

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



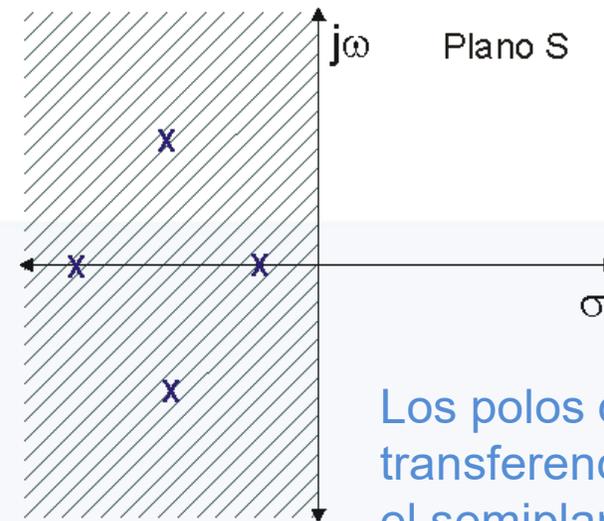
Condición de estabilidad:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^p + a_1 s^{p-1} + \dots + a_{p-1} s + a_p}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad p \leq m$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{c_{m-1}}{(s - p_{m-1})} + \frac{c_m}{(s - p_m)}$$

Respuesta al impulso:

$$g(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{p_i t}$$

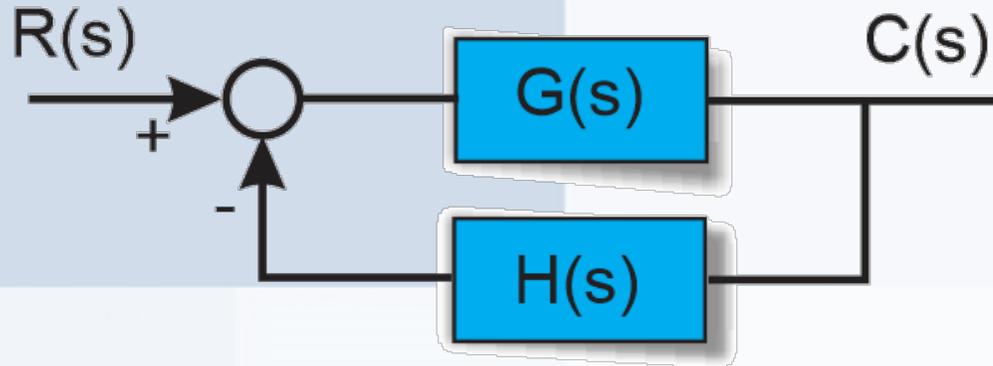


Los polos de la función de transferencia deben estar en el semiplano izquierdo

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Sistemas Realimentados:



$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

POLOS $1 + G(s)H(s) = 0$

Métodos utilizados para determinar la estabilidad:

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+8)(s+10)} \quad H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)}$$

* Método de Routh-Hurwitz

$$1 + G(s)H(s) = \frac{s^4 + 19s^3 + 98s^2 + (80 + 100K)s + 200K}{s^4 + 19s^3 + 98s^2 + 80s}$$

s^4	1	98	200K
s^3	19	80 + 100K	
s^2	$\frac{1782 - 100K}{19}$	$\frac{3800K}{19}$	
s	$\frac{2708640 + 1862000K - 190000K^2}{33858 - 1900K}$		
1	200K		

$$K \leq 17.82$$

$$K \geq -1.286$$

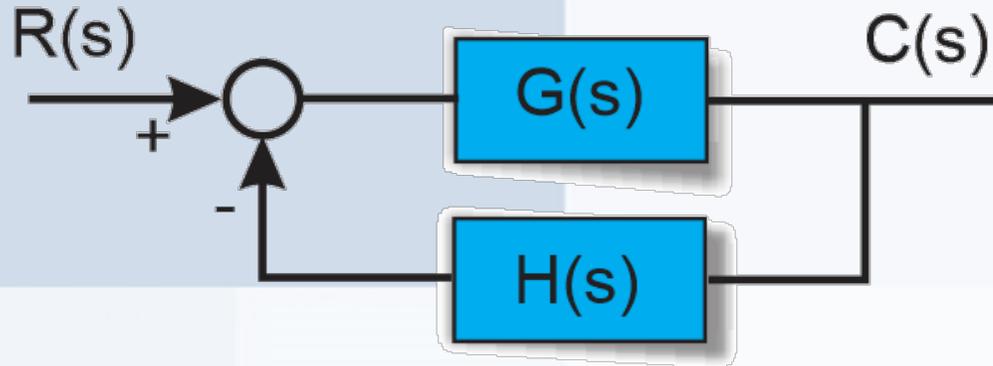
$$K \leq 11.086$$

$$K \geq 0$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Sistemas Realimentados:



$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

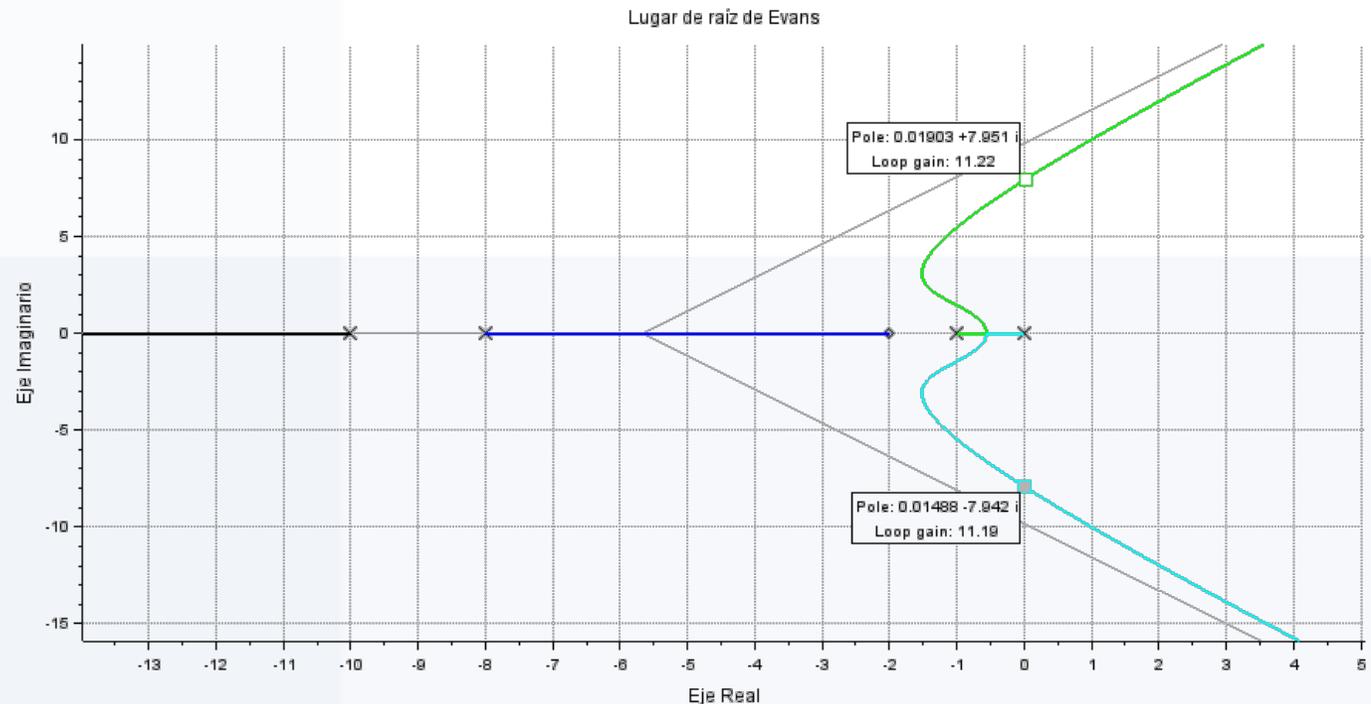
POLOS $1 + G(s)H(s) = 0$

Métodos utilizados para determinar la estabilidad:

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+8)(s+10)} \quad H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)}$$

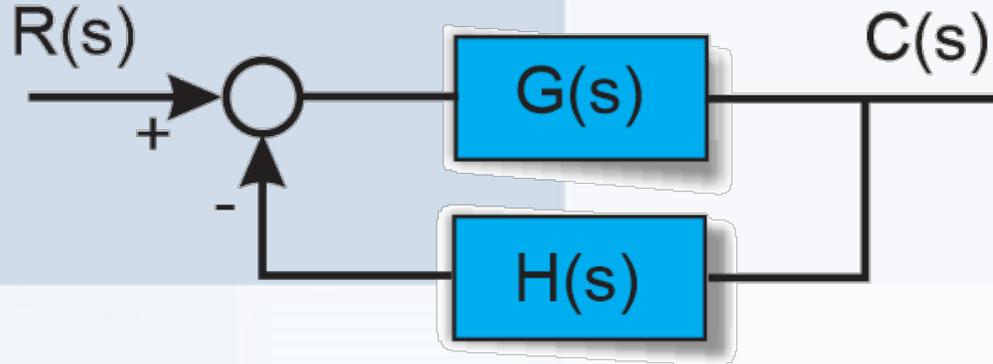
* Método de Routh-Hurwitz

* Lugar de Raíces



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas Realimentados:



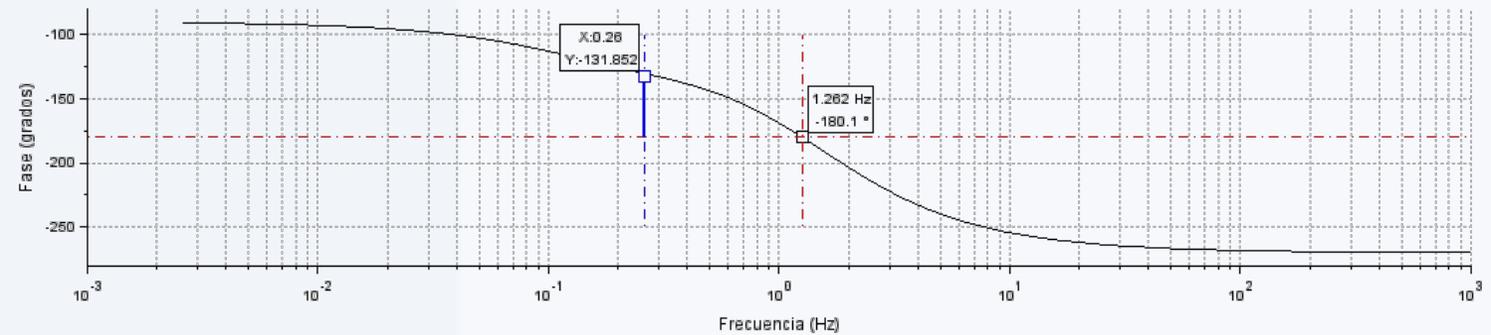
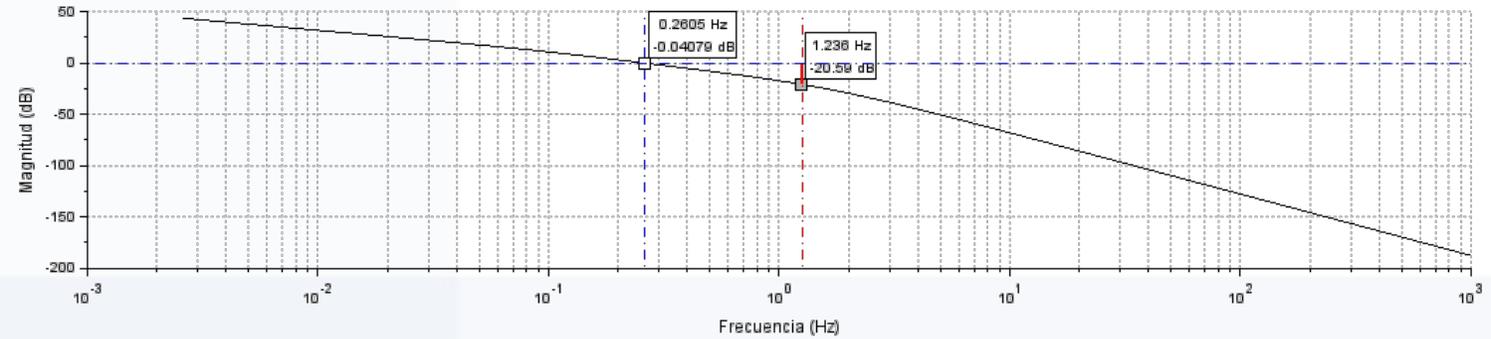
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

POLOS $1 + G(s)H(s) = 0$

Métodos utilizados para determinar la estabilidad:

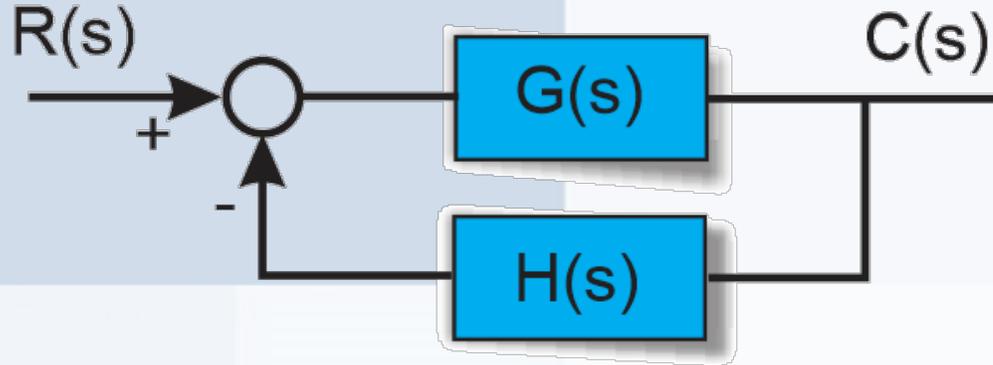
- * Método de Routh-Hurwitz
- * Lugar de Raíces
- * Diagrama de Bode

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+8)(s+10)} \quad H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)}$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas Realimentados:



Métodos utilizados para determinar la estabilidad:

