

Capítulo 1

Análisis de estabilidad en circuitos con amplificadores operacionales

El objetivo de todo sistema de control consiste en obtener de una determinada planta, $G_p(s)$, un cierto comportamiento de acuerdo con un conjunto de requerimientos. Estos pueden ser, por ejemplo:

- Seguimiento de una referencia sin error
- Respuesta de la planta acotada y estable
- Rechazo a las perturbaciones

Para lograr estas características es necesario realimentar dicha planta para forzarla a seguir la referencia y compensar las posibles inestabilidades, mediante un compensador. En la mayoría de los sistemas de control, la red de realimentación $H(s)$ es pasiva, determinando las características de lazo cerrado. Definido $H(s)$ a través de la transferencia de lazo cerrado (T_{LC}), lo que resta por definir es el compensador $G_c(s)$, el cual es el encargado de hacer estable al lazo y cumplir con las especificaciones descritas anteriormente. El mismo puede ser analógico o digital y ser lineal o no lineal. Cuando se desea diseñar un compensador analógico y lineal, la mejor opción es utilizar un amplificador operacional (A.O.). Por lo tanto es de fundamental importancia abocarse al estudio del A.O., ya que constituye una parte importante del sistema de control.

Se realizará un análisis general del A.O., considerándolo como un dispositivo real. El modelo a emplear para el A.O. incluye una impedancia de entrada finita Z_i , una impedancia de salida no nula Z_0 y un ancho de banda limitado, dado por la transferencia $A(\omega)$. La figura 1.1 muestra el circuito de partida para el análisis. En cada terminal del A.O. se conecta un cuadripolo, particularmente cuadripolos con parámetros admitancia (\mathbf{Y}). Se emplean parámetros admitancia porque es conveniente en el diseño del sistema definir tensiones como entrada y salida del sistema. Por otra parte, el nodo de realimentación (terminal inversor) es más sencillo de estudiar por parámetros \mathbf{Y} , ya que quedan

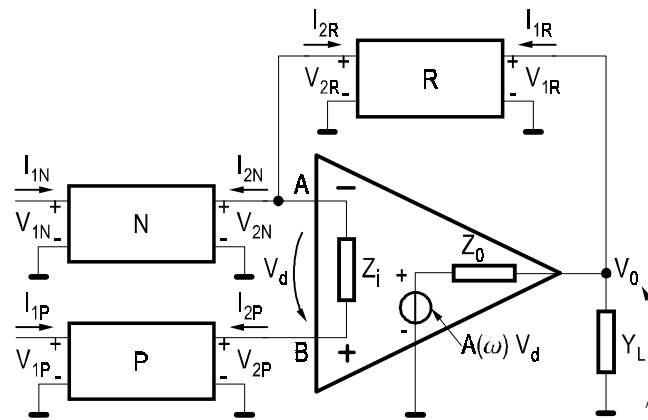


Figura 1.1: Modelo general en cuádrupolos del A.O. realimentado.

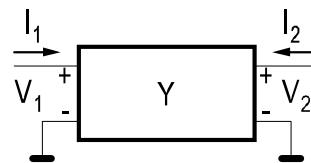
tres cuádrupolos en paralelo y el equivalente circuital resulta de sumar los parámetros individuales. Esto último es consecuencia de que la tensión del nodo es la misma para los cuádrupolos en paralelo.

Los parámetros \mathbf{Y} responden a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned}$$



1.1 Análisis del circuito

El objetivo ahora, consiste en construir un diagrama en bloques del sistema. Para ello se necesita determinar la ecuación que gobierna la tensión diferencial \$V_d\$. Obteniendo los equivalentes de Thevenin en los puntos A y B, tal como muestra la figura 1.2, se obtiene el circuito equivalente de la figura 1.3:

