derivada de la amplitud en función de la frecuencia en las vecindades del punto considerado.

Por lo tanto es posible, en estos casos, descubrir el grado de estabilidad del sistema a partir de conocer solamente la pendiente de  $\beta A(\omega)$  en la banda de frecuencias próximas a  $\omega_*$ , definida por la función de peso graficada en la Fig. 4.

Para asegurar la estabilidad del circuito es necesario que el módulo de la pendiente de  $\beta A(\omega)$  en dicha banda de frecuencias sea inferior a 40 dB/dec.

En algunos casos, para simplificar el análisis gráfico resulta conveniente representar en función de la frecuencia el módulo de  $A(\omega)$  y de  $1/\beta(\omega)$ , en lugar de  $|\beta A(\omega)|$ , determinando la frecuencia de corte del factor de realimentación  $\omega_*$  por la intersección de ambas curvas ( $|\beta A(\omega_*)| = 1$ ).

La condición de estabilidad analizada previamente, conduce a que el módulo de la diferencia de pendientes entre  $A(\omega)$  y  $1/\beta(\omega)$  en la banda de frecuencias próximas a  $\omega_*$  debe ser inferior a 40 dB/dec.

En la Fig. 5 se han representado  $A(\omega)$  y  $1/\beta(\omega)$  para el ejemplo de las expresiones (4) y (5) indicando la frecuencia de corte  $\omega_*$ . Como puede observarse, la diferencia de pendientes entre  $A(\omega)$  y  $1/\beta(\omega)$

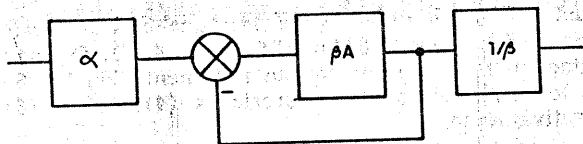


Fig. 6

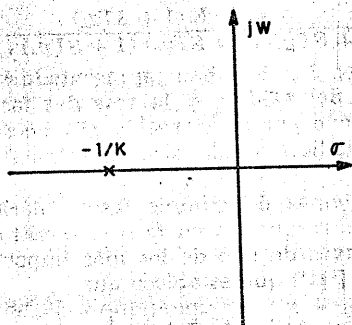


Fig. 7

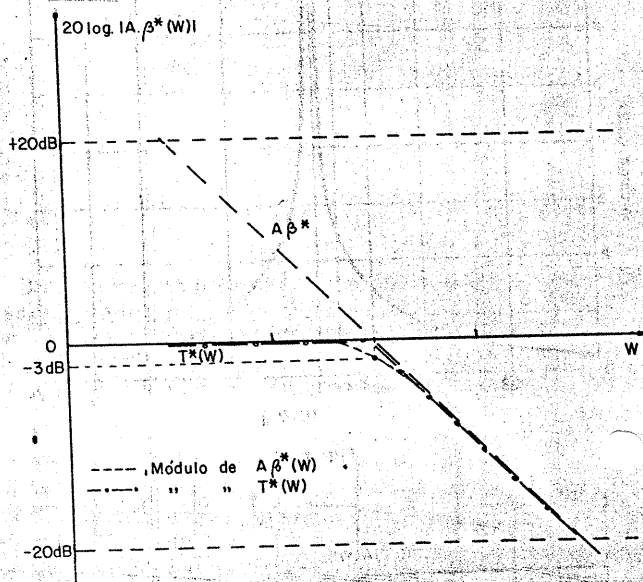


Fig. 8

a la frecuencia de corte  $\omega_*$  es del orden de 20 dB/dec. lo que garantiza la estabilidad del sistema.

En los casos donde no se cumple la condición de estabilidad debe modificarse  $A(\omega)$  o  $\beta(\omega)$  hasta lograr el grado de estabilidad deseado.

**Determinación de la respuesta temporal y frecuencial del sistema a lazo cerrado**

Una vez obtenido el grado de estabilidad deseado, es necesario verificar si las respuestas frecuencial y temporal del sistema realimentado cumplen con las especificaciones del proyecto.

Para determinar la respuesta temporal a una dada excitación es necesario conocer la ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado en plano complejo.