- * Método de Routh-Hurwitz
- * Lugar de Raíces
- * Diagrama de Bode
- * Criterio de Nyquist

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

POLOS $1 + G(s)H(s) = 0$

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+8)(s+10)} \quad H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)}$$





Harry Nyquist

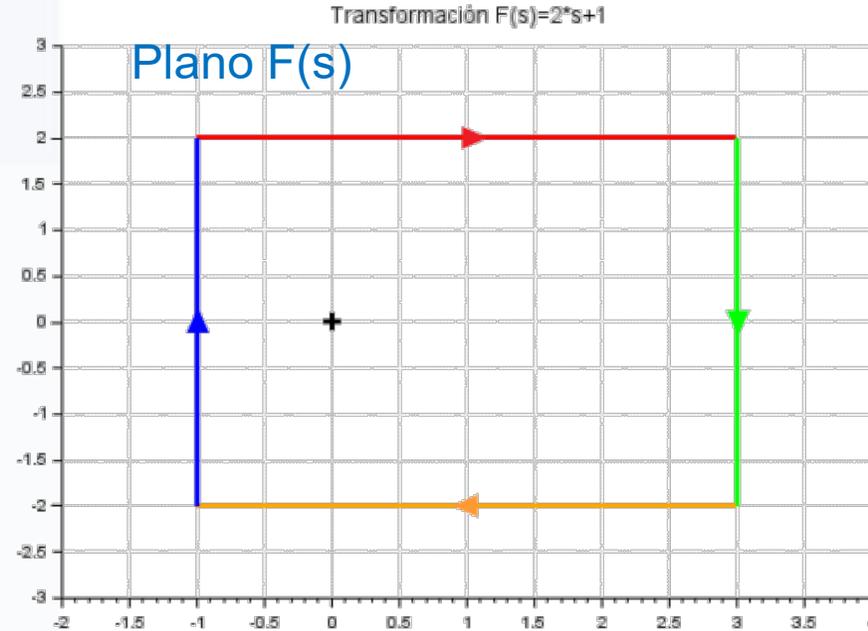
Harry Nyquist nació el 7 de febrero de 1889 en el condado de Varmland (Suecia). Emigró a Estados Unidos en 1907, luego ingresó a la Universidad de Dakota del Norte en 1912 y recibió un diplomado y un Máster en Ingeniería Eléctrica en 1914 y 1915, respectivamente. Después recibiría un PhD en Física en la Universidad de Yale en 1917.

Al recibir este grado, comenzó a trabajar en el Departamento de Desarrollo e Investigación de AT&T desde 1917 hasta 1934, y continuó cuando la empresa cambió su nombre a *Bell Telephone Laboratories* en ese año, hasta su retiro en 1954. Nyquist recibió la Medalla de honor IEEE en 1960 por sus contribuciones al [conocimiento cuantitativo del ruido térmico](#), [la transmisión de datos](#) y [la realimentación negativa](#). En octubre de 1960 fue galardonado con la medalla de Stuart Ballantine del Instituto Franklin por sus análisis teóricos y sus inventos prácticos en el campo de sistemas de comunicación durante los últimos cuarenta años incluyendo, sus trabajos en las teorías de transmisión telegráfica, ruido térmico en conductores eléctricos y en la teoría de sistemas de retroalimentación. En 1969 fue premiado por la Academia nacional de Ingeniería con su cuarta medalla de los fundadores “en reconocimiento a sus contribuciones fundamentales para la ingeniería.”

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS

Suponga que se quiere transformar una serie de valores de “ s ” en el plano S , donde todos los puntos forman una trayectoria cerrada o contorno (Q), utilizando la función $F(s) = 2s + 1$



Cada punto o elemento del contorno en el plano s , tiene su representación en el plano $F(s)$. Se evalúan todos los puntos del contorno y se obtiene un contorno cerrado en el plano $F(s)$. En este caso, el contorno en el plano $F(s)$ conserva la misma forma que el contorno del plano S , (Transformación conforme).

El sentido de circulación a lo largo del contorno Q de considera positivo en el sentido horario, en este caso ambos contornos se consideran que tienen un sentido positivo.



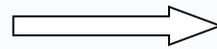
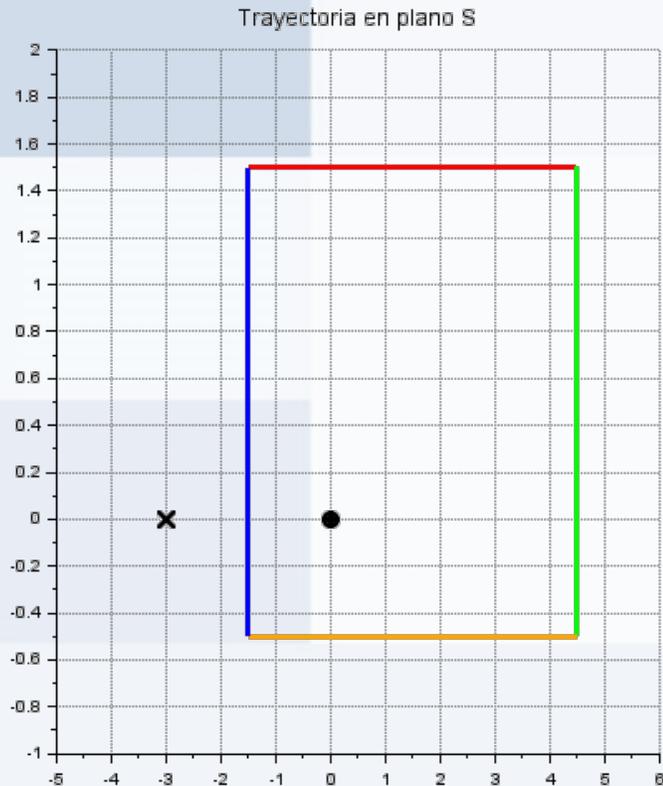
ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS



Ahora, se analiza la influencia de los polos y ceros en la transformación del contorno Q. Se analiza la transformación:

$$F(s) = \frac{s}{s+3}$$



$$F(s) = \frac{s}{s+3}$$



En este caso la transformación es no conforme pero conserva el sentido positivo.

Existe una característica muy interesante que ocurre cuando el contorno del plano S encierra a ceros o polos la función:

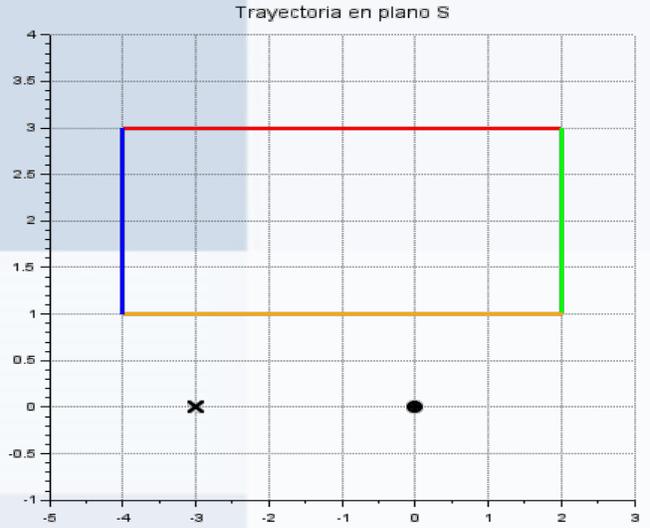
- 1.- Si el contorno en el plano S encierra a un cero de la función, el contorno en el plano $F(s)$ encierra al origen en el mismo sentido del contorno en plano S.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS

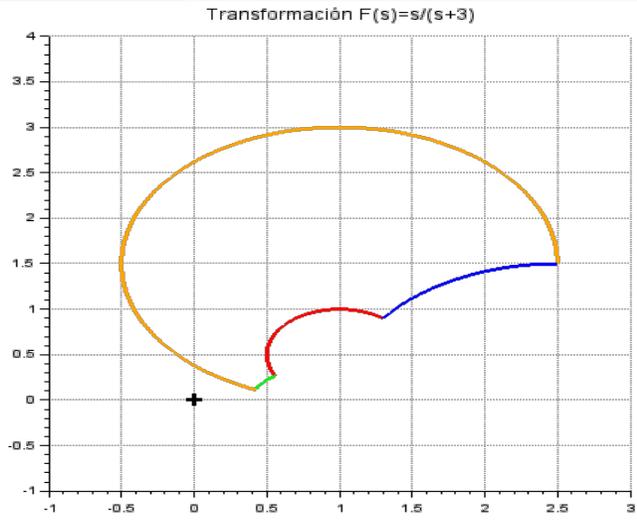


2.- Si el contorno en el plano S no encierra a ningún cero o polo de la función, el contorno en el plano $F(s)$ no encierra al origen.

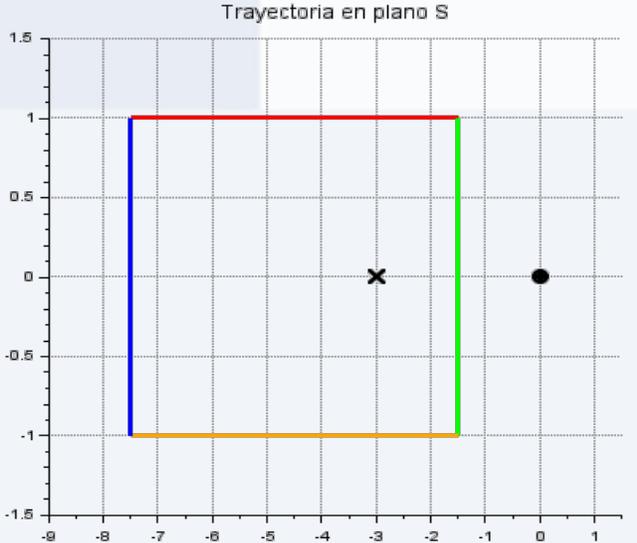


→

$$F(s) = \frac{s}{s+3}$$

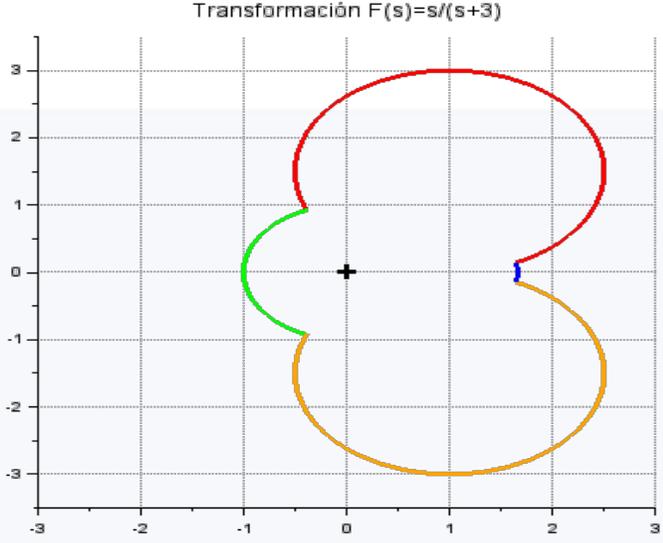


3.- Si el contorno en el plano S encierra a algún polo de la función, el contorno en el plano $F(s)$ encierra al origen en sentido contrario.



→

$$F(s) = \frac{s}{s+3}$$

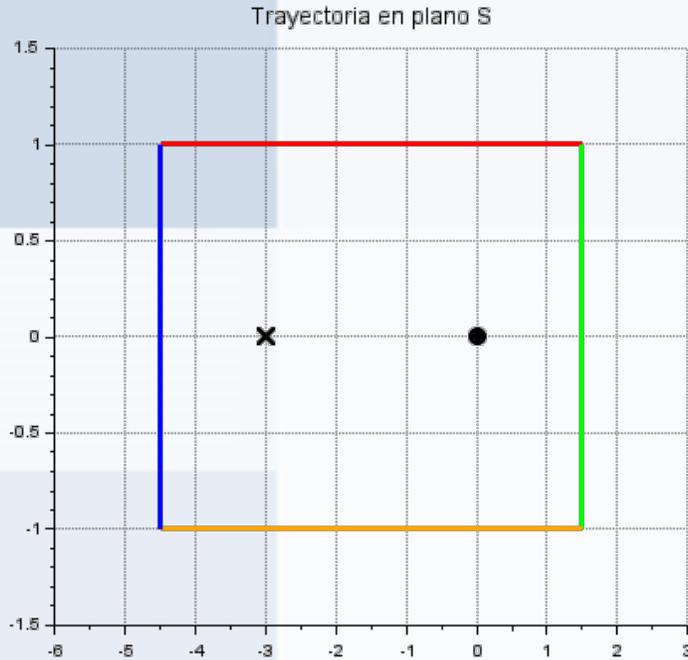


ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

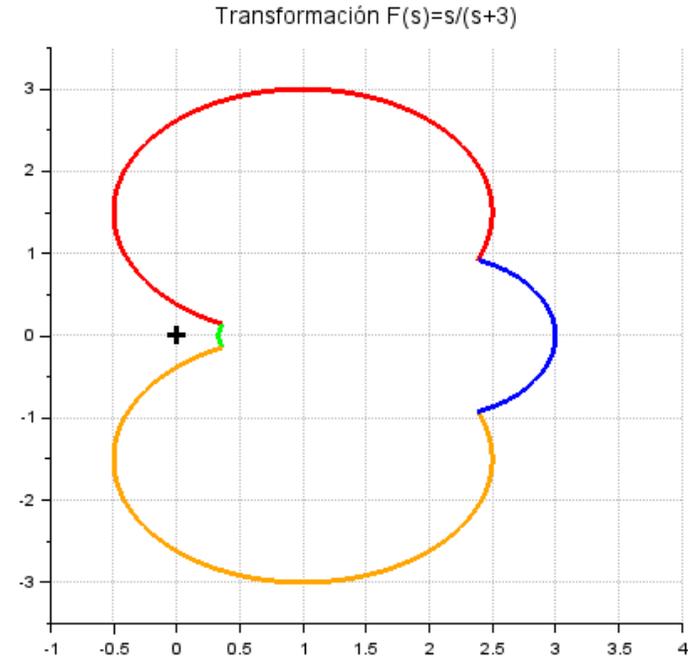
TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS



4.- Si el contorno en el plano S encierra a un cero y un polo de la función, el contorno en el plano $F(s)$ no encierra al origen.



$$F(s) = \frac{s}{s+3}$$



Todos estos resultados son consecuencia del principio del argumento (teorema de *Cauchy*).