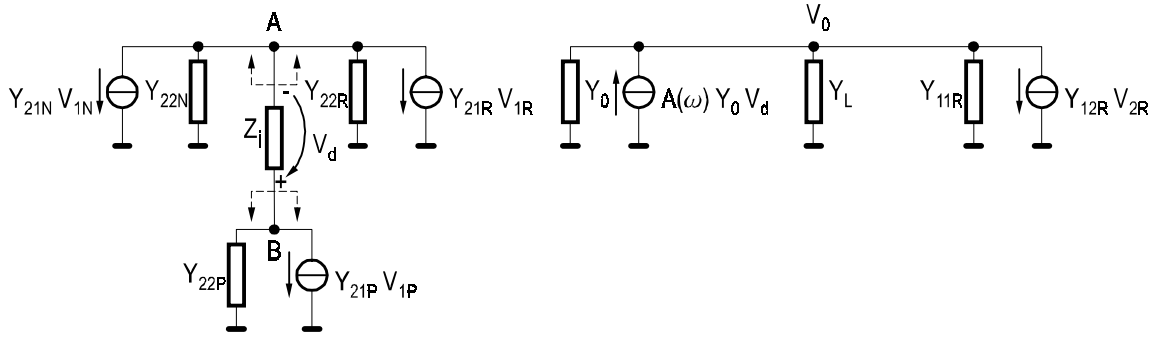


Figura 1.2: Circuito equivalente de entrada del A.O.

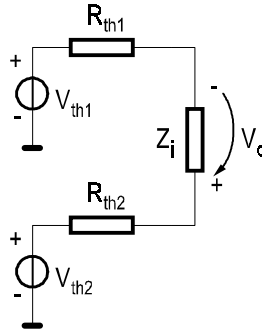


Figura 1.3: Circuito equivalente de Thevenin de la entrada.

donde

$$V_{th1} = - \left(\frac{Y_{21N}V_{1N} + Y_{21R}V_{1R}}{Y_{22N} + Y_{22R}} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Circuit diagram showing } V_{th1} \text{ source, } R_{th1} \text{ resistor, and admittances } Y_{22N}, Y_{22R} \text{ in parallel with a dependent current source } Y_{21N}V_{1N} + Y_{21R}V_{1R}. \end{array}$$

$$R_{th1} = \frac{1}{Y_{22N} + Y_{22R}}$$

$$V_{th2} = - \frac{Y_{21P}V_{1P}}{Y_{22P}} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Circuit diagram showing } V_{th2} \text{ source, } R_{th2} \text{ resistor, and admittance } Y_{22P} \text{ in parallel with a dependent current source } Y_{21P}V_{1P}. \end{array}$$

y además

$$\Rightarrow \begin{array}{l} V_{1R} = V_0 \\ V_{2N} = V_{2R} \end{array}$$

Por simple inspección de la figura 1.3 se obtiene:

$$V_d = V_{2P} - V_{2N} \tag{1.1}$$

$$V_d = (V_{th2} - V_{th1}) \frac{Z_i}{Z_i + \frac{1}{Y_{22N} + Y_{22R}} + \frac{1}{Y_{22P}}} = F_e (V_{th2} - V_{th1}) \tag{1.2}$$

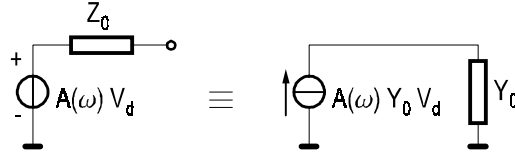
donde

$$F_e \triangleq \frac{Z_i}{Z_i + \frac{1}{Y_{22N} + Y_{22R}} + \frac{1}{Y_{22P}}}$$

F_e es una relación de impedancias que en lo sucesivo se llamará “factor de entrada”. Por diseño, se desea que este factor tienda a la unidad. Por lo tanto se debe cumplir que $Z_i \gg \frac{1}{Y_{22N} + Y_{22R}} + \frac{1}{Y_{22P}}$. Reemplazando V_{th2} y V_{th1} en la (1.2) se obtiene:

$$V_d = \left[-\frac{Y_{21P}V_{1P}}{Y_{22P}} + \left(\frac{Y_{21N}V_{1N} + Y_{21R}V_0}{Y_{22N} + Y_{22R}} \right) \right] \frac{Z_i}{Z_i + \frac{1}{Y_{22N} + Y_{22R}} + \frac{1}{Y_{22P}}} \quad (1.3)$$

Para continuar con la construcción del diagrama en bloques se necesita conocer la ecuación que rige la tensión de salida V_0 . Pevio al cálculo se transforma el generador de tensión del A.O. junto con su impedancia de salida en un equivalente Norton.



Circuito equivalente Norton de la salida del A.O.