Para poder determinar en forma aproximada el módulo y la fase de la función de transferencia a lazo cerrado ( $G$ ) y la ubicación de los polos y ceros del sistema en el plano complejo, pueden realizarse ciertas simplificaciones dependientes del valor absoluto del factor de realimentación.

Dividiendo, para realizar el análisis, la banda de frecuencias en tres zonas dependientes del valor de  $|\beta A|$ . Zona de alta ganancia ( $|\beta A| > 20$  dB), de baja ganancia ( $|\beta A| < -20$  dB) y de ganancias intermedias ( $20$  dB  $< |\beta A| < -20$  dB).

La banda de frecuencias correspondientes a cada zona quedan delimitadas por la intersección del diagrama del módulo del factor de realimentación, en función de la frecuencia con las rectas de ganancia constante de  $\pm 20$  dB (Fig. 2).

**Zona de alta ganancia ( $|\beta A| > 20$  dB)**

En esta región,  $\omega < \omega_*$  (Fig. 2), puede desprejiciarse en la expresión (1) con muy buena aproximación la unidad frente al factor de realimentación de modo que:

$$G \approx \frac{\alpha}{\beta} \quad (8)$$

Por lo tanto la respuesta en frecuencia y la ubicación

de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado  $G$  coincide con las correspondientes de  $\alpha/\beta$ .

Los polos y ceros de  $A(\omega)$  existentes en esta banda de frecuencias se consideran perfectamente cancelados en lazo cerrado por ceros y polos respectivamente superpuestos.

**Zona de baja ganancia ( $|\beta A| < -20$  dB)**

En esta banda de frecuencias,  $\omega > \omega_*$  en la Fig. 2, puede desprejiciarse en la expresión (1) el factor  $\beta A$  frente a la unidad resultando:

$$G \approx \alpha A \quad (9)$$

De modo que la ubicación de los polos y ceros de la función de transferencia  $G$  y su respuesta en frecuencia coincide con las de  $\alpha A$ .

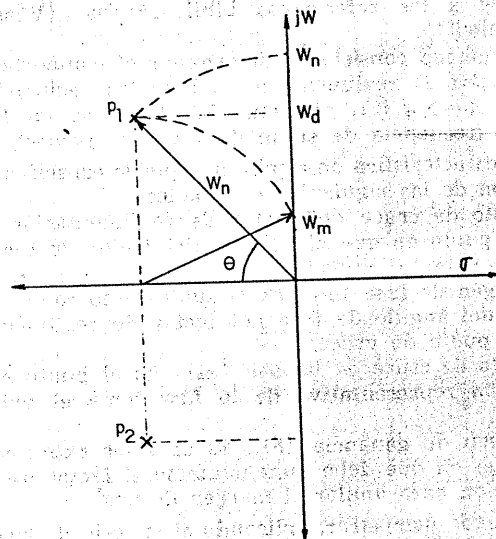


Fig. 9

Zona de ganancias intermedias ( $20 \text{ dB} < |\beta A| < -20 \text{ dB}$ )

Región limitada, en la Fig. 2, a la banda de frecuencias comprendidas entre  $\omega_s$  y  $\omega_1$ .

La función de transferencia  $T$  de un sistema realimentado unitariamente de factor de realimentación  $\beta A$  está dada por:

$$T = \frac{\beta A}{1 + \beta A} \quad (10)$$

A partir de las Ecs. (1) y (10) se obtiene:

$$G = \left[ \frac{\beta A}{1 + \beta A} \right] \frac{\alpha}{\beta} = T \frac{\alpha}{\beta} \quad (11)$$

Expresión que corresponde al diagrama en bloques de la Fig. 6.