Teorema de la representación

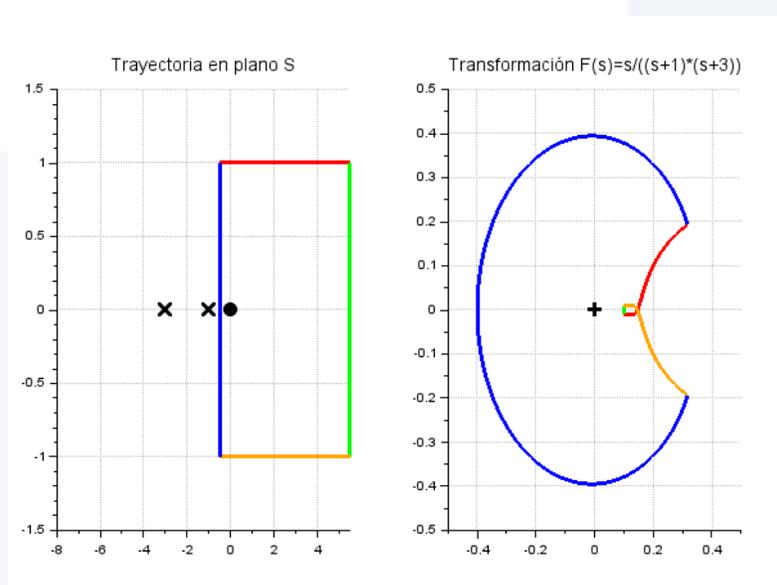
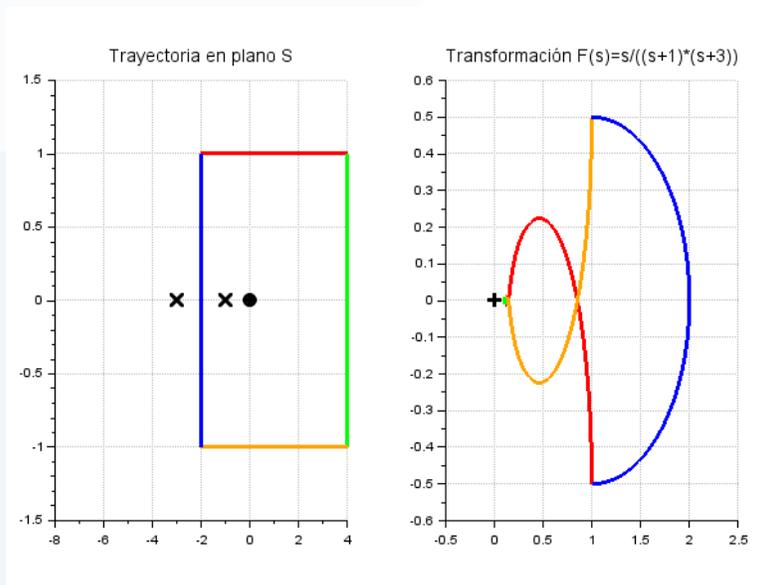
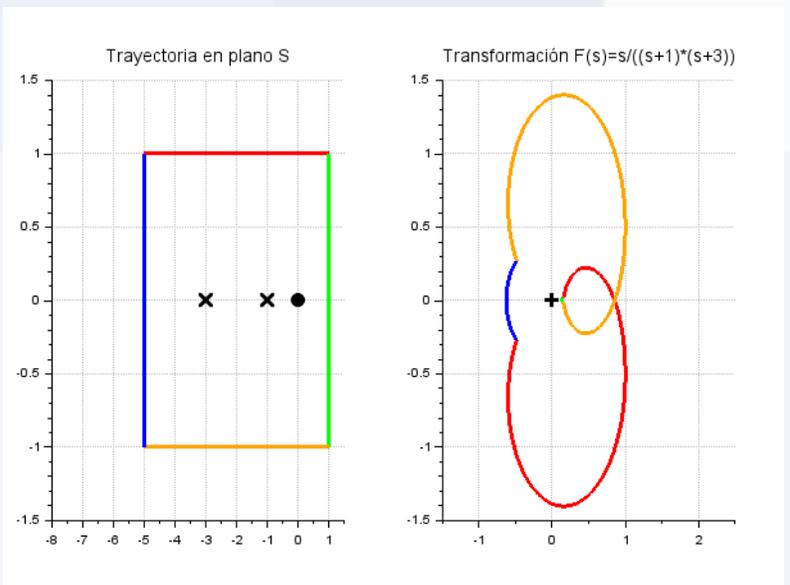
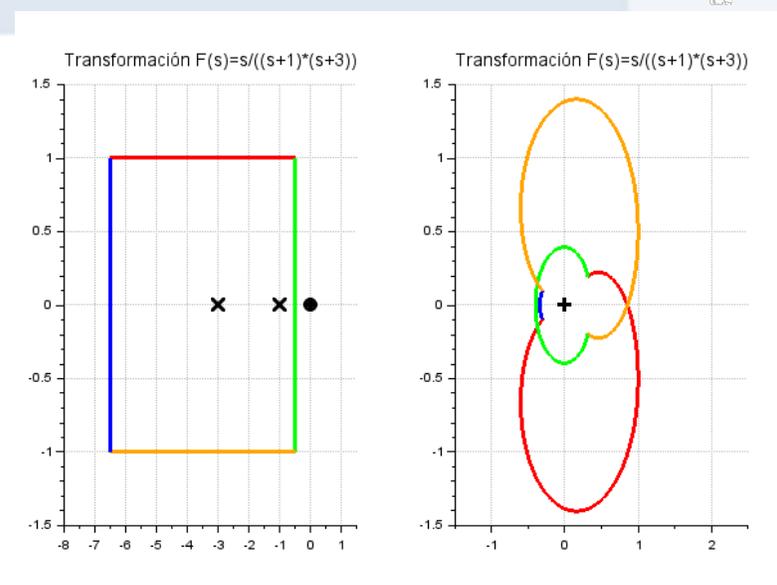
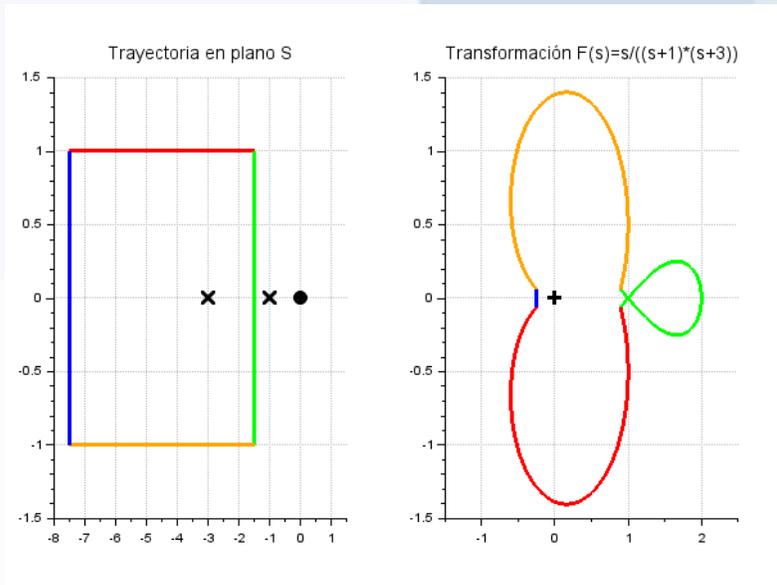
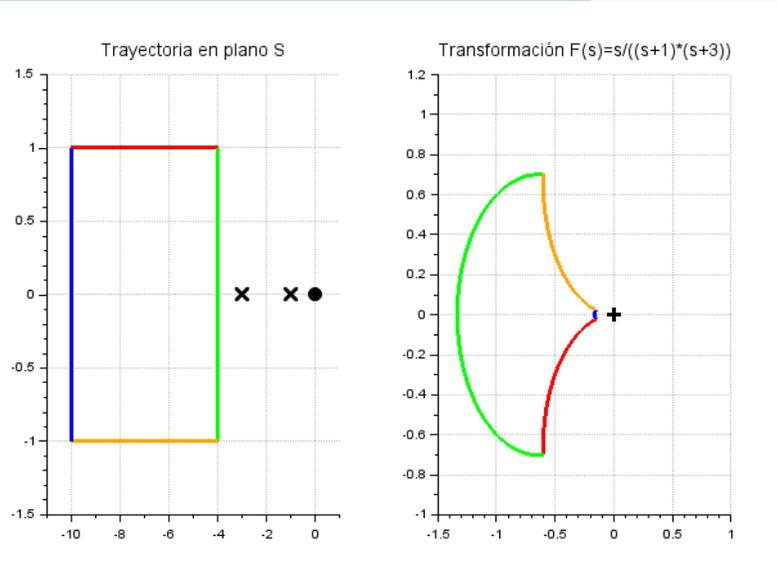
Sea $F(s)$ un cociente entre dos polinomios en s . Sea P el número de polos y Z el número de ceros de $F(s)$ que quedan dentro de un contorno determinado del plano S , considerando inclusive la multiplicidad de polos y ceros. Sea este contorno tal que no pasa por ningún polo ni cero de $F(s)$ (Analítica). Este contorno cerrado en el plano S se transforma en una curva cerrada en el plano $F(s)$. A medida que un punto representativo recorre el contorno completo en el plano S en sentido horario, se producen un total de N rodeos en torno del origen en el plano $F(s)$, ese número N es igual a $Z - P$. (Nótese que con este teorema de la representación no se puede hallar la cantidad de polos y ceros, sino su diferencia.)

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS



$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS



La función $F(s)$ se puede factorizar de la forma:

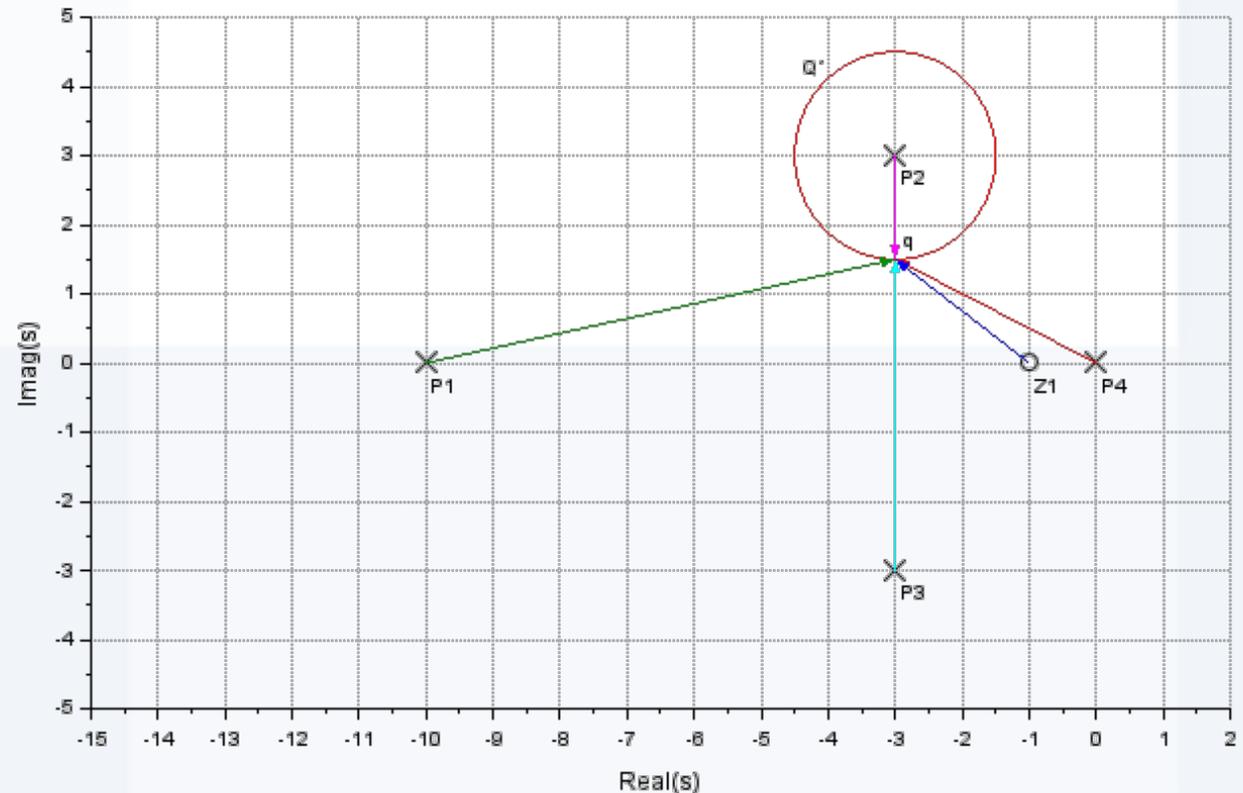
$$F(s) = \frac{(s - Z_1)(s - Z_2)\dots(s - Z_v)}{(s - P_1)(s - P_2)\dots(s - P_n)}$$

El valor de la función $F(s)$ para un valor $s=q$ puede calcularse trazando vectores desde cada una de las singularidades al punto q y realizando las siguientes operaciones:

$$|F(q)| = \frac{|q - Z_1||q - Z_2|\dots|q - Z_v|}{|q - P_1||q - P_2|\dots|q - P_n|} = \frac{\prod_i |q - Z_i|}{\prod_j |q - P_j|}$$

