



UNIDAD 1: ANÁLISIS DE SISTEMAS NO LINEALES

GENERALIDADES

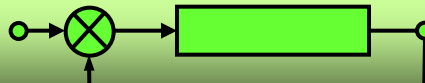
BIBLIOGRAFÍA:

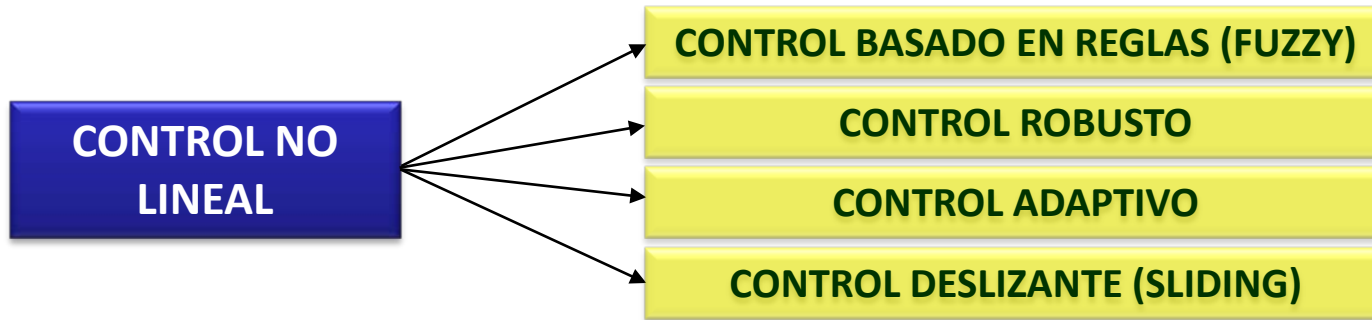
- APPLIED NON LINEAR CONTROL - Jean-Jacques Slotine, Weiping Li - Ed. Prentice Hall
- MODERN CONTROL ENGINEERING – Katsuhiko Ogata
- INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS NO LINEALES DE CONTROL Y SUS APLICACIONES – Carlos D´Atellis - AADECA

SISTEMAS NO LINEALES

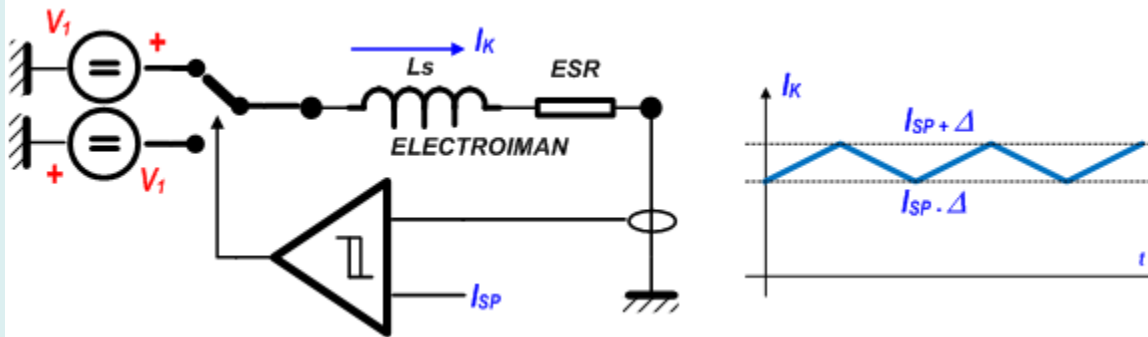
MOTIVACIÓN:

- SISTEMAS FÍSICOS INHERENTEMENTE ALINEALES: Problema de descripción del Proceso (ec. Diferenciales)
- MEJORA DE SISTEMAS DE CONTROL EXISTENTES
 - Pequeña señal?
 - Entorno de validez?
 - Controladores alineales para sistemas alineales: Ej. Robótica
- INCERTIDUMBRE EN EL MODELO
 - Variación de parámetros con las variables de estado (ej.: fluidos)
 - Variación del modelo en operación (ej.: robótica)
 - Variación del modelo en el tiempo (ej.: deriva térmica, envejecimiento)
- ALINEALIDADES SEVERAS EN EL MODELO
 - Discontinuidades (ej.: fuerza de roce, Saturación, zona muerta, backlash, histéresis, etc.)
- SIMPLICIDAD DE DISEÑO
 - Robustez, Velocidad, Costo
 - Soluciones computacionales disponibles por evolución tecnológica

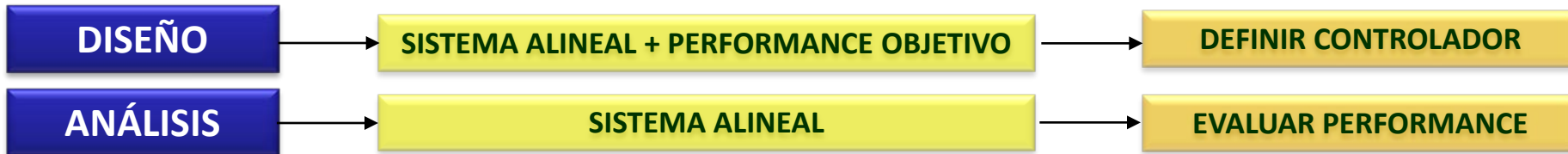




EJEMPLO DE CONTROLADOR NO LINEAL : REGULADOR ON-OFF



- SIMPLE
- EFICIENTE (energéticamente, no disipativo)
- MAXIMA VELOCIDAD DE RESPUESTA
- ROBUSTO (EMI, insensible a variaciones, etc.)
- TAN PRECISO COMO SE REQUIERA