En el factor de realimentación  $\beta A(S)$  expresado en forma general por la Ec. (12), los factores de la forma  $(1 + ST_i)$  pueden reemplazarse por la unidad o por  $S$ , según que la singularidad se encuentre respectivamente por encima o por debajo de la banda de frecuencias correspondiente a la zona de ganancias intermedias.

$$\beta A(S) = \frac{KS^{2n} \prod_{i=1}^v (1 + STz_i)}{\prod_{i=1}^r (1 + STp_i)} \quad (12)$$

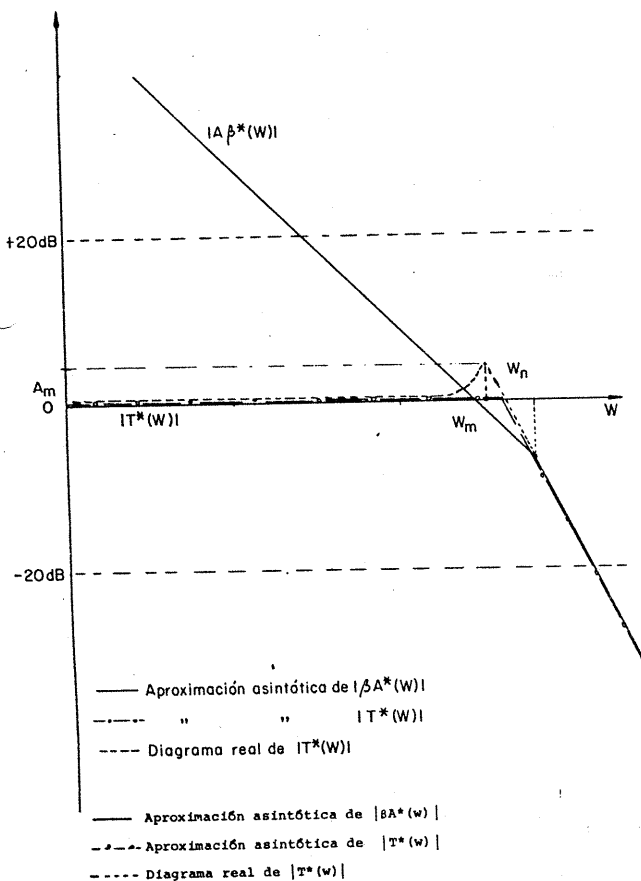


Fig. 10

De este modo se obtiene la expresión aproximada:

$$\beta A^*(S) = \frac{K'S^{2n} \prod_{i=1}^{v'} (1 + STz_i)}{\prod_{i=1}^{r'} (1 + STp_i)} \quad (13)$$

con:  $v' \leq v$ ;  $r' \leq r$ .

Para el caso particular de la expresión (6) (Fig. 2) resulta:

$$\beta A^*(S) = \frac{K'}{S(1 + STp_s)} \quad (14)$$

Como puede observarse la expresión de  $\beta A^*(S)$  se ha simplificado considerablemente.

Reemplazando  $\beta A^*(S)$  en las expresiones (10) y (11) se calcula la respuesta total aproximada del sistema  $G^*(S)$  correspondiente a la banda de ganancias intermedias.

El comportamiento del sistema realimentado unitariamente depende de la expresión del factor de realimentación  $\beta A^*(S)$  y pueden presentarse los siguientes casos:

$$1^\circ) \quad \beta A^*(S) = K/S \quad (15)$$

La función de transferencia aproximada del sistema realimentado unitariamente resulta:

$$T^*(S) = \frac{1}{1 + S/K} \quad (16)$$

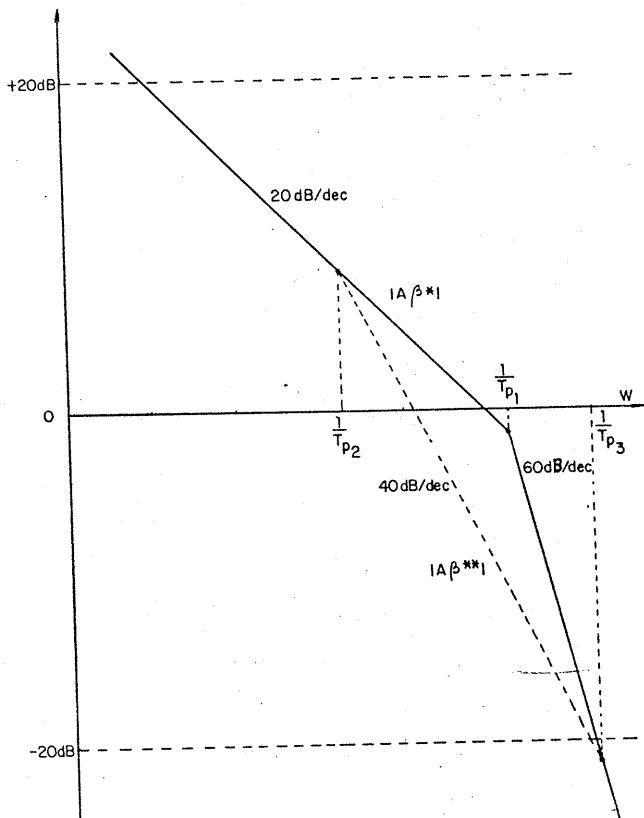


Fig. 11

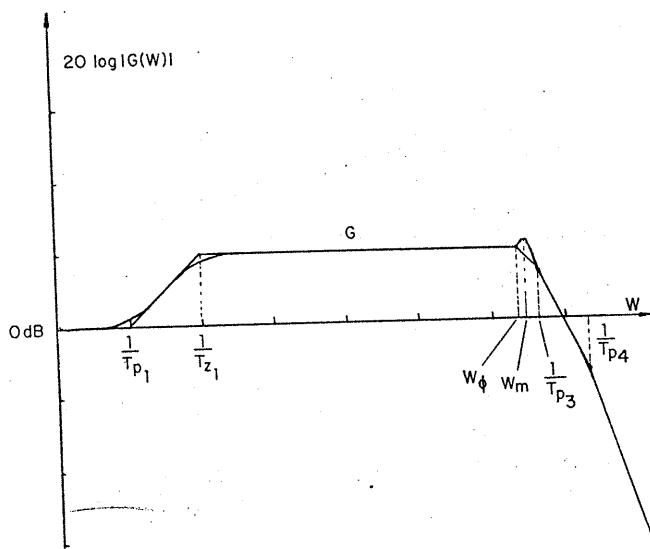


Fig. 12

$T^*(S)$  posee un único polo en el plano complejo sobre el semieje real negativo a la pulsación  $\omega = 1/K$  (Fig. 7).

En la Fig. 8 se han representado los diagramas del módulo de  $\beta A^*(S)$  y  $T^*(S)$  en función de la frecuencia.

$$2^\circ) \quad \beta A^*(S) = \frac{K}{S(1+STp_1)} \quad (17)$$

La función de transferencia del sistema realimentado unitariamente resulta:

$$T^*(s) = \frac{1}{S^2 T p_1 / K + S / K + 1} \quad (18)$$

Como las raíces del denominador de la expresión (18) resultan ser siempre complejas conjugadas,  $T^*(S)$  representa un sistema clásico de segundo orden con frecuencia natural de oscilación ( $\omega_n$ ) y coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ) dadas por:

$$\omega_n = \sqrt{K/Tp_1} \quad \xi = \sqrt{\frac{1}{4KTp_1}} \quad (19)$$

En la Fig. 9 se ha representado la ubicación de las raíces (polos) de  $T^*(S)$  en el plano complejo, verificándose las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \omega_m &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Donde:  $\omega_d$  es la frecuencia de oscilación amortiguada del sistema y  $\omega_m$  es la frecuencia correspondiente al máximo del diagrama de  $|T^*(\omega)|$  (Fig. 10).

En la Fig. 10 se han representado los diagramas del módulo del factor de realimentación  $|\beta A^*(\omega)|$  y de la función de transferencia  $T^*(\omega)$ .

Puede observarse que la frecuencia de oscilación natural del sistema ( $\omega_n$ ) coincide con la intersección de la asíntota de  $\beta A^*(\omega)$  de pendiente  $-40$  dB/dec. con el eje de 0 dB.

La aproximación asintótica de  $T^*(\omega)$  coincide con el eje de 0 dB, para frecuencias inferiores a  $\omega_n$  y con la asíntota de  $\beta A^*(\omega)$  de  $-40$  dB/dec. de pendiente para frecuencias superiores a  $\omega_n$ .