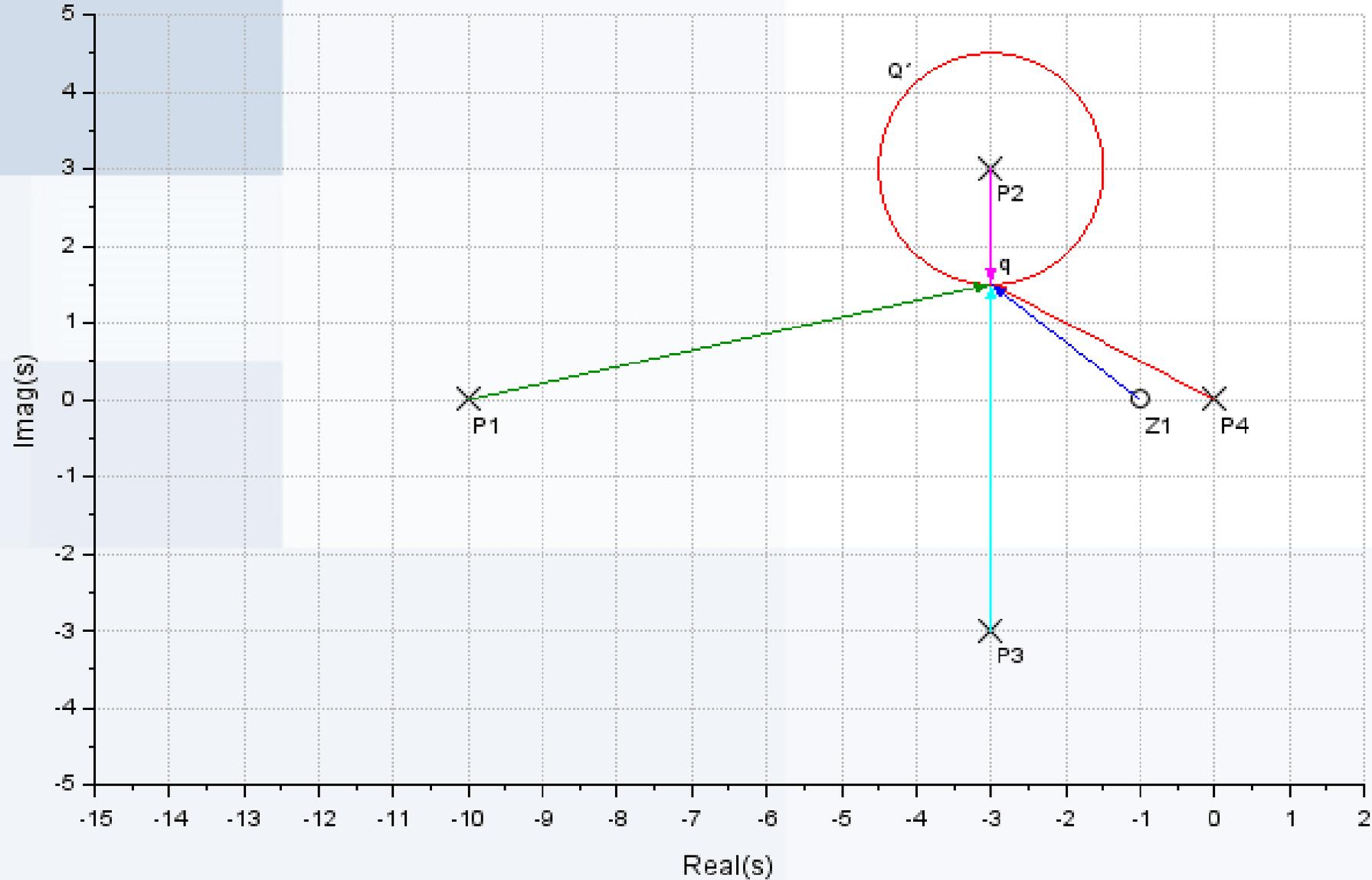
$$\arg\{F(q)\} = \sum_{i=1}^v \arg\{q - Z_i\} - \sum_{i=1}^n \arg\{q - P_i\}$$

Transformación de Variables Complejas



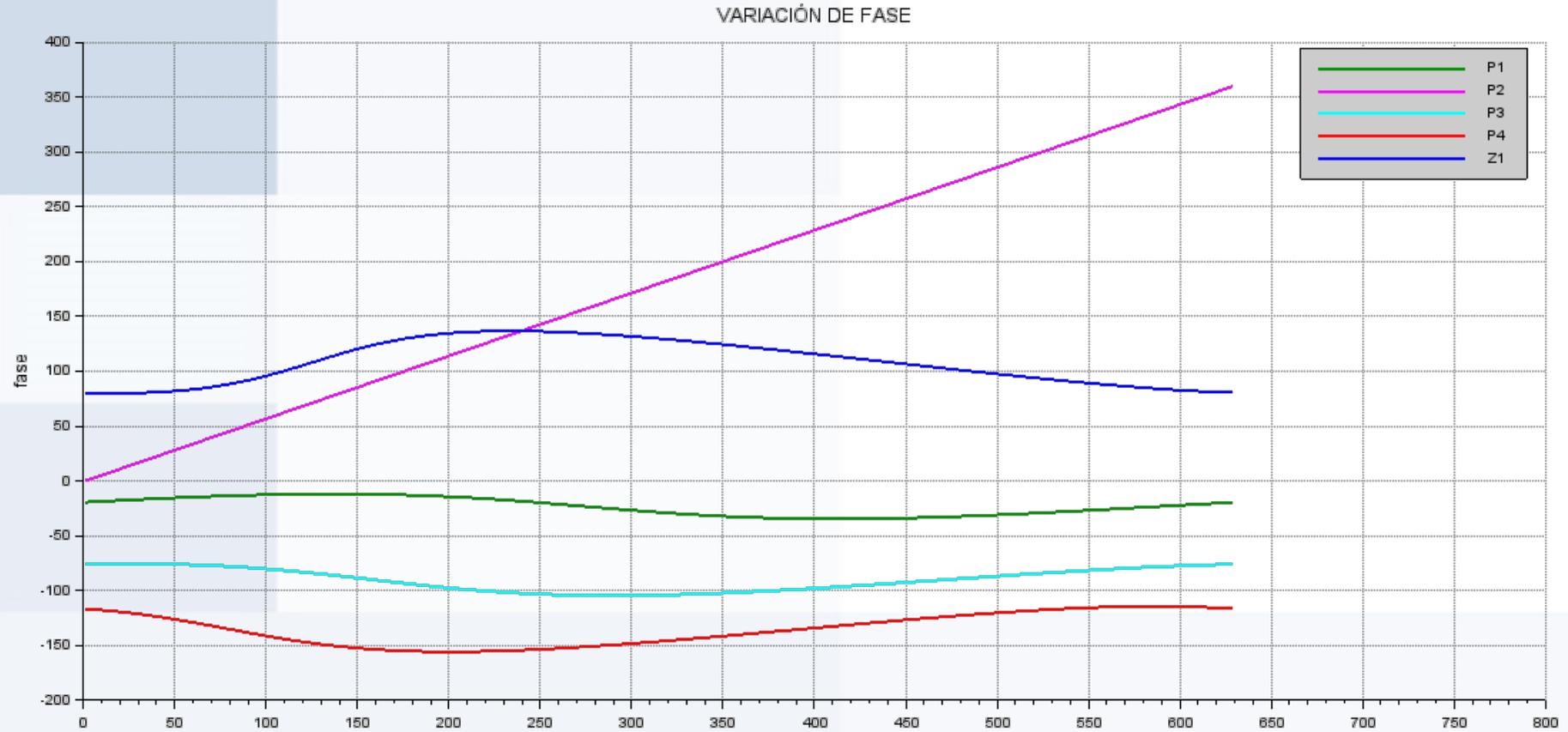


Transformación de Variables Complejas



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES COMPLEJAS

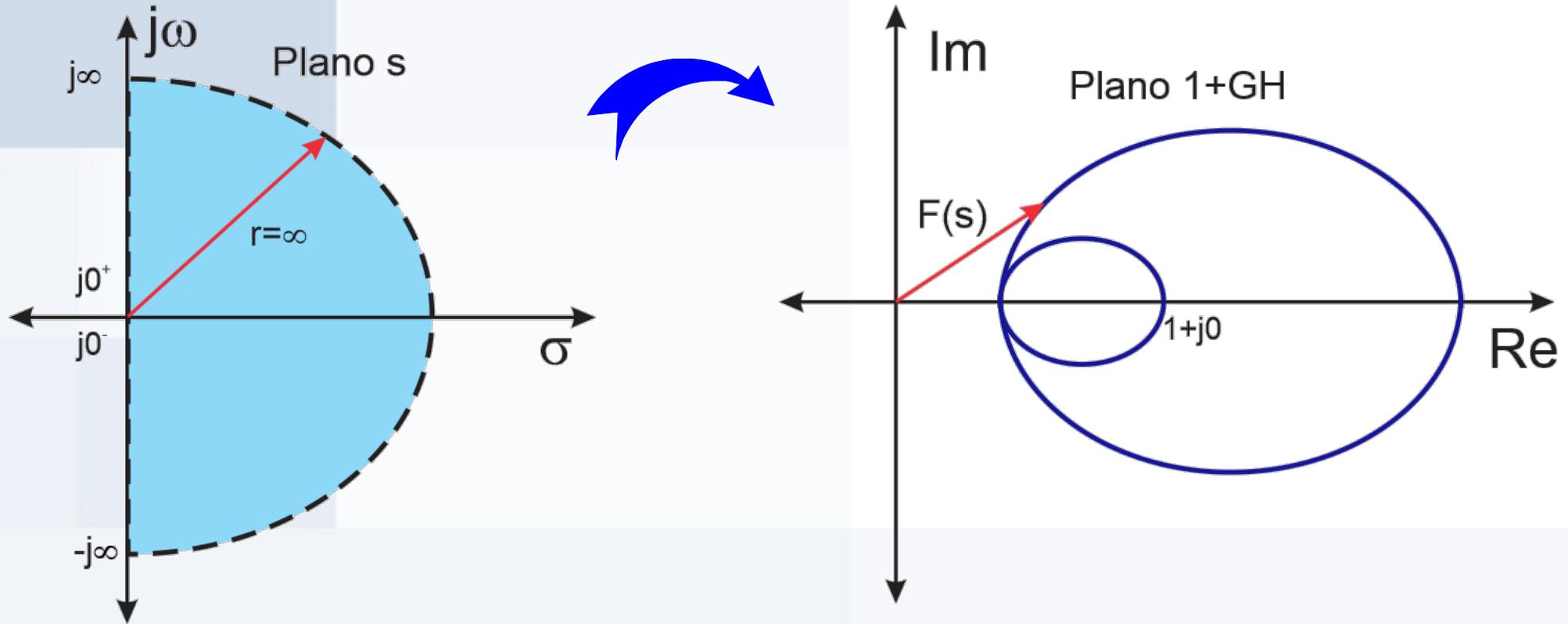


$$\Phi_{final} - \Phi_{inicial} = 2\pi N = 2\pi(Z - P)$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Si se define una trayectoria cerrada que incluya a todo el semiplano derecho,



Se puede determinar la cantidad de ceros menos polos que $F(s)=1+G(s)H(s)$ tiene en el semiplano derecho, contando los giros alrededor del origen en el plano transformado.

Sin embargo, no es fácil trabajar con la ecuación característica de lazo cerrado.

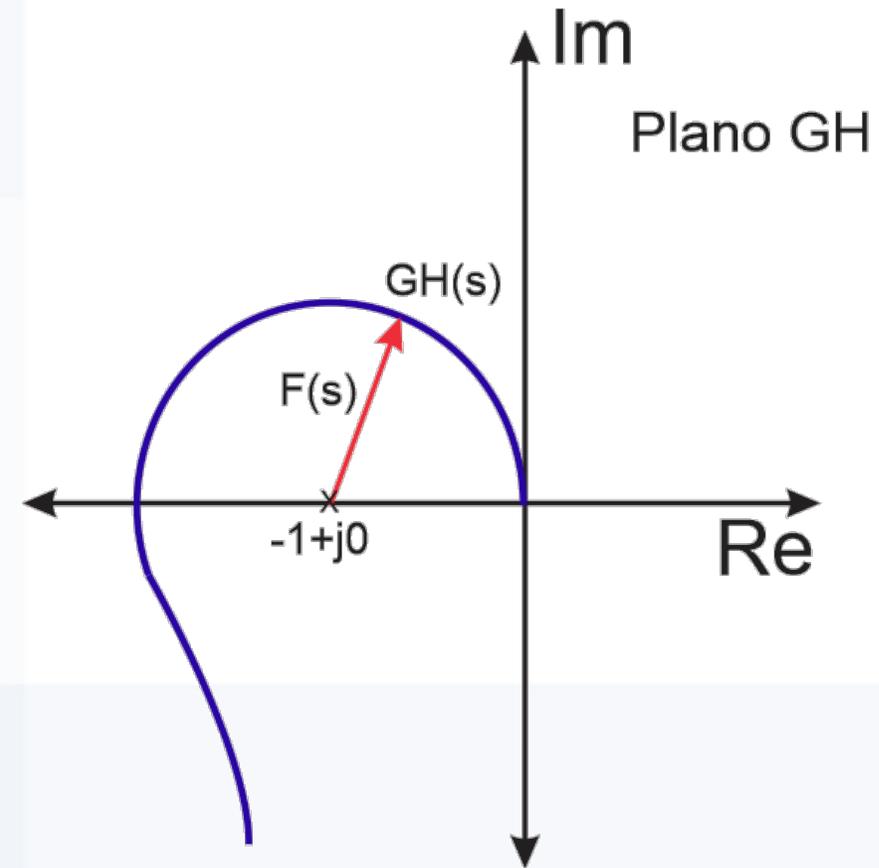
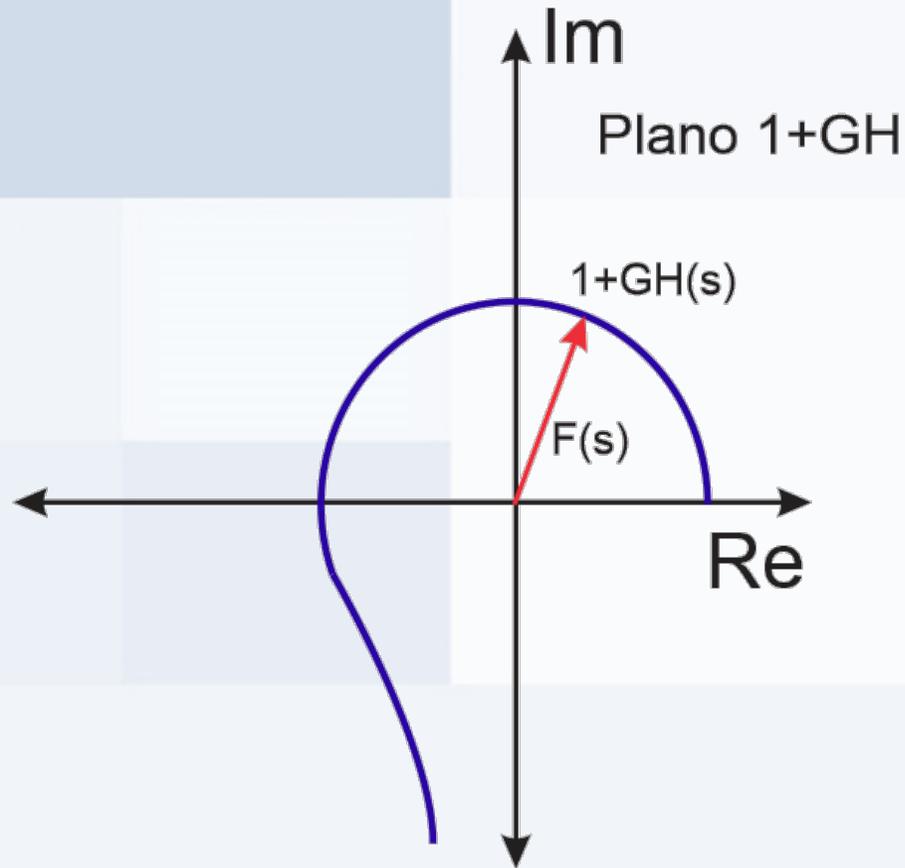


ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST



Se puede analizar el número de giros con la gráfica de $GH(s)$ en vez de usar $1+GH(s)$ trasladando el punto de origen a $-1+j0$



Por lo tanto, se puede determinar la cantidad de ceros menos polos que $F(s)=1+G(s)H(s)$ tiene en el semiplano derecho, dibujando la transformación $G(s)H(s)$ y contando los giros alrededor del punto $-1+j0$.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST



$$N = Z - P$$

N = N° de giros de $G(s)H(s)$ alrededor de $(-1+j0)$

Z = N° de ceros de $1+G(s)H(s)$ en el semiplano derecho

P = N° de polos de $1+G(s)H(s)$ en el semiplano derecho

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$1 + G(s)H(s) = \frac{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}$$

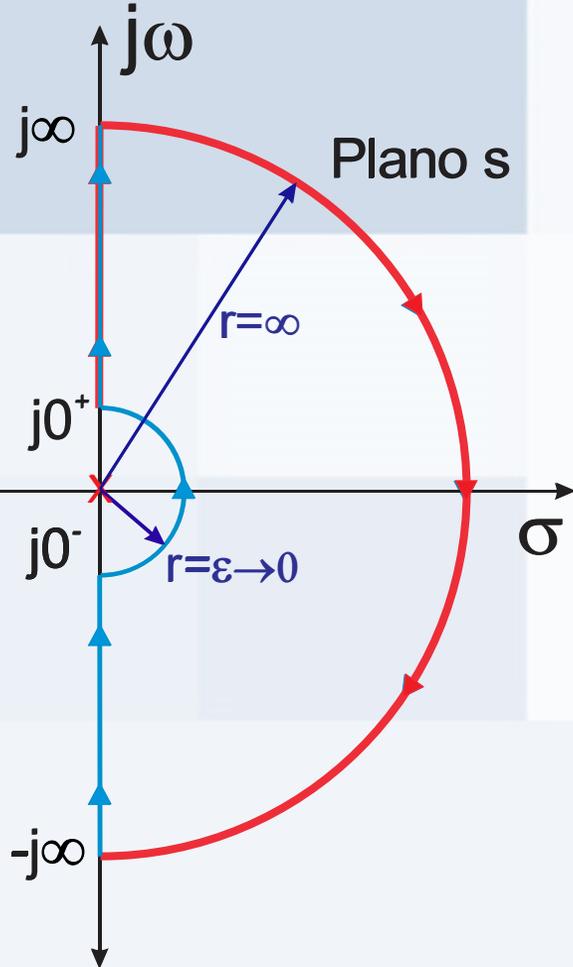
P = N° de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST



Análisis del contorno Q



Entre $j0+$ y $j+\infty$ se analiza de la misma forma que en los diagramas de Bode.

Entre $j+\infty$ y $j-\infty$ el módulo de s es infinito y la fase θ varía desde $+\pi/2$ y $-\pi/2$.
Si $G(s)$ tiene mas polos que ceros:

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_z)}{s^q (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{p-q})}$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_z)}{s^q (s + p_1)(s + p_2) \dots s(0 + p_{p-q})} \approx \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{s^z}{s^p} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{(p-z)}} = 0 \quad \underline{-\theta(p-z)}$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST



Análisis del contorno Q

Entre $j0+$ y $j+\infty$ se analiza de la misma forma que en los diagramas de Bode.

Entre $j+\infty$ y $j-\infty$ el módulo de s es infinito y la fase θ varía desde $+\pi/2$ y $-\pi/2$.
Si $G(s)$ tiene mas polos que ceros:

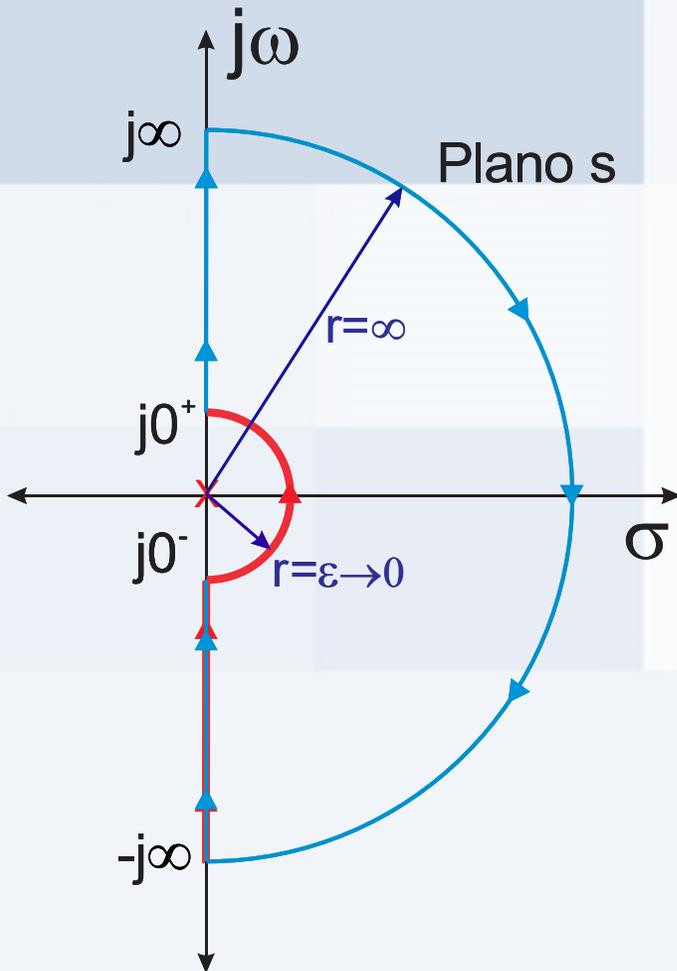
$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 0 \quad \underline{-\theta(p-z)}$$

Entre $j-\infty$ y $j0-$ se analiza de la misma forma que en los diagramas de Bode dando como resultado el conjugado del correspondiente a frecuencias positivas.

Si el sistema tiene polos en cero o sobre el eje $j\omega$, estos, se deben rodear mediante una trayectoria circular cuyo radio tiende a cero. En el caso de un polo múltiple en cero, entre $j0+$ y $j0-$.

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_z)}{s^q (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_{p-q})}$$

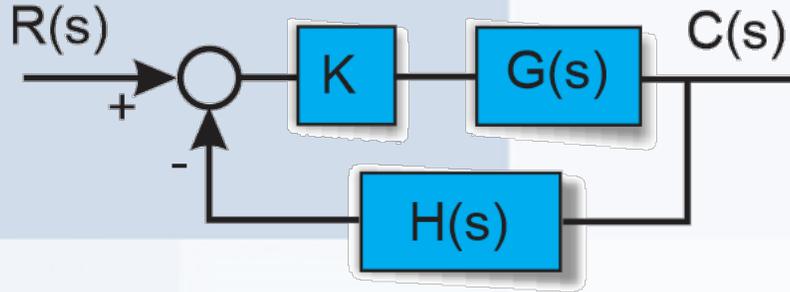
$$\lim_{|s| \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{(0 + z_1)(0 + z_2) \dots (0 + z_z)}{s^q (0 + p_1)(0 + p_2) \dots (0 + p_{p-q})} \approx \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{K}{s^q} = \infty \quad \underline{-q\theta}$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

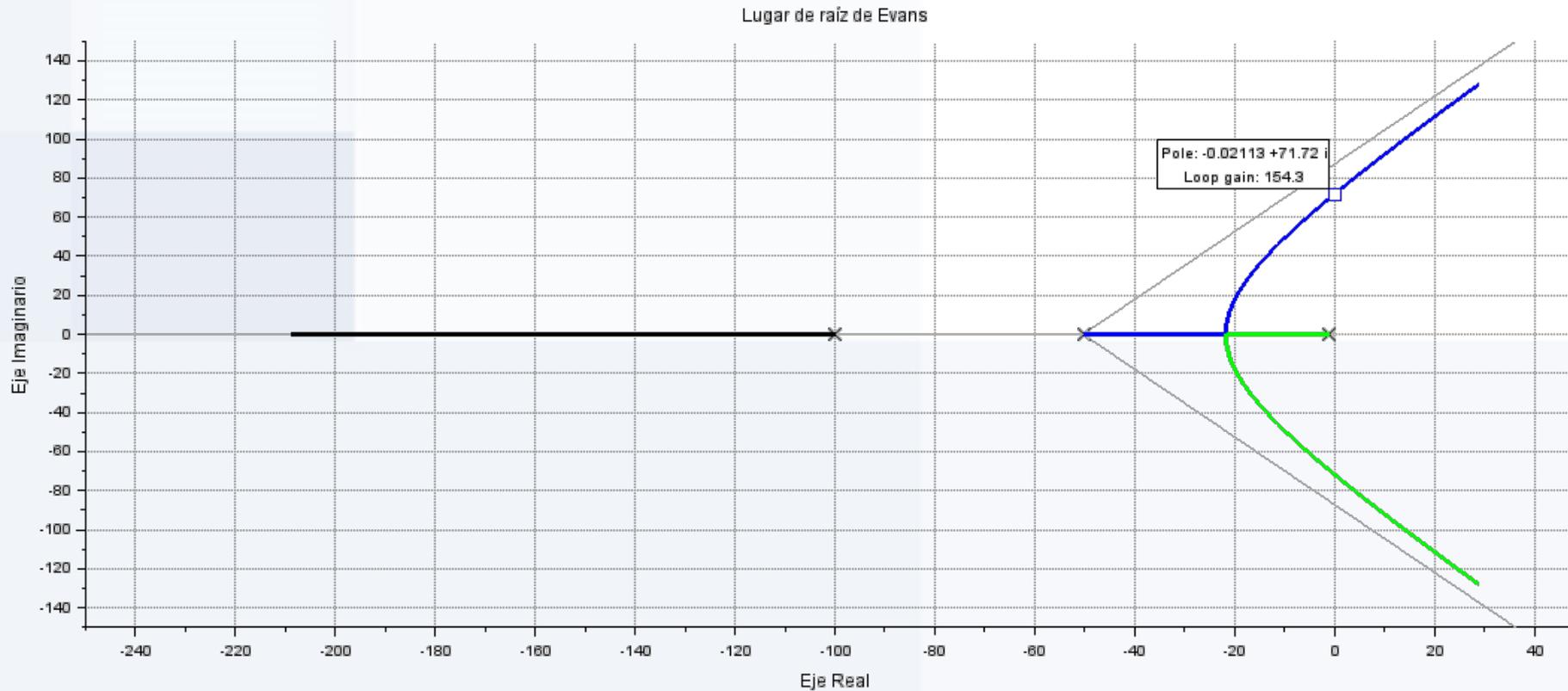


Ejemplo 1: Sistema de fase mínima



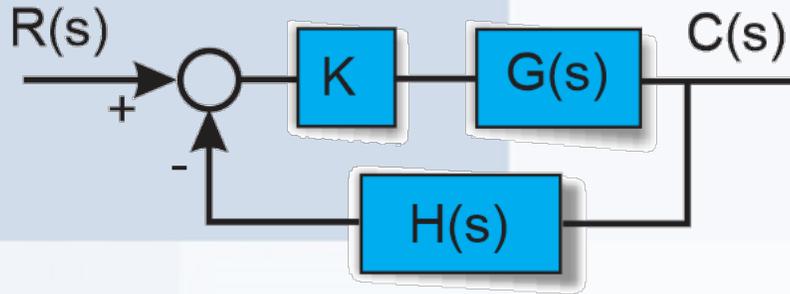
$$K \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{5000K}{(s+1)(s+50)(s+100)}$$

$$K G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{50}\right)\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}$$