REVISIÓN DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES - SISTEMAS LINEALES (L.T.I.):

- ❑ Simplicidad de análisis => Reducida carga matemática => Extrapolación => **DISEÑO !!**
- ❑ Aplica Principio de Superposición => Reducción de complejidad de problemas
- ❑ Soluciones aproximadas, restringidas al entorno de validez del modelo lineal
- ❑ Modelo homogéneo: $\dot{x} = A \cdot x$
 - ❑ Único punto de equilibrio con A no singular
 - ❑ Estable sii $\text{Re}\{\text{Atvl}[A]\} < 0$
 - ❑ Punto de equilibrio independiente de condición inicial
 - ❑ Respuesta transitoria es c.l. de modos naturales
- ❑ Modelo con excitación: $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$
 - ❑ Superposición de entradas, incluso $w=0$
 - ❑ Entrada senoidal => Salida senoidal
 - ❑ Entrada acotada => Salida acotada

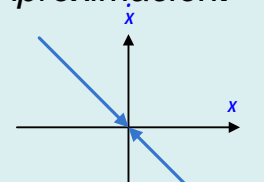
FENÓMENOS ALINEALES

1. MÚLTIPLES PUNTOS DE EQUILIBRIO

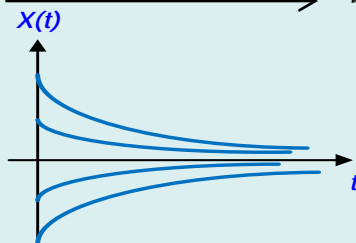
Ejemplo: $\dot{x} = x^2 - x, \quad x(t=0) = x_0$

Solución: $x(t) = \frac{x_0 \cdot e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 \cdot e^{-t}}$

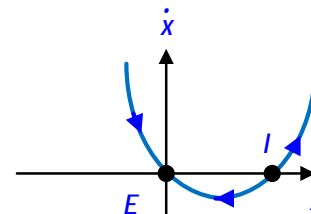
Aproximación: $\dot{x} \approx -x \rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{-t}$



Un punto de equilibrio

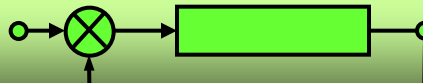
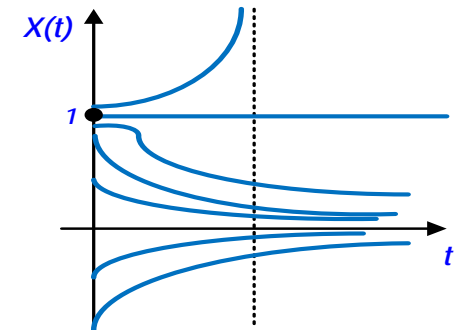


Espacio de estado



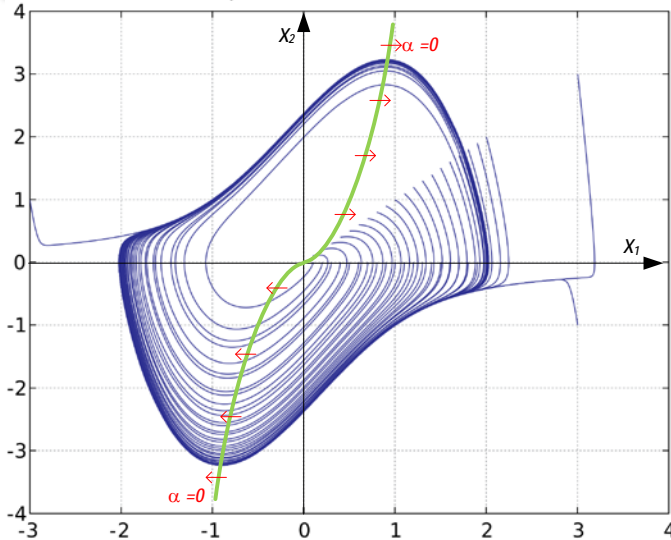
Dos puntos de equilibrio

Dominio temporal



2. CICLOS LÍMITE

Ejemplo: Sistema Alineal de 2do. Orden: Ec. de Van der Pol



$$\ddot{x} + \beta \cdot (x^2 - 1) \cdot \dot{x} + \alpha \cdot x = 0$$

Notar:

- Término de amortiguamiento +/-
- Dos zonas definidas en el plano
- Sentido de evolución del vector de estado
- Independencia de la c.i.
- Degeneración / Regeneración
- Diferente a un sistema marginalmente estable

Punto singular: (0;0)

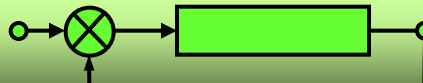
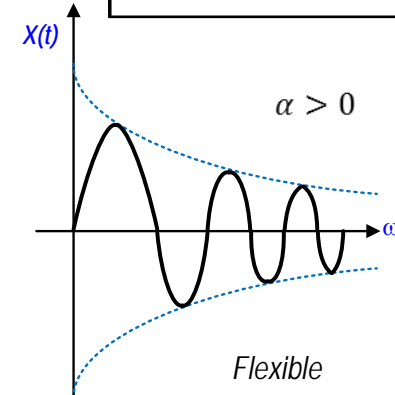
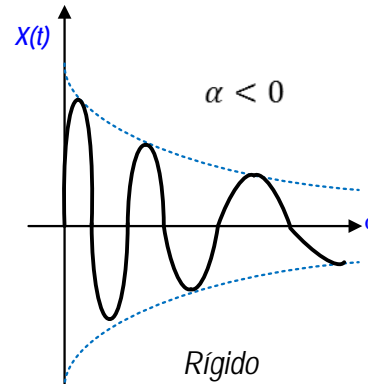
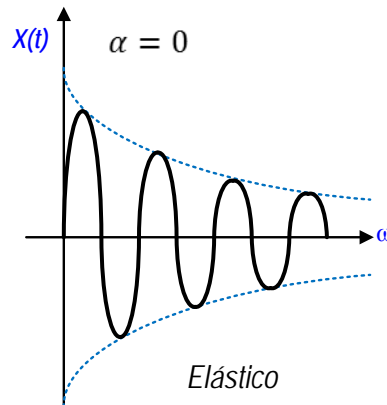
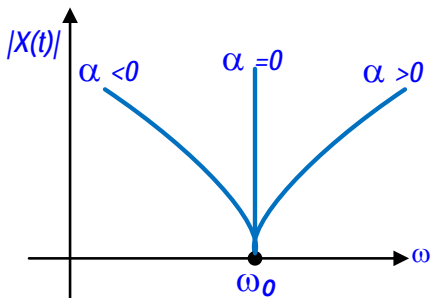
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta \cdot (x_1^2 - 1) \cdot x_2 - \alpha \cdot x_1 \end{cases}$$

3. DEPENDENCIA FRECUENCIA-AMPLITUD

Ejemplo: Sistema Alineal de 2do. Orden: Ec. de Duffing

Punto singular: (0;0)

$$\ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + \beta \cdot x + \alpha \cdot x^3 = 0$$





4. BIFURCACIONES

Ejemplo:

Sistema Alineal de 2do. Orden:

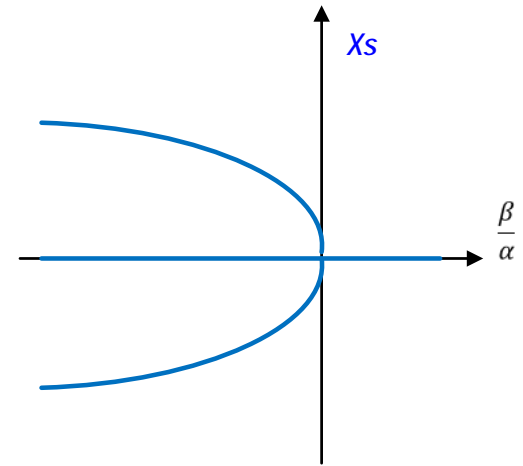
Ec. de Duffing no amortiguada

$$\ddot{x} + \beta \cdot x + \alpha \cdot x^3 = 0$$

Análisis en el espacio de los parámetros:

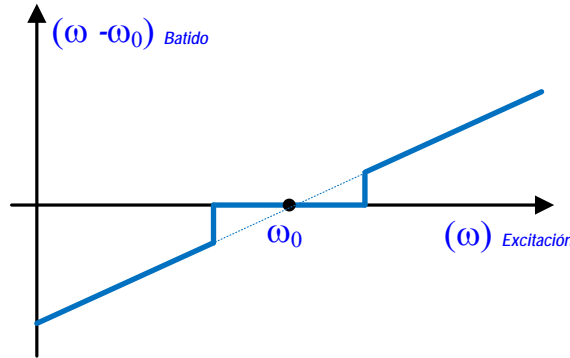
$$\alpha \cdot x \left(\frac{\beta}{\alpha} + x^2 \right) = 0$$

Conjunto de puntos de equilibrio $\rightarrow x = 0$
 $\rightarrow x^2 = -\frac{\beta}{\alpha}$



5. ARRASTRE DE FRECUENCIA

Ocurre en sistemas excitados que describen ciclos límite



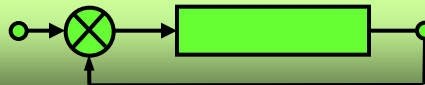
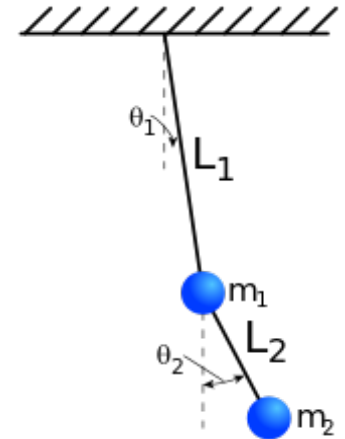
6. CAOS

Ejemplo 1: $\ddot{x} + \beta \cdot \dot{x} + \alpha \cdot x^5 = K \cdot \sin \omega t$

- Fenómeno determinístico (NO estocástico)
- Sensibilidad extrema del estado a la c.i.
- Propio de sistemas fuertemente alineales
- Ejemplo: turbulencias, vibraciones alineales, etc.

Ejemplo 2:

Doble péndulo: Descripción de la posición del extremo m_2 en función de las c.i.



MÉTODO DEL PLANO DE FASE

ANÁLISIS EN EL ESPACIO DE ESTADOS

MÉTODO GRÁFICO

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

DIFERENTES C. I.

FAMILIA DE TRAYECTORIAS

DESCRIPCIÓN GENERAL $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

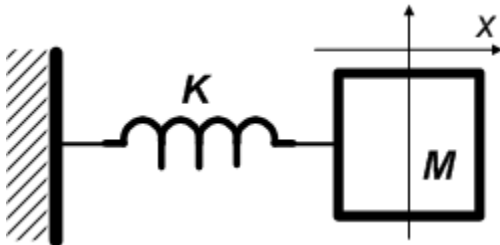
CASO LINEAL PARTICULAR

$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{cases} \equiv \dot{x} = A \cdot x$

siendo: $x_1 = x_1(t); x_2 = x_2(t)$ obtener: $x(t); t = 0 \rightarrow \infty$ en coordenadas: $(x_1; x_2)$ t =parámetro
 $x_0 = x(t = 0)$ c.i.

PUNTO SINGULAR: $\dot{x} = 0$

EJEMPLO 1: Sistema masa-resorte unidimensional



$\sum \bar{F} = M \cdot \ddot{x} \rightarrow M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0$

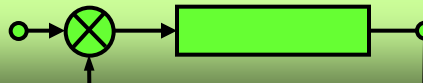
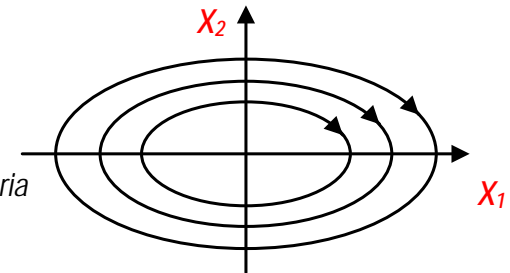
$x = x_1 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M} \cdot x_1 \end{cases}$

PUNTO SINGULAR: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el cociente: $\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow x_2 \cdot dx_2 = -\frac{K}{M} x_1 \cdot dx_1$

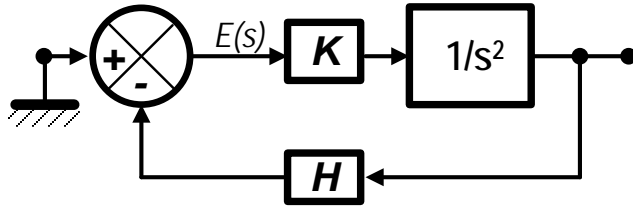
Integrando: $x_2^2 + C_1 \cdot x_1^2 = C_2$ (Familia de elipses)

- Notar:
- Punto singular
 - Sentido
 - Significado de trayectoria
 - Tiempo?





EJEMPLO 2: Sistema de control lineal de 2do. Orden



Ec. error en plano transformado: $K.H.E(s) + s^2.E(s) = 0$

Antitransformando: $K.H.e + \ddot{e} = 0$

$e = x_1 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -K.H.x_1 \end{cases}$ Sistema dinámico formalmente equivalente a masa-resorte (elipses)

CONSTRUCCIÓN DEL PLANO DE FASE

INTEGRACIÓN DIRECTA

MÉTODOS COMPUTACIONALES

MÉTODO DE LAS ISOCLINAS

MÉTODO DE LAS ISOCLINAS

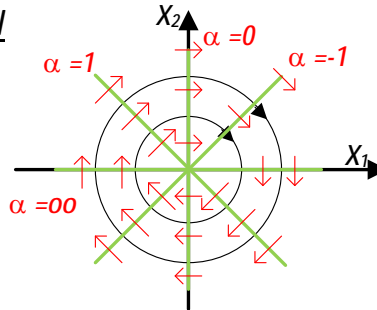
CASO GENERAL $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \rightarrow \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \triangleq \alpha$ Campo de direcciones de pendiente α

CASO LINEAL PARTICULAR $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 \end{cases} \rightarrow \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2}{a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2} \triangleq \alpha$ Familia de rectas
Función de α

EJEMPLO 1: Sistema masa-resorte unidimensional

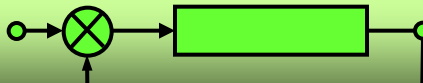
$x = x_1 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

$\alpha.x_2 + x_1 = 0$



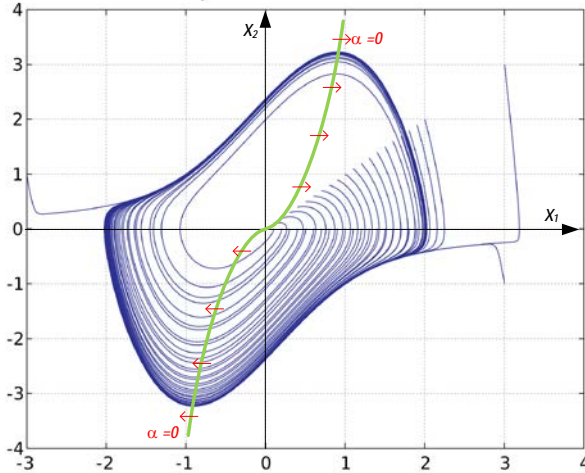
Notar:

- Pendiente de la trayectoria
- Sentido
- Pendiente de la recta isocлина





EJEMPLO 2: Sistema no lineal de 2do. Orden: Ec. De Van der Pol:



Notar:

- Término de amortiguamiento +/-
- Ciclo límite
- Sentido
- Función isoclina
- Degeneración / Regeneración

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + \alpha x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta \cdot (x_1^2 - 1) \cdot x_2 - \alpha \cdot x_1 \end{cases}$$

Punto singular: (0;0)

Función Isoclina:

$$\frac{-\beta \cdot (x_1^2 - 1) \cdot x_2 - \alpha \cdot x_1}{x_2} = C$$

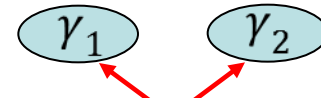
ANALOGÍAS CON SISTEMAS LINEALES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{cases} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

AUTOVALORES

$$\|s \cdot Id - A\| = 0$$

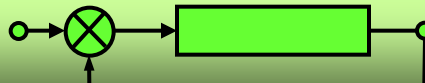
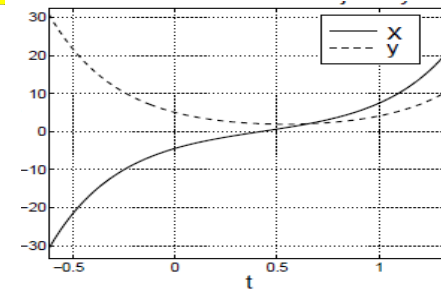
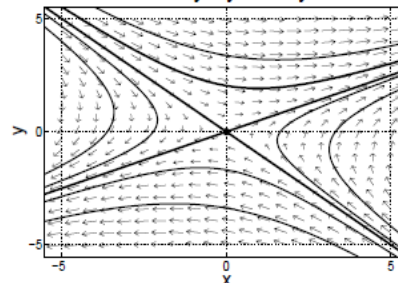
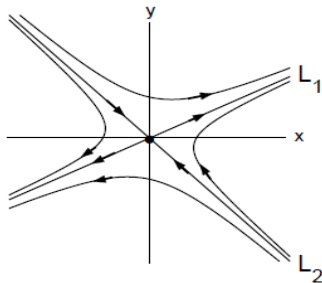
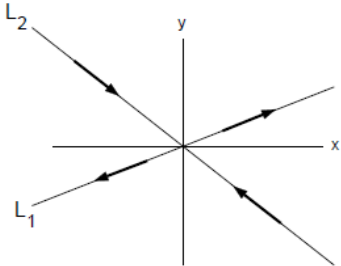
$$s^2 + s \cdot (-a_{11} - a_{22}) + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = 0$$



Forma canónica: $a_{11} = 0$
 $a_{12} = 1$

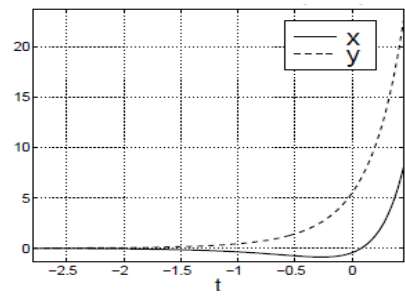
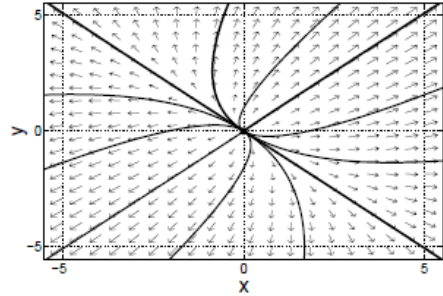
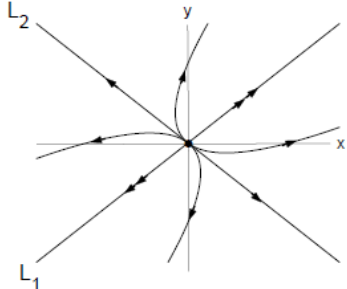
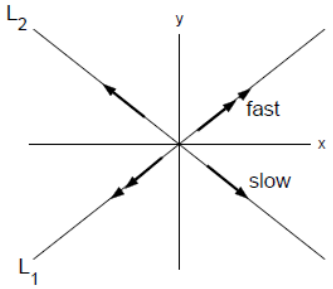
CASO 1: SILLA DE MONTAR

$$Re\{\gamma_1\} < 0 < Re\{\gamma_2\}; Im\{\gamma_1\} = -Im\{\gamma_2\} = 0$$



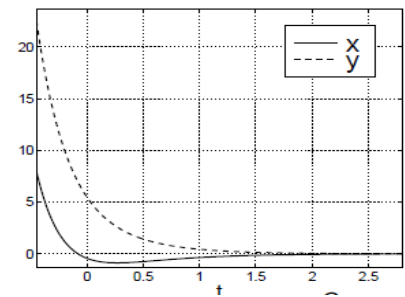
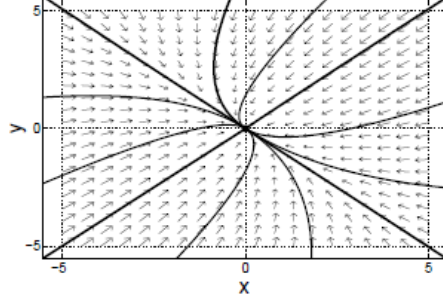
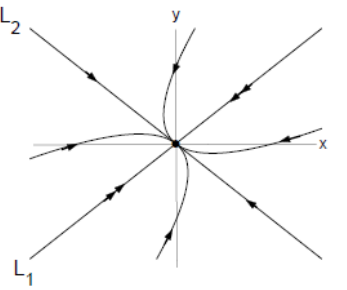
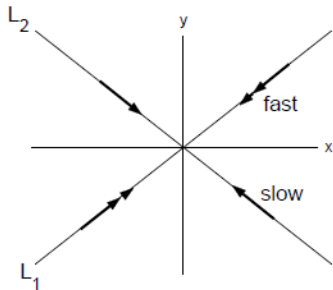
CASO 2: NODO INESTABLE

$0 > \text{Re}\{\gamma_1\} > \text{Re}\{\gamma_2\}; \text{Im}\{\gamma_1\} = -\text{Im}\{\gamma_2\} = 0$



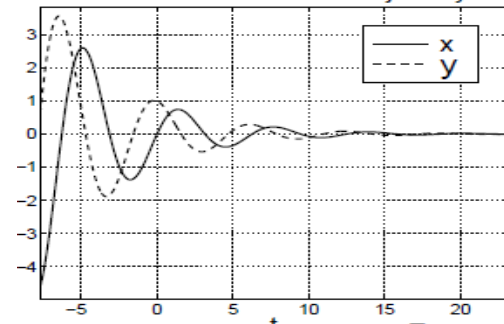
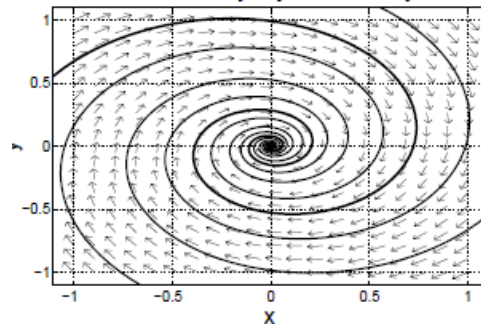
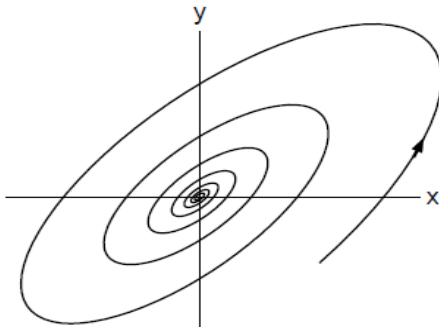
CASO 3: NODO ESTABLE

$\text{Re}\{\gamma_1\} < \text{Re}\{\gamma_2\} < 0; \text{Im}\{\gamma_1\} = -\text{Im}\{\gamma_2\} = 0$



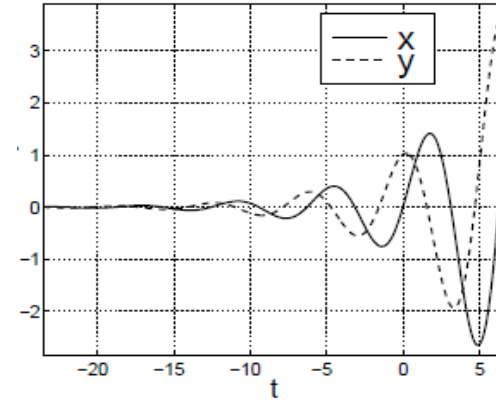
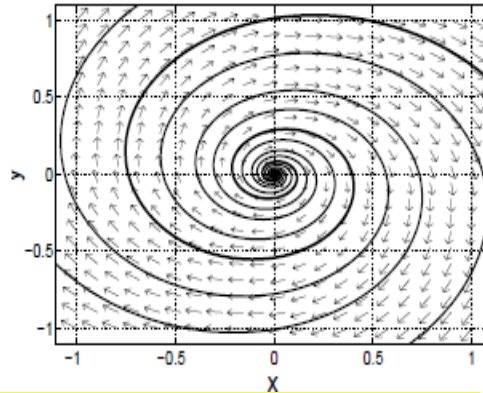
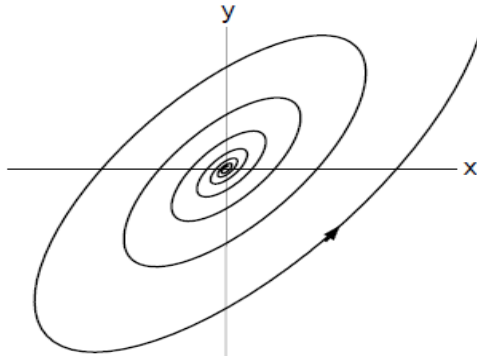
CASO 4: FOCO ESTABLE

$\text{Re}\{\gamma_1\} = \text{Re}\{\gamma_2\} < 0; \text{Im}\{\gamma_1\} = -\text{Im}\{\gamma_2\} \neq 0$



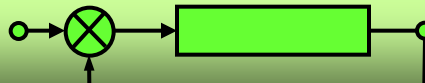
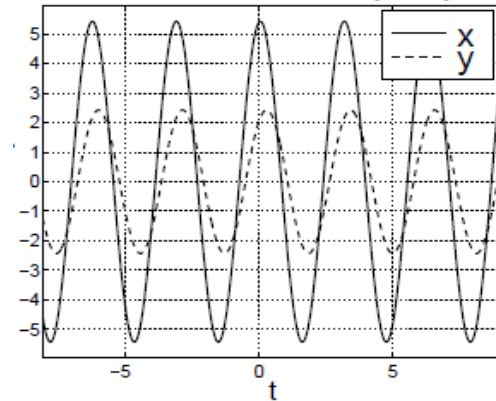
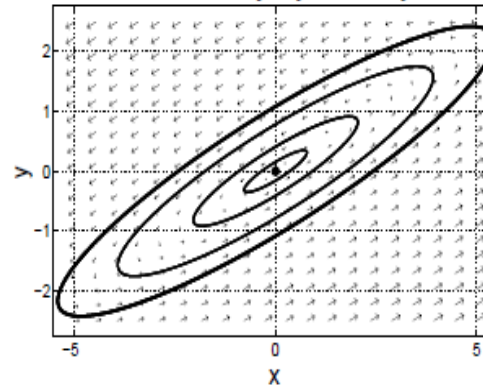
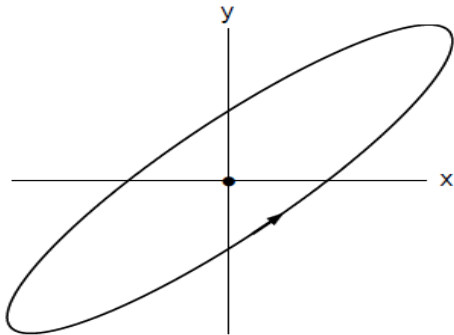
CASO 5: FOCO INESTABLE

$$Re\{\gamma_1\} = Re\{\gamma_2\} > 0; Im\{\gamma_1\} = -Im\{\gamma_2\} \neq 0$$



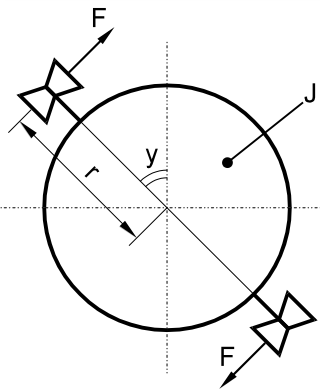
CASO 6: CENTRO

$$Re\{\gamma_1\} = Re\{\gamma_2\} = 0; Im\{\gamma_1\} = -Im\{\gamma_2\} \neq 0$$





CASO DE ANÁLISIS: CONTROL NO LINEAL DE SATÉLITE



$S_0 = F \cdot r$
 $S_0 =$ Torque máximo
 $r =$ Radio del satélite
 $J =$ Momento de inercia del satélite

Objetivo:

- Controlar posición de antenas
- Propulsores controlados ON / OFF
- Alternativa 1: Control simple
- Alternativa 2: Control con derivador
- Alternativa 3: Control Óptimo

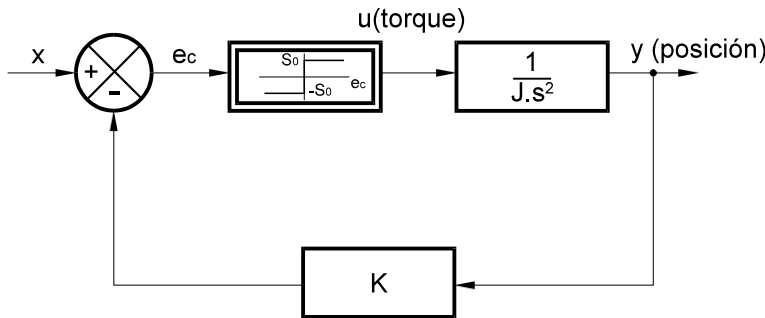
$$\sum M_o = J \cdot \ddot{y}$$

$$x_1 = \frac{e}{\gamma}$$

$$x_2 = \frac{\dot{e}}{\gamma}$$

$$\gamma = K \frac{S_0}{J}$$

CASO 1: CONTROL SIMPLE

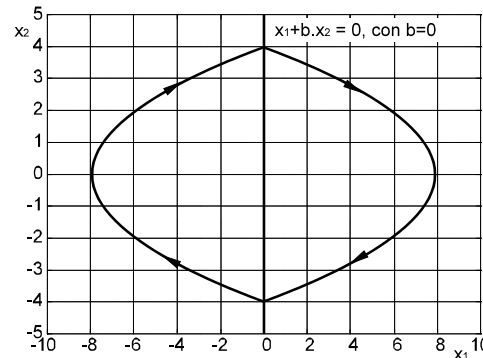


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = +\frac{S_0}{J}; e_c > 0 \rightarrow y < 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{S_0}{J}; e_c < 0 \rightarrow y > 0 \end{cases}$$

$$x_2 \cdot dx_2 = \pm \frac{S_0}{J} \cdot dx_1$$

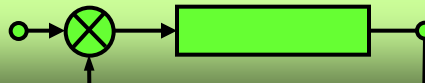
$$x_2^2 \mp 2 \cdot \frac{S_0}{J} \cdot x_1 = 0$$

Familia de Parábolas

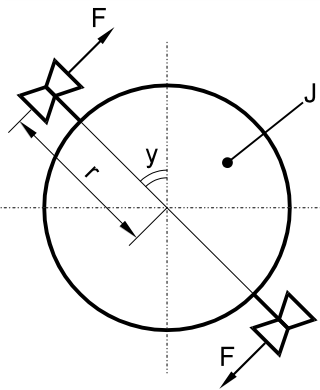


Notar:

- El sistema no converge al punto singular
- La magnitud del error máxima se mantiene
- El valor promedio del error es nulo
- El error depende de la condición inicial

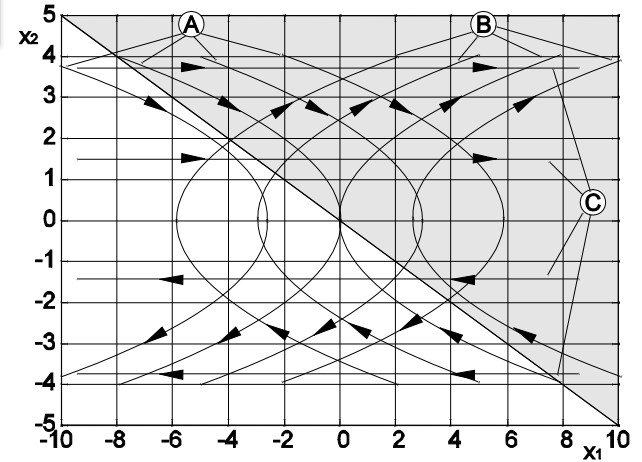
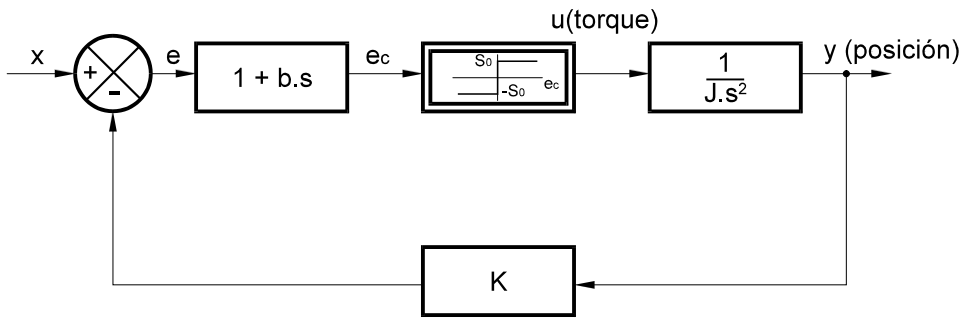


CASO DE ANÁLISIS: CONTROL NO LINEAL DE SATÉLITE

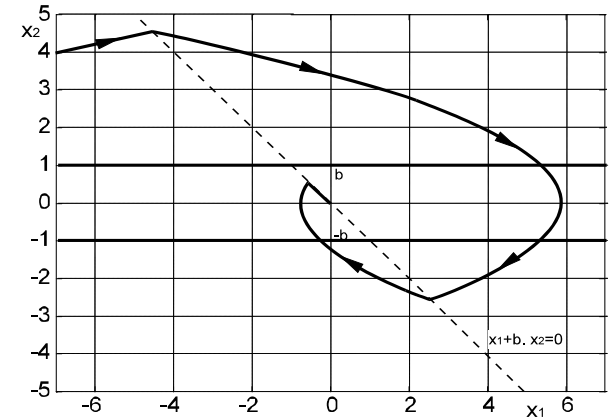


$S_0 = F \cdot r$
 $S_0 =$ Torque máximo
 $r =$ Radio del satélite
 $J =$ Momento de inercia del satélite

CASO 2: CONTROL CON DERIVADOR



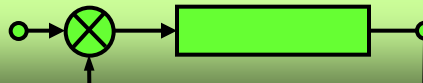
$e_c > 0 \Rightarrow x_1 + b \cdot x_2 > 0$
 $e_c < 0 \Rightarrow x_1 + b \cdot x_2 < 0$



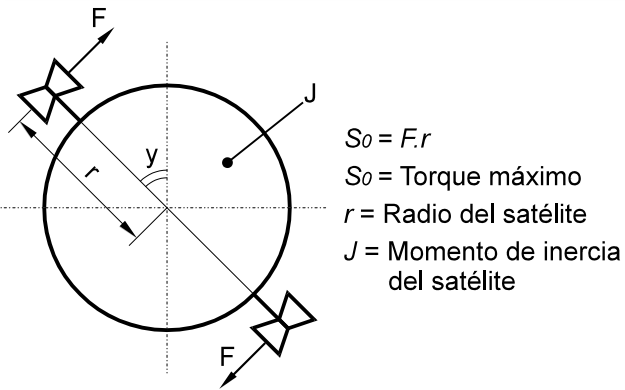
A	B	C
Para $e_c < 0 \Rightarrow u = -S_0$	Para $e_c > 0 \Rightarrow u = S_0$	Para $e_c = 0 \Rightarrow u = 0$
$x_2^2 + 2x_1 + C_2 = 0$	$x_2^2 - 2x_1 + C_1 = 0$	$x_2 = C_3$

Notar:

- El sistema converge algo al punto singular
- La magnitud del error máxima se reduce
- Chattering
- Línea de conmutación controlada por dy/dt

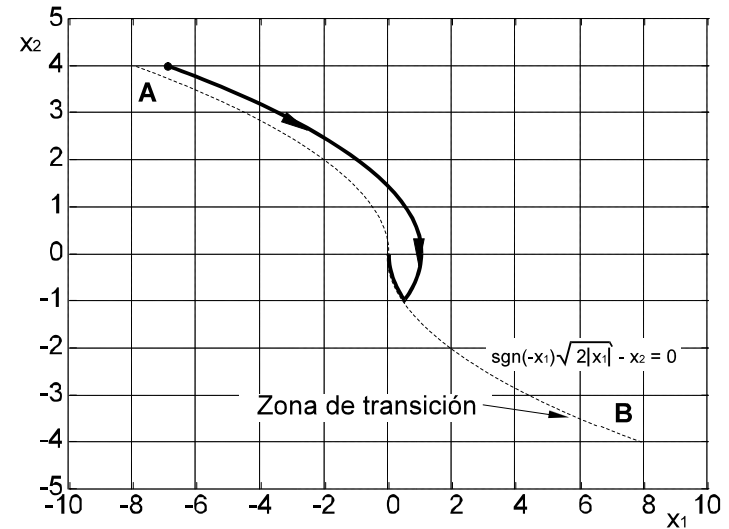
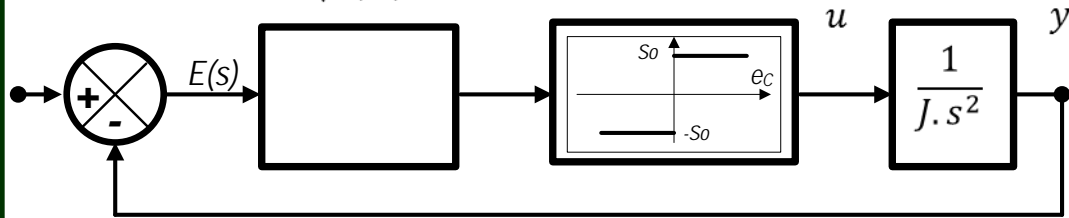


CASO DE ANÁLISIS: CONTROL NO LINEAL DE SATÉLITE



CASO 3: CONTROLADOR ÓPTIMO

$$\text{sgn}(-x_1)\sqrt{2 \cdot |x_1|} - x_2 = 0$$



Notar:

- El sistema converge en dos conmutaciones al punto singular
- La magnitud del error máxima se reduce a cero
- Controlador ON / OFF
- Compensador complejo