Resolviendo el circuito de salida, a partir de la figura 1.2 y sabiendo que $V_{1R} = V_0$ se deduce que:

$$V_0 = \frac{A(\omega)Y_0V_d - Y_{12R}V_{2N}}{Y_L + Y_0 + Y_{11R}} = F_s [A(\omega)Y_0V_d - Y_{12R}V_{2N}] \quad (1.4)$$

Análogamente se define un “factor de salida” $F_s \triangleq 1/(Y_0 + Y_L + Y_{11R})$ que en este caso tiene unidades de impedancia.

Para finalizar, sólo resta calcular la tensión V_{2N} . Del circuito de la figura 1.2:

$$\begin{aligned} V_{2N} &= -V_d + V_{2P} \\ V_{2N} &= -V_d - \frac{V_d}{Z_i Y_{22P}} - V_{1P} \frac{Y_{21P}}{Y_{22P}} \\ V_{2N} &= -V_d \left(1 + \frac{1}{Z_i Y_{22P}} \right) - V_{1P} \frac{Y_{21P}}{Y_{22P}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Con las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) se puede construir el diagrama en bloques completo del sistema de la figura 1.1, como muestra la figura 1.4. Aplicando la regla de Mason [1]

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{V_{1N} (\sum \text{ todos los caminos desde } V_{1N} \text{ hasta } V_0) + V_{1P} (\sum \text{ todos los caminos desde } V_{1N} \text{ hasta } V_0)}{1 + \sum \text{ lazos cerrados tomados de a uno}} \\ V_0 &= \frac{V_{1N} (G_2 G_3 G_4 G_5 + G_2 G_3 G_7 G_8 G_5) + V_{1P} (-G_1 G_8 G_5 + G_1 G_3 G_7 G_8 G_5 + G_1 G_3 G_4 G_5)}{1 + G_3 G_4 G_5 G_6 + G_3 G_7 G_8 G_5 G_6} \end{aligned} \quad (1.6)$$

y observando la ecuación (1.6) se concluye en que la estabilidad del sistema estará dada por $1 + G_3 G_4 G_5 G_6 + G_3 G_7 G_8 G_5 G_6$.

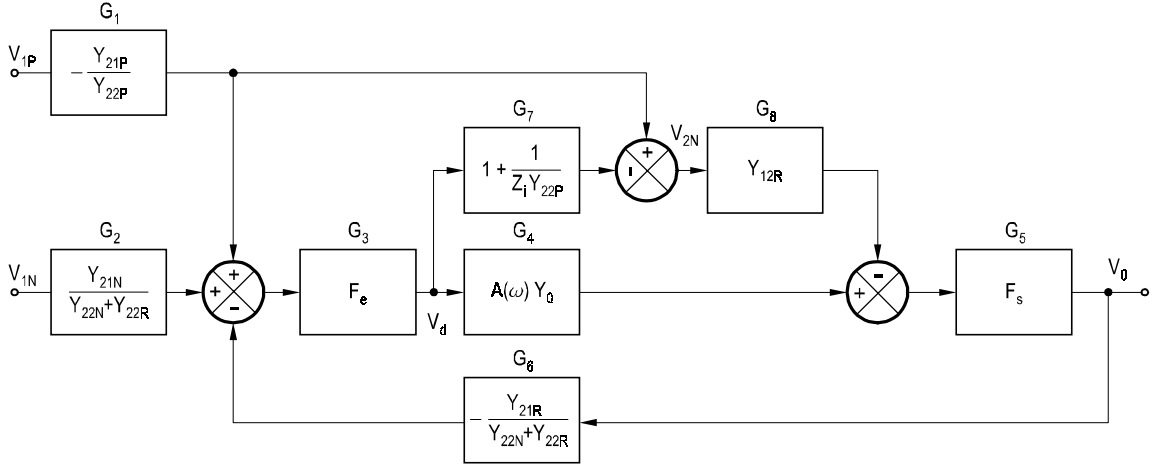


Figura 1.4: Diagrama en bloques completo.