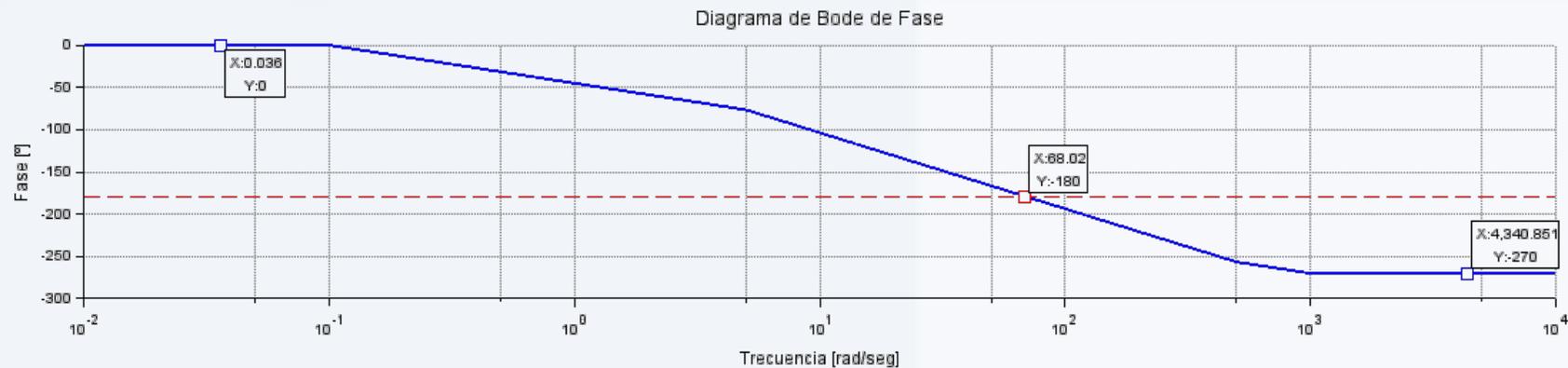
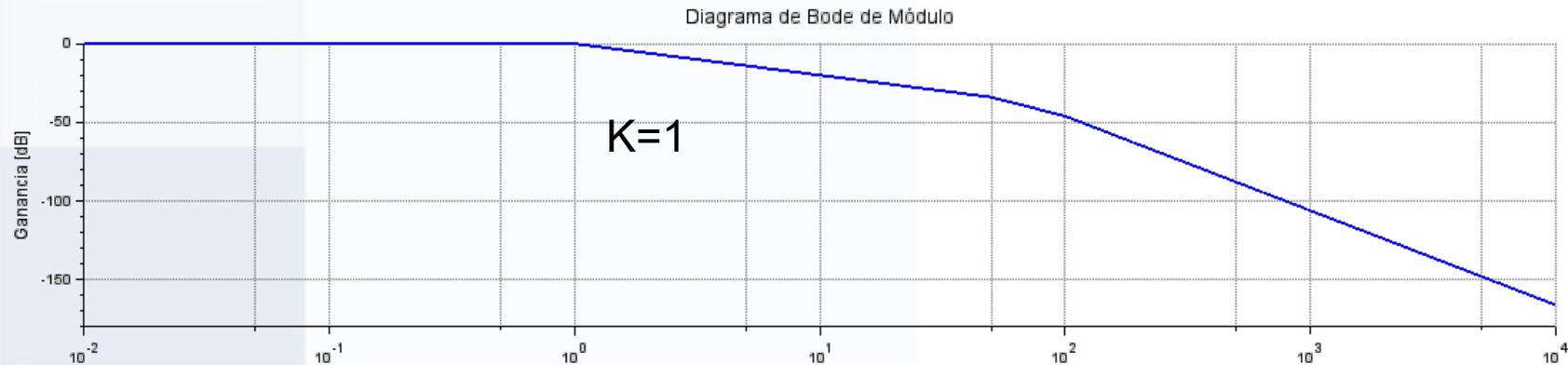
ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo 1: Sistema de fase mínima



$$K \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{5000K}{(s+1)(s+50)(s+100)}$$

$$K G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{50}\right)\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}$$

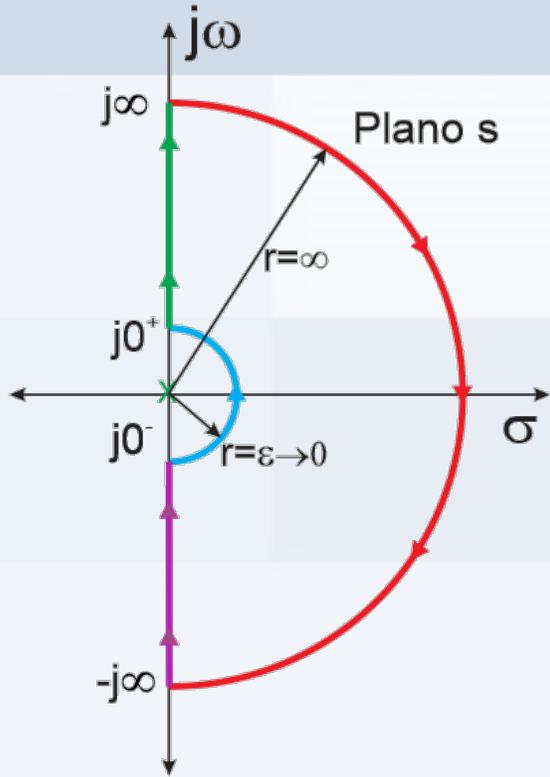


ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

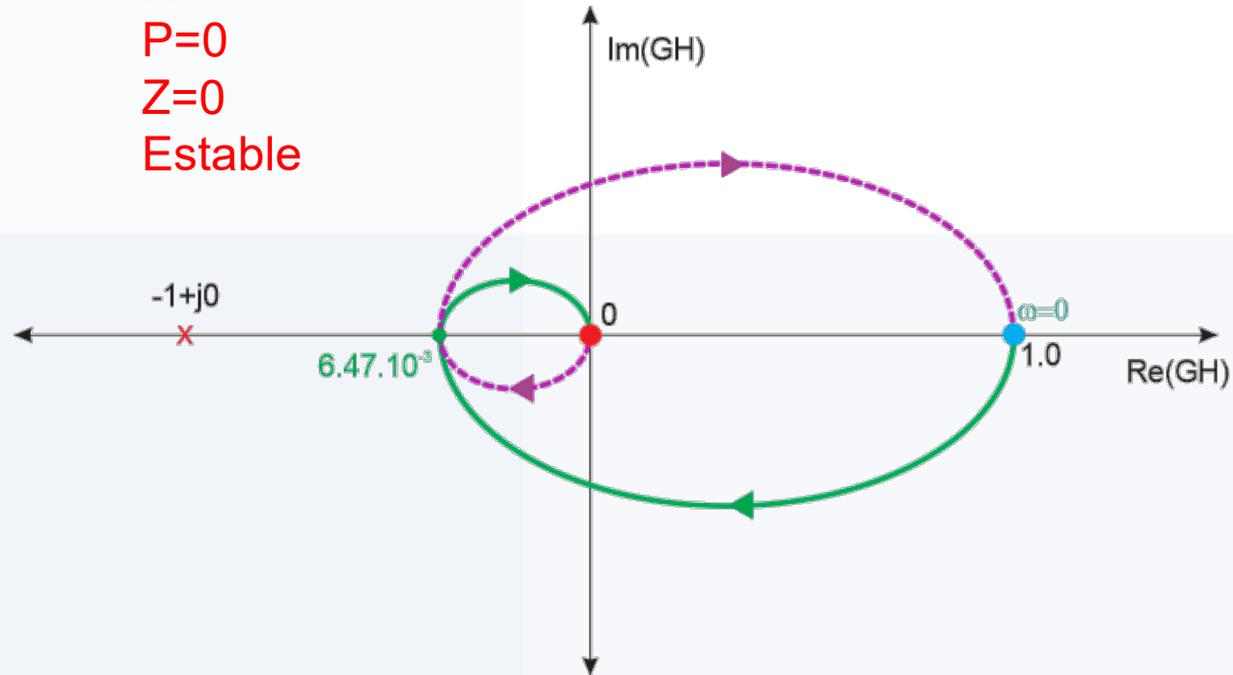
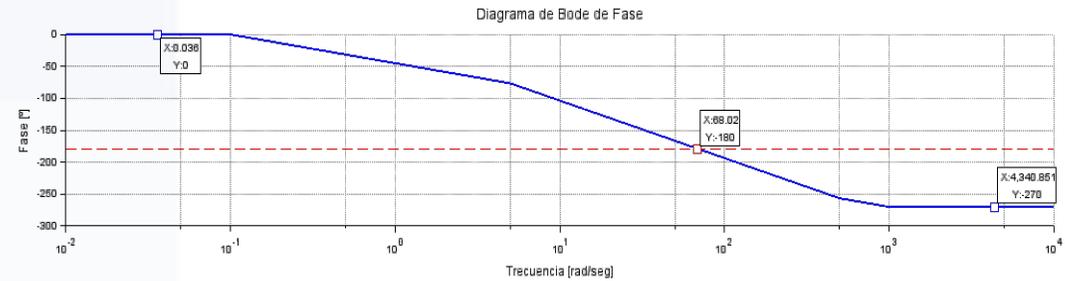
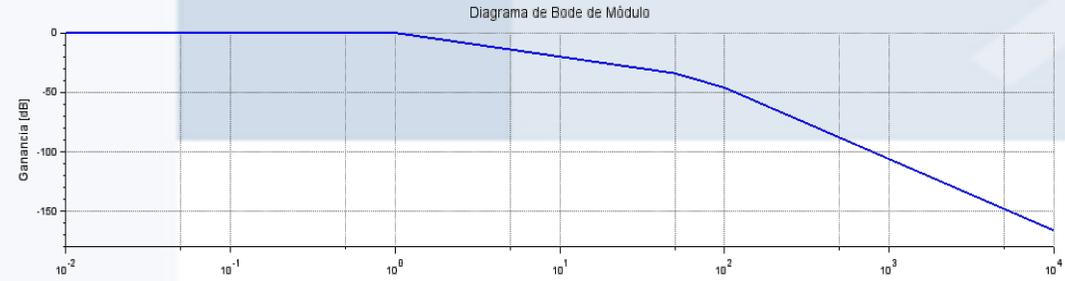


Ejemplo 1: Sistema de fase mínima

$$K G(s)H(s) = \frac{5000K}{(s+1)(s+50)(s+100)}$$



$N=0$
 $P=0$
 $Z=0$
Estable

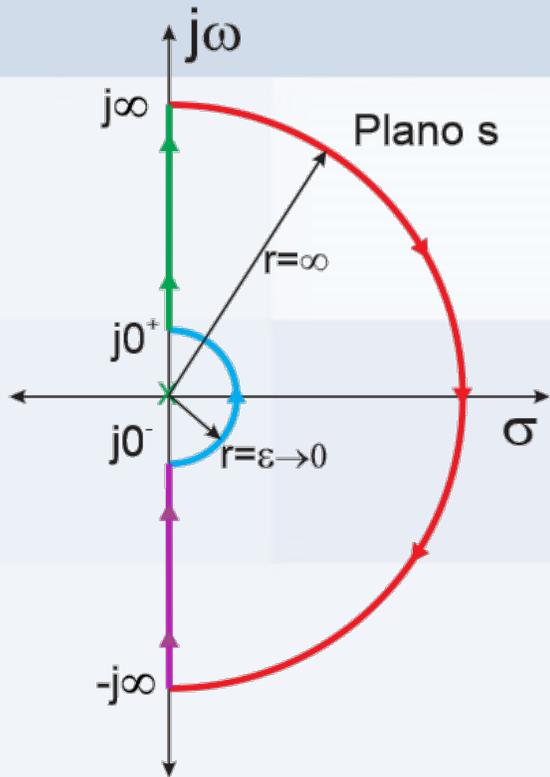


ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

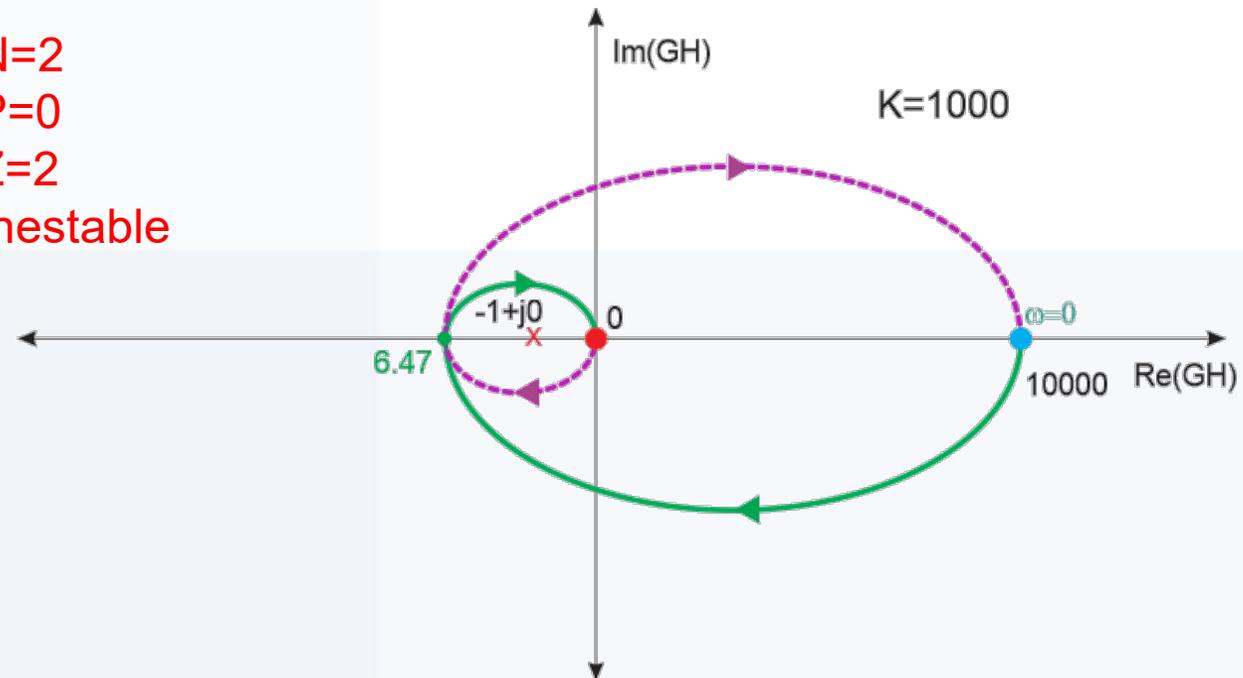
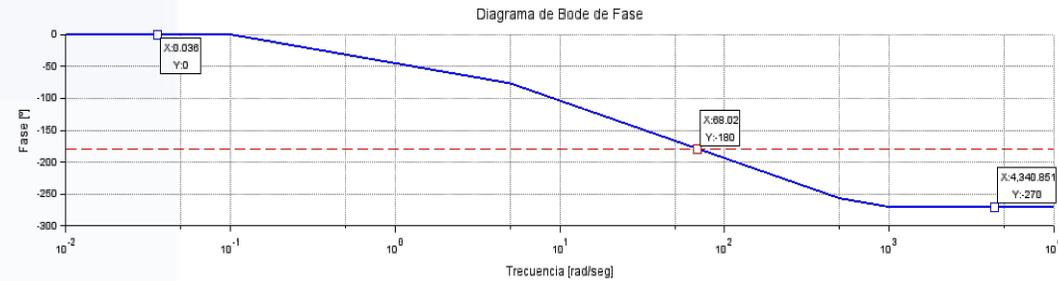
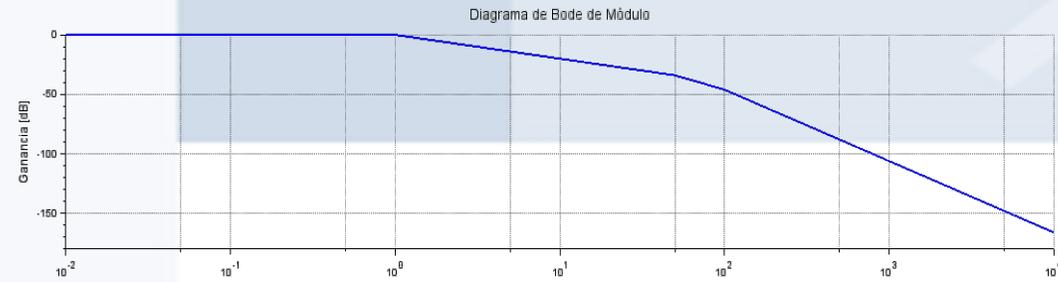


Ejemplo 1: Sistema de fase mínima

$$K G(s)H(s) = \frac{5000K}{(s+1)(s+50)(s+100)}$$



N=2
P=0
Z=2
Inestable



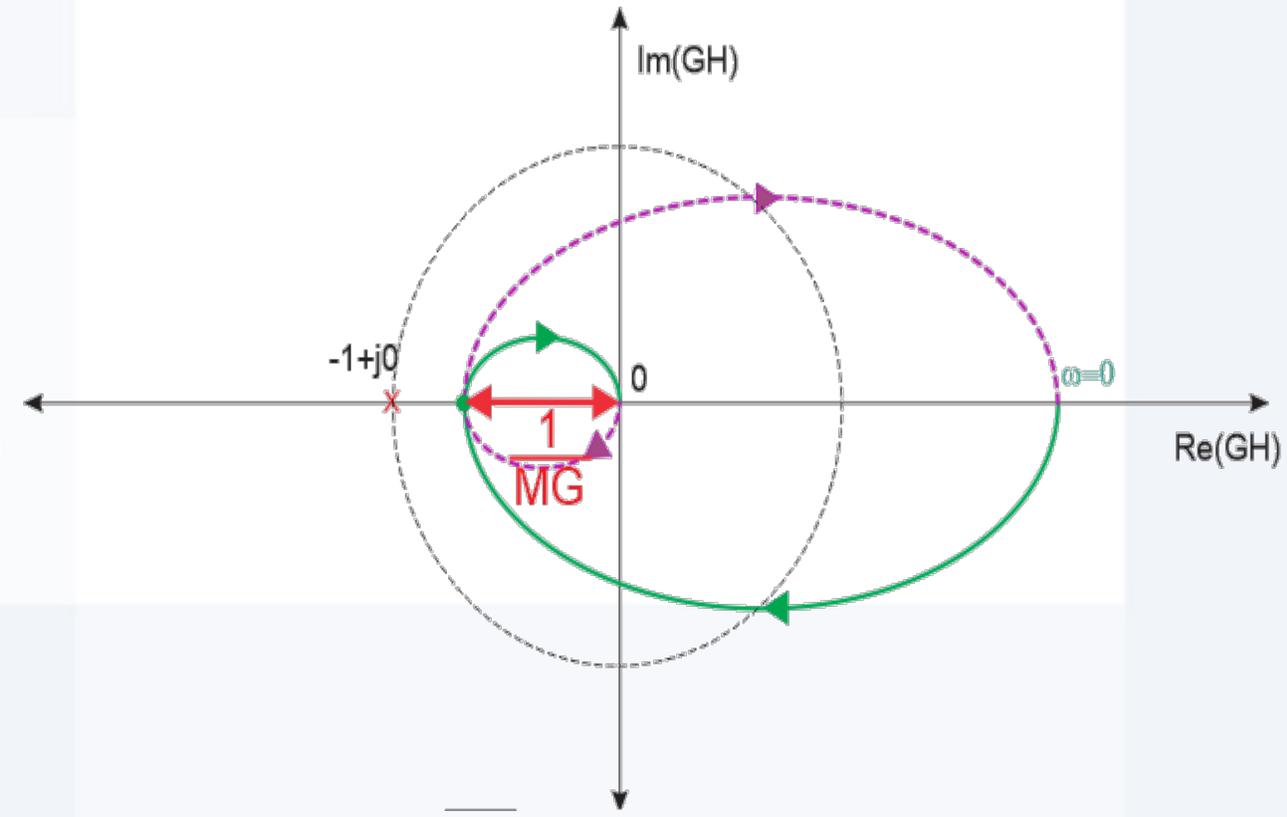
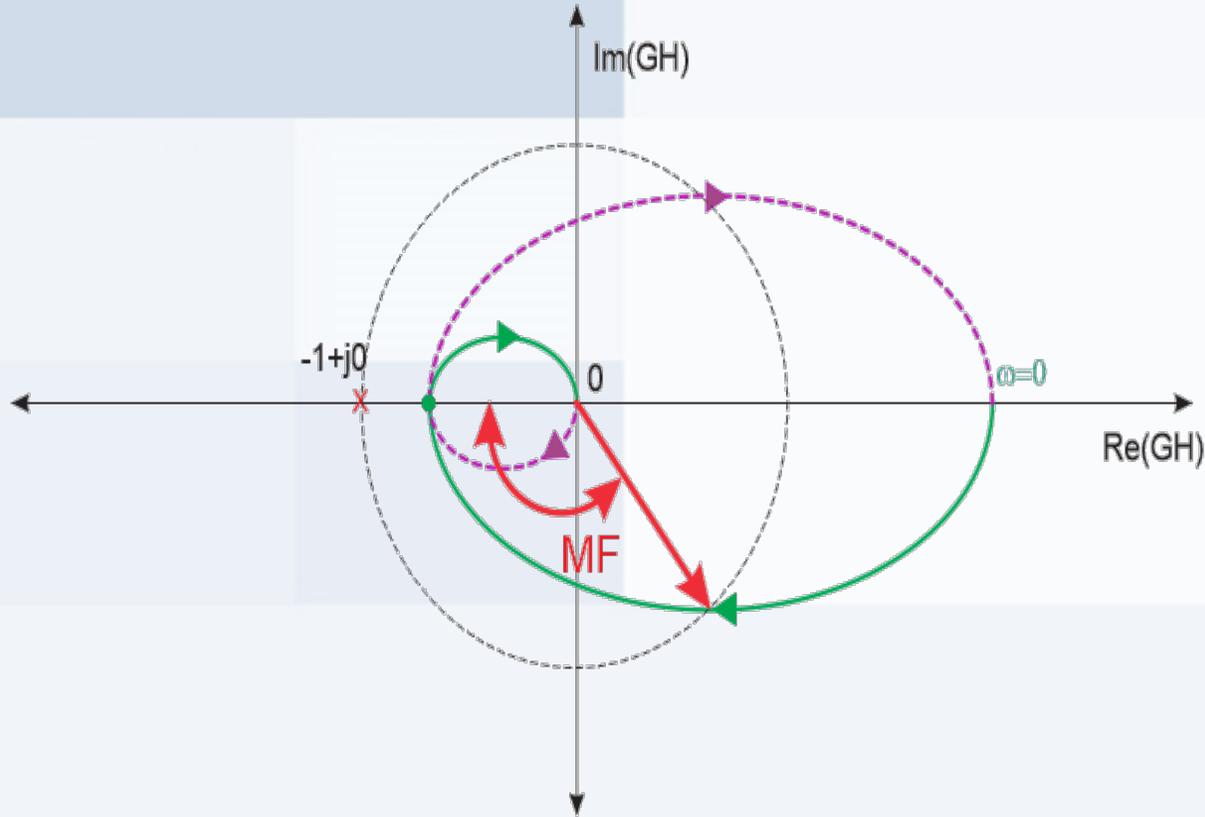
ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Ejemplo 1: Sistema de fase mínima

Margen de Fase

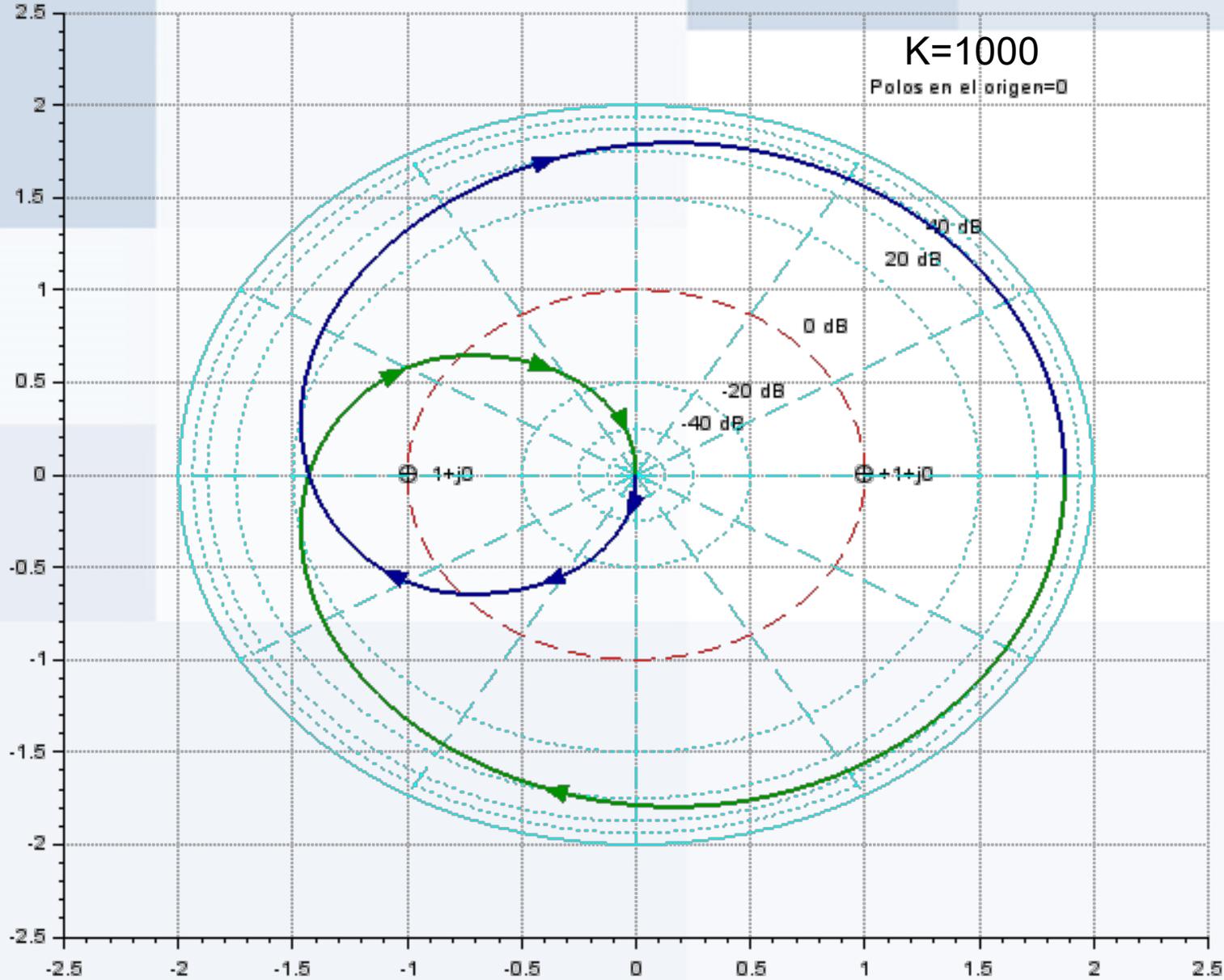
Margen de Ganancia



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

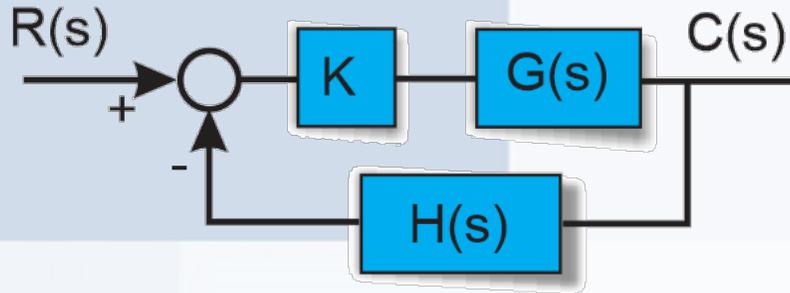
Ejemplo 1: Sistema de fase mínima

Grafico de Nyquist Logaritmico



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo 2: Sistema de fase no mínima



$$K \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{100K(s-10)}{s(s+100)}$$

$$K G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-K \left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)}{(j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)}$$

Diagrama de Bode de Módulo

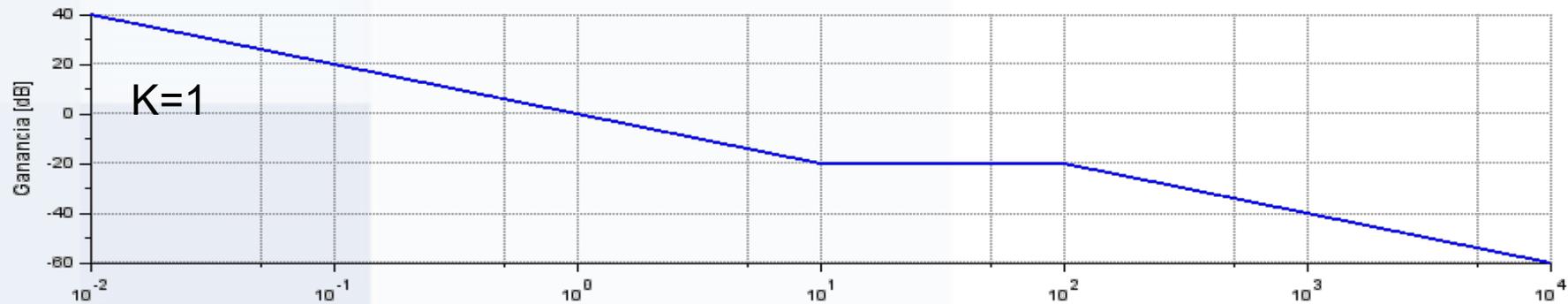
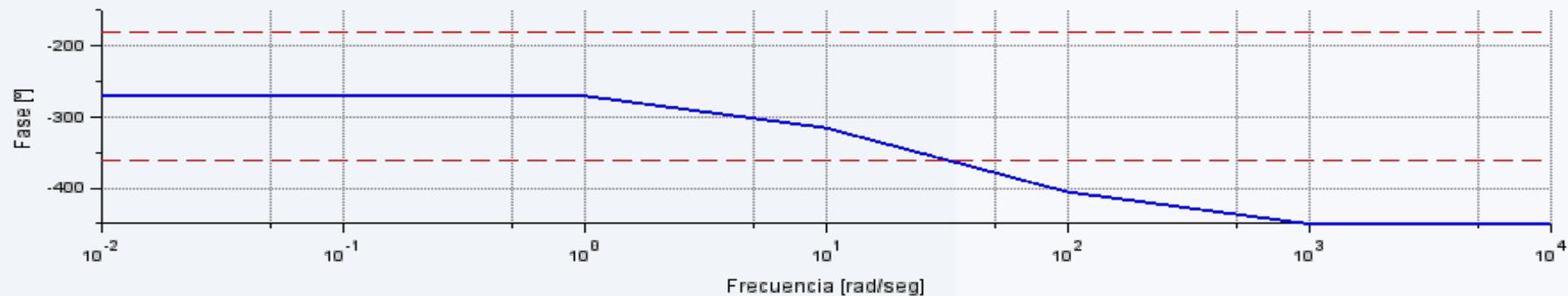


Diagrama de Bode de Fase



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Ejemplo 2: Sistema de fase no mínima

$$K \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{10K(s-10)}{s(s+100)}$$

Trayecto de Nyquist

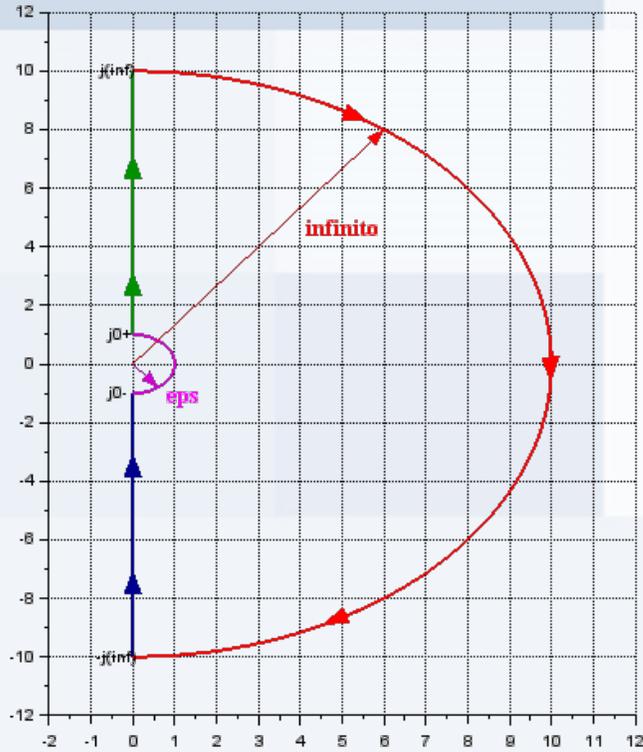
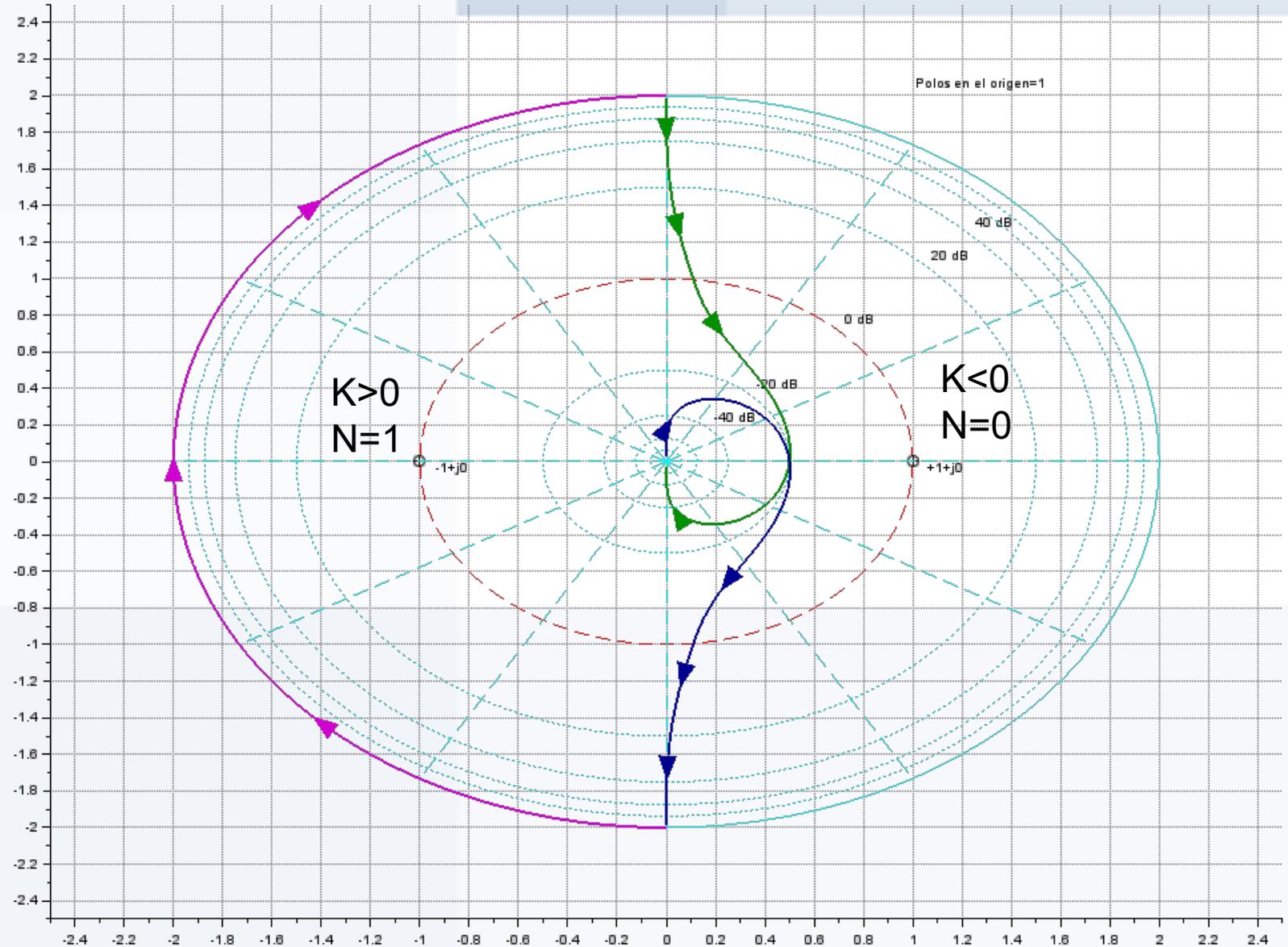


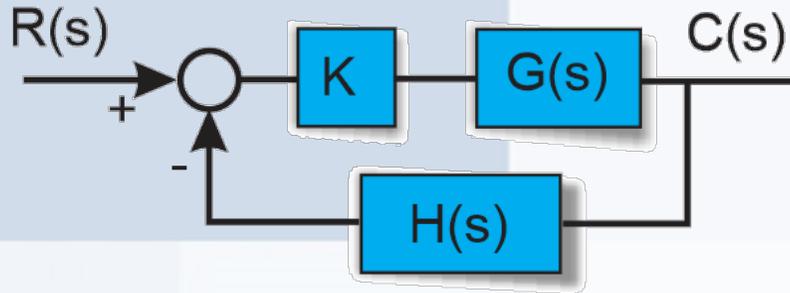
Grafico de Nyquist Logaritmico



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Ejemplo 3: Sistema de fase no mínima



$$K G(s)H(s) = \frac{10^7 K (s+10)}{s(s-1)(s+100)^2 (s+1000)}$$

$$K G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-10K \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}{(j\omega) \left(1 - \frac{j\omega}{1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)}$$

Diagrama de Bode de Módulo

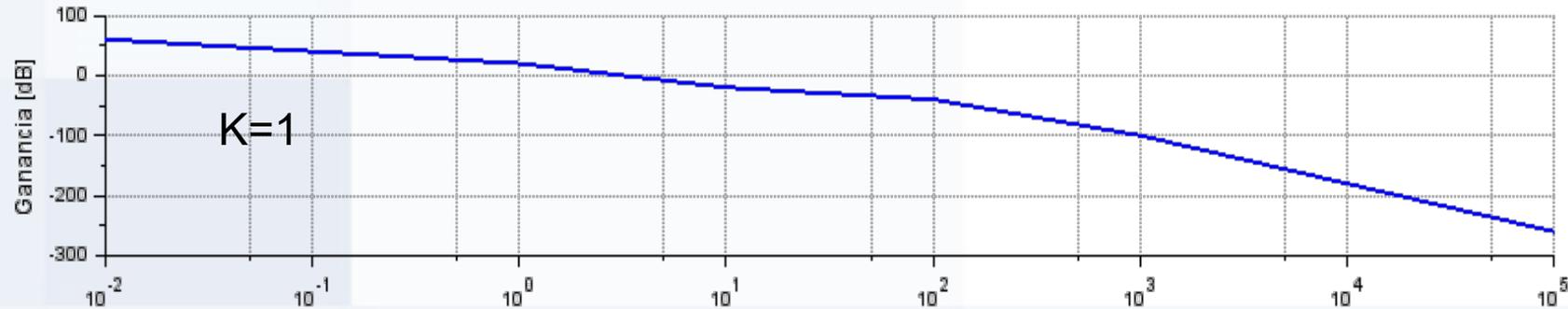
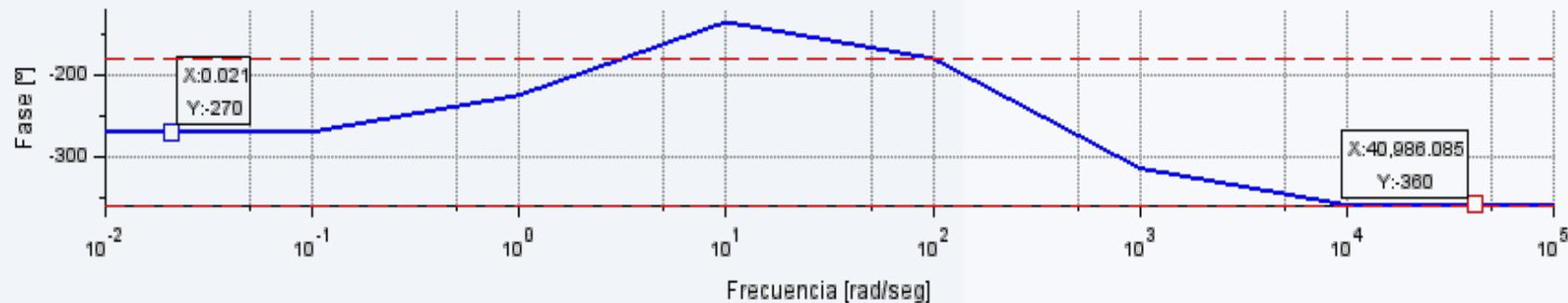


Diagrama de Bode de Fase



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo 2: Sistema de fase no mínima



$$K G(s)H(s) = \frac{10^7 K(s+10)}{s(s-1)(s+100)^2(s+1000)}$$

Trayecto de Nyquist

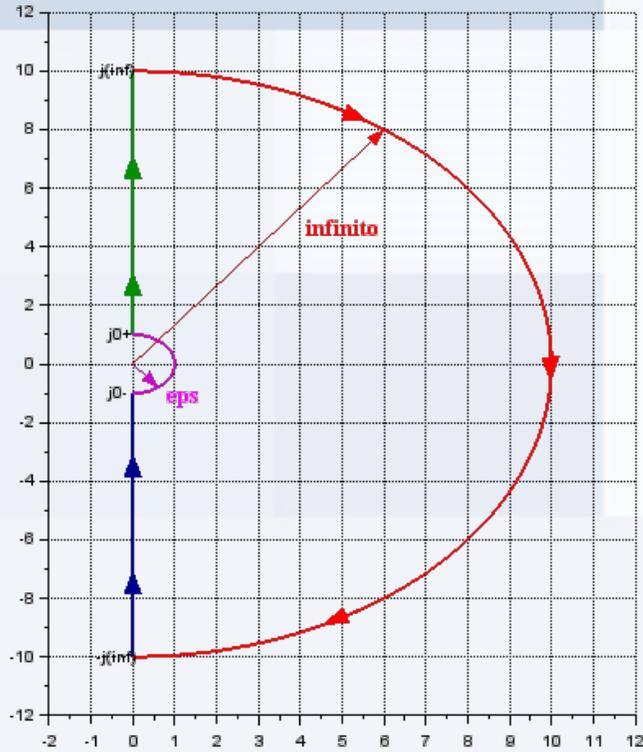