La frecuencia  $\omega_m$  correspondiente al máximo del dia-

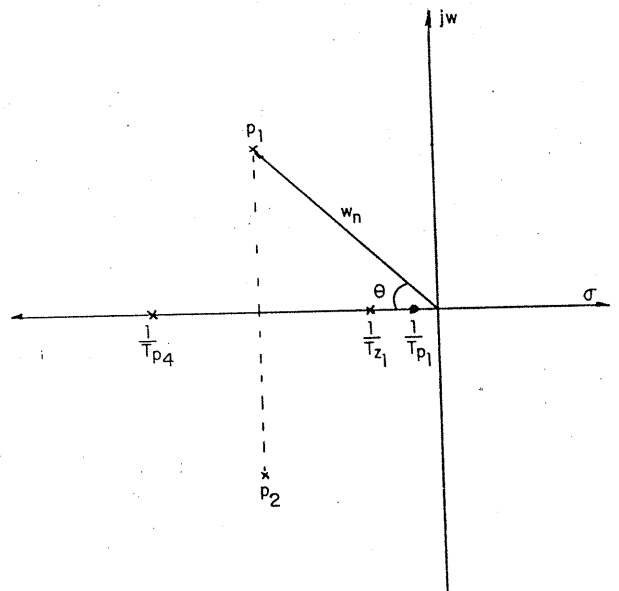


Fig. 13

grama de  $|T^*(\omega)|$  es siempre inferior a  $\omega_m$  y puede ser calculada mediante la expresión (20), mientras que el valor de  $A_m$  está dado por:

$$A_m = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (21)$$

$$3^\circ) \quad \beta A^*(S) = \frac{K}{S(1+STp_1)^2} \quad (22)$$

El diagrama en función de la frecuencia de  $T^*(\omega)$  y sus polos en el plano complejo pueden ser aproximados, reemplazando el polo doble de  $\beta A^*$  ubicado a la frecuencia  $\omega = 1/Tp_1$  por dos polos reales y distintos, uno de los cuales se halle fuera de la banda de ganancias intermedias, como se observa en la Fig. 11.

Se calcula la respuesta aproximada  $T^*(S)$  siguiendo los pasos del segundo caso, mediante la utilización de  $\beta A^{**}$  dada por la expresión (23). Para calcular la respuesta total aproximada  $G$  debe tenerse en cuenta el polo ubicado en la zona de baja ganancia a la frecuencia  $\omega = 1/Tp_3$ .

$$\beta A^{**} = \frac{K}{S(1+STp_1)} \quad (23)$$

4º) Casos más complicados:

Chestnut y Mayer [6] han graficado los parámetros característicos de lazo cerrado de  $T^*$  en función de la cantidad y separación de los polos y ceros de  $\beta A^*$  para diferentes configuraciones.

#### Respuesta temporal y frecuencial total

La respuesta completa del sistema con realimentación no unitaria  $G$  se obtiene combinando los resultados obtenidos para las zonas de ganancias altas, intermedias y bajas.

$$G(\omega) \approx \alpha/\beta \quad \text{para } \omega < \omega_1 \quad (8)$$

$$G(\omega) \approx \frac{\beta A^*}{1 + \beta A^*} \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{para } \omega_1 < \omega < \omega_n \quad (11)$$

$$G(\omega) \approx \alpha A \quad \text{para } \omega > \omega_n \quad (9)$$

Para el ejemplo dado por las expresiones (4), (5)

y (6) Figs. 2 y 3, la respuesta completa de  $|G(\omega)|$  en función de la frecuencia se ha representado en la Fig. 12.

La ubicación cero polar de  $G(S)$  está dado por la superposición de los polos y ceros ubicados en las tres bandas de ganancia (Fig. 13).

Conocido el diagrama cero-polar, la respuesta temporal del sistema a una dada excitación se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace. ■

#### Referencias

1. Paul E. Gray y Campbell L. Searle: "Principios de Electrónica", Ed. Reverté, 1973.
2. John J. D'Azzo y Constantín Houpis: "Linear Control Systems Analysis and Design", Ed. Mc Graw Hill, 1975.
3. H. W. Bode: "Amplifiers", 1938.
4. H. W. Bode: "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Company, New York, 1945.
5. Harold Chestnut y Robert Mayer: "Servomechanisms and Regulating System Design", Vol. 1, Ed. John Wiley, 1959.