1.2 Simplificaciones

En general, los bloques G_7 y G_8 complican el cálculo y bajo ciertas circunstancias pueden eliminarse del diagrama. Los bloques G_4 y G_7G_8 están “en paralelo”, por lo tanto si el producto G_7G_8 es menor en el rango de frecuencias de interés que G_4 , pueden despreciarse dichas transferencias. Sin embargo también debe tenerse en cuenta el camino a través de G_1G_8 . Para simplificar este camino, es necesario que el aporte de éste sea despreciable a lo aportado por G_4 . Despreciando G_7 y G_8 resulta:

$$V_0 = \frac{V_{1N}(G_2G_3G_4G_5) + V_{1P}(G_1G_3G_4G_5)}{1 + G_3G_4G_5G_6}$$

$$V_0 = (V_{1N}G_2 + V_{1P}G_1) \frac{G_3G_4G_5}{1 + G_3G_4G_5G_6}$$

$$V_0 = (V_{1N}G_2 + V_{1P}G_1) \frac{G}{1 + GH}$$

donde

$$G = G_3G_4G_5$$

$$H = G_6$$

Aquí se observa la gran ventaja del análisis, puesto que se advierte qué esta dentro y qué esta fuera del lazo de control. Suponiendo que $GH \gg 1$

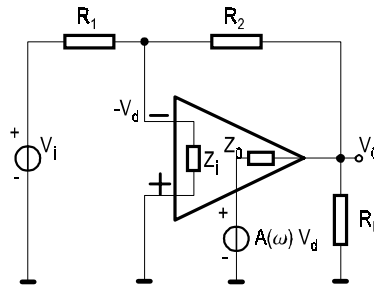
$$V_0 = \left(V_{1N} \frac{G_2}{G_6} + V_{1P} \frac{G_1}{G_6} \right)$$

$$V_0 = \frac{Y_{21N}}{Y_{21R}} V_{1N} + \frac{Y_{21P}}{Y_{22P}Y_{21R}} (Y_{22N} + Y_{22R}) V_{1P}$$

1.3 Conclusiones

1. Las impedancias de entrada y salida del A.O. afectan la estabilidad del lazo.
2. La transferencia de lazo cerrado no es siempre $1/H$ (bajas frecuencias).
3. La estabilidad esta determinada por $A(\omega)Y_0$ y los cuadripolos N y R (G_4 y G_6 , en la figura 1.4).
4. Conviene diseñar de manera que $F_e \rightarrow 1$ y $F_s \rightarrow 1/Y_0$.

Ejemplo 1 Dado el siguiente circuito obtener el diagrama en bloques del mismo, identificando cada bloque.



Se resolverá utilizando el modelo. Para ello, cada cuadripolo esta compuesto por una impedancia Z , obteniéndose los siguientes parámetros admitancia

$$Y_{11} = Y_{22} = 1/Z \quad (1.7)$$

$$Y_{21} = Y_{12} = -1/Z \quad (1.8)$$

por lo tanto el factor de entrada F_e queda:

$$F_e = \frac{Z_i}{Z_i + 1/R_1 + 1/R_2} \cong 1$$

ya que por diseño, las resistencias R_1 y R_2 son mucho menores que la impedancia de entrada. Por su parte el factor de salida F_s se calcula como:

$$F_s = \frac{1}{1/R_L + 1/Z_0 + 1/R_2} \cong Z_0$$

ya que por diseño, $Z_0 \ll R_2 \ll R_L$. Luego, el resto de los bloques se calcula como:

$$G_4 = \frac{A(\omega)}{Z_0}$$

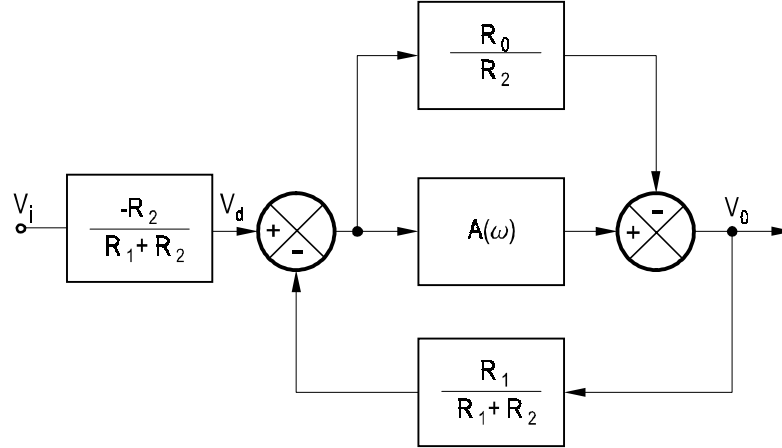
$$G_7 G_8 = \frac{1}{R_2}$$

$$G_2 = \frac{-1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_3 G_4 G_5 = 1 A(\omega)/R_0 R_0 = A(\omega)$$

$$G_6 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

y el diagrama en bloques obtenido sería el siguiente:

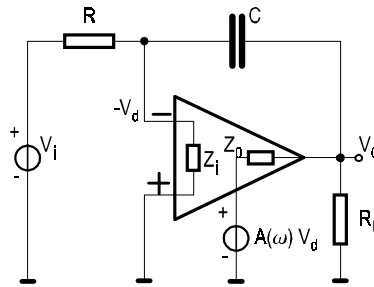


La ganancia del A.O., $A(\omega)$, es mucho mayor que R_0/R_2 para el rango de frecuencias en donde el GH del sistema es mayor que uno. Por lo tanto puede eliminarse, ya que no tendrá influencia en la estabilidad del circuito.

Finalmente la respuesta a lazo cerrado será:

$$T_{LC} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{A(\omega)}{1 + A(\omega) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \cong -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cong -\frac{R_2}{R_1}$$

Ejemplo 2 Dado el siguiente circuito, obtenga conclusiones sobre la estabilidad del mismo y su respuesta a lazo cerrado.



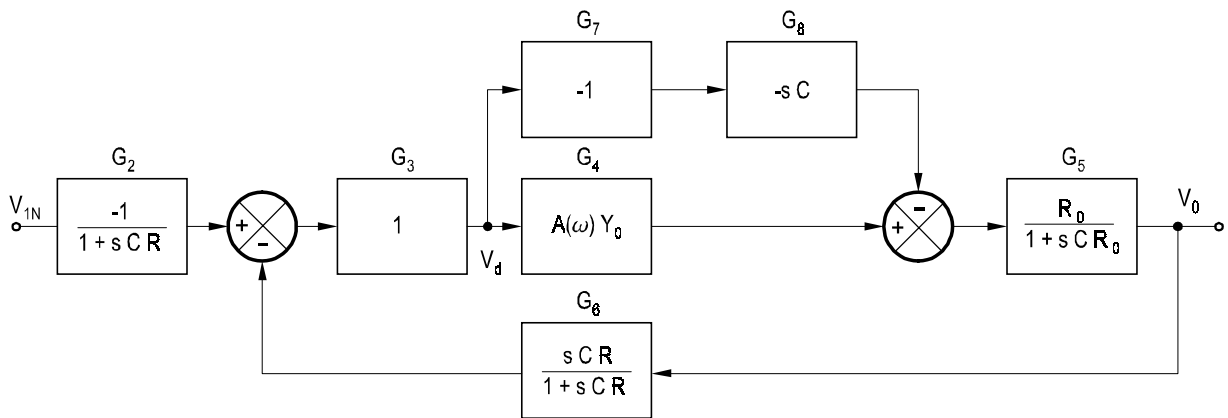
A partir de la figura 1.4 pueden calcularse los diferentes bloques. Los parámetros admitancia para un dipolo ya fueron calculados en el ejemplo anterior, por tanto, utilizando las ecuaciones (1.7) y (1.8):

$$\begin{aligned} Y_{11R} &= Y_{22R} = sC \\ Y_{12R} &= Y_{21R} = -sC \\ Y_{11N} &= Y_{22N} = 1/R \\ Y_{12N} &= Y_{21N} = -1/R \\ Z_i &\rightarrow \infty \\ Z_0 &= R_0 \end{aligned}$$

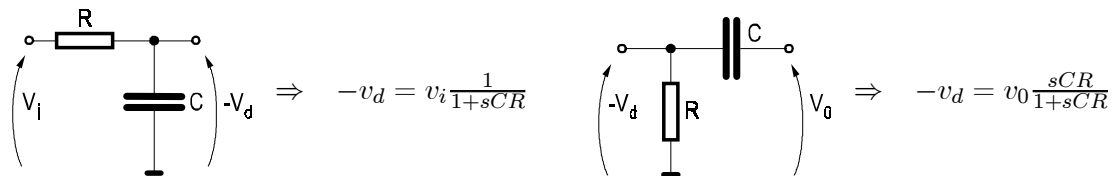
Luego, el resto de los bloques se calcula como:

$$\begin{aligned}
 G_3 &= 1 \\
 G_5 &= \frac{1}{1/R_0 + sC} = \frac{R_0}{1 + sCR_0} \\
 G_4 &= \frac{A(\omega)}{R_0} \\
 G_7G_8 &= sC \\
 G_2 &= \frac{-1/R}{1/R + sC} = -\frac{1}{1 + sCR} \\
 G_4 &= A(\omega)/R_0 \\
 G_6 &= \frac{sC}{1/R + sC} = \frac{sCR}{1 + sCR}
 \end{aligned}$$

y el diagrama en bloques queda de la siguiente forma:

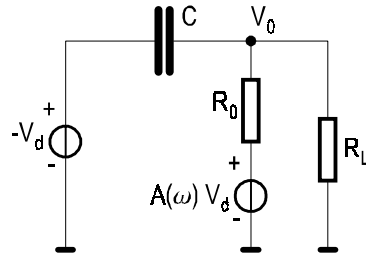


La misma solución puede obtenerse a partir del análisis circuital, el cual se basa en los principios utilizados para la derivación del modelo general. Como primer paso se obtendrá la tensión diferencial a la entrada del operacional mediante el teorema de superposición:



$$v_d = -\frac{v_i}{1 + sCR} - v_0 \frac{sCR}{1 + sCR} \tag{1.9}$$

A continuación se calcula la tensión de salida v_0 . En alta frecuencia, v_d afecta directamente a v_0 , debido a que la impedancia del condensador C es muy baja. Utilizando el principio de superposición:



Circuito equivalente para la salida.

$$v_0|_{v_d} = -v_d \frac{R_0 // R_L}{R_0 // R_L + 1/sC} = -v_d \frac{sC (R_0 // R_L)}{1 + sC (R_0 // R_L)} \quad (1.10)$$

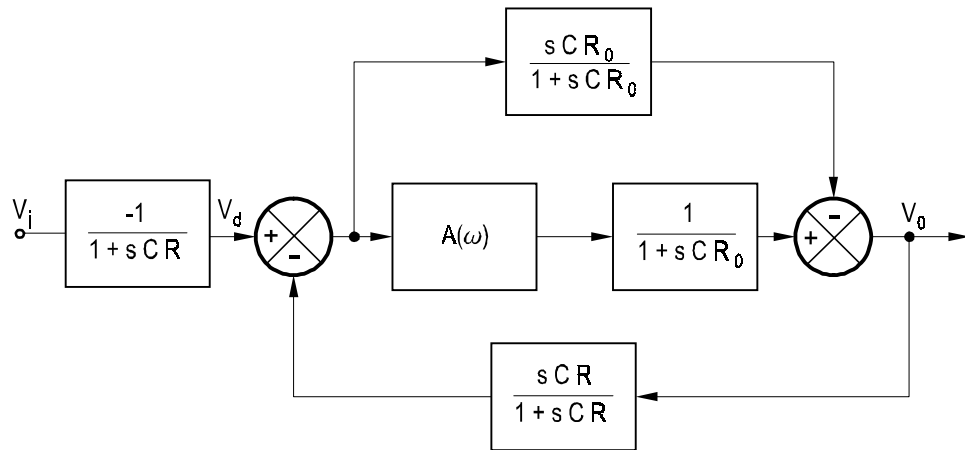
$$v_0|_{v_x} = v_x \frac{(R_L // \frac{1}{sC})}{R_0 + (R_L // \frac{1}{sC})} = v_x \frac{R_L}{R_0 + R_L} \frac{1}{1 + sC (R_0 // R_L)} \quad (1.11)$$

y combinando ambas ecuaciones

$$v_0 = v_0|_{v_d} + v_0|_{v_x}$$

$$v_0 = -v_d \frac{sC (R_0 // R_L)}{1 + sC (R_0 // R_L)} + v_x \frac{R_L}{R_0 + R_L} \frac{1}{1 + sC (R_0 // R_L)} \quad (1.12)$$

A partir de las ecuaciones (1.9) y (1.12) se puede obtener el diagrama en bloques mostrado en la siguiente figura.



La transferencia a lazo cerrado para bajas frecuencias será:

$$T_{LC} \simeq -\frac{1}{1+sCR} \frac{1+sCR}{sCR} = -\frac{1}{sCR} \quad (1.13)$$

tal cual se esperaba.

A partir del diagrama en bloques se pueden obtener los diagramas de bode. El sistema es estable para cualquier valor de C. En las cercanías de $GH = 1$ (punto A en el bode final) el sistema deja de tener ganancia y su repuesta en frecuencia es:

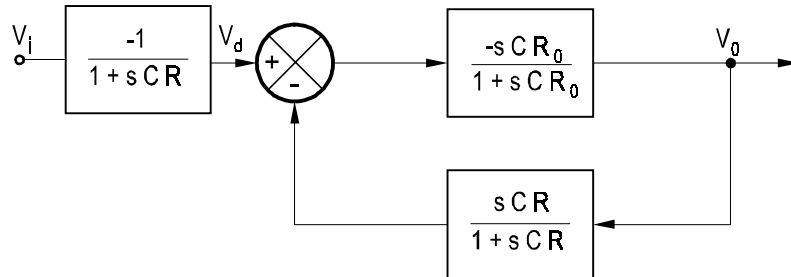
$$T_{LC} = \frac{-1}{(1 + sCR)} \frac{G}{1 + GH} \tag{1.14}$$

$$T_{LC} = \frac{-1}{(1 + sCR)} \frac{\frac{-sCR_0}{1+sCR_0}}{1 + \frac{-sCR_0}{1+sCR_0} \frac{sCR}{1+sCR}} = \frac{1}{(1 + sCR)} \frac{sCR_0 (1 + sCR)}{1 + sC(R + R_0)} \tag{1.15}$$

$$T_{LC} = \frac{sCR_0}{1 + sC(R + R_0)} \tag{1.16}$$

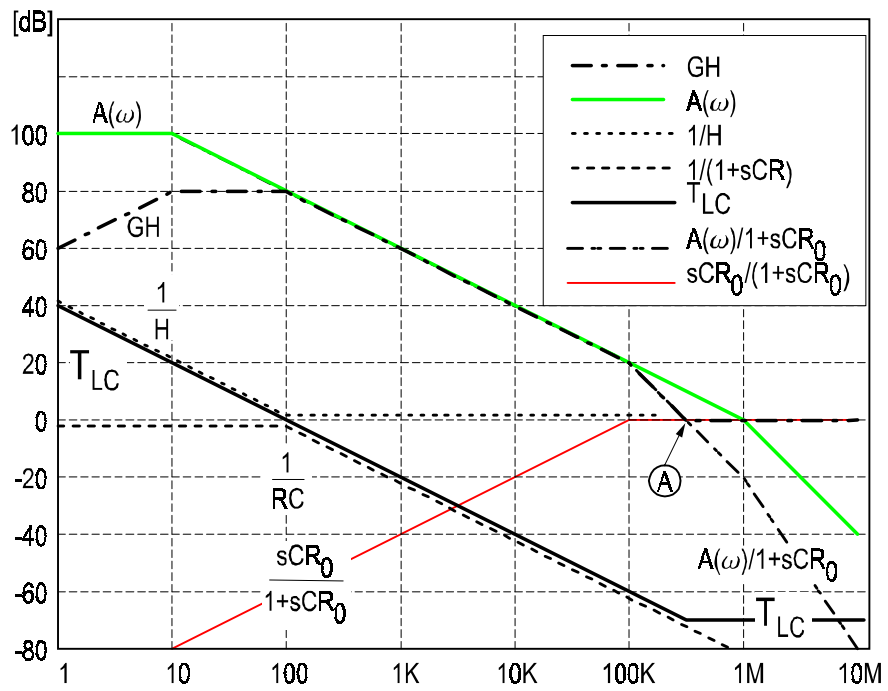
$$T_{LC}|_{s \rightarrow \infty} = \frac{R_0}{R + R_0} \tag{1.17}$$

En la figura se muestra el nuevo diagrama en bloques resultante, para frecuencias superiores a $GH = 1$, que es lo que se deduce por simple inspección del circuito. Nótese que la realimentación se transforma en positiva, pero en ningún momento GH supera la unidad, ya que el circuito equivalente es puramente pasivo.



En la siguiente figura se muestra el diagrama de bode¹:

¹Las transferencias de $1/H$ y $1/(1 + sCR)$ están desplazadas para mayor claridad del gráfico.



Bibliografía

- [1] Benjamin C. Kuo. *Sistemas Automáticos de Control*. Compañía Editorial Continental S.A., Calz. de Tlalpan Num. 4620, México 22, D.F., 1978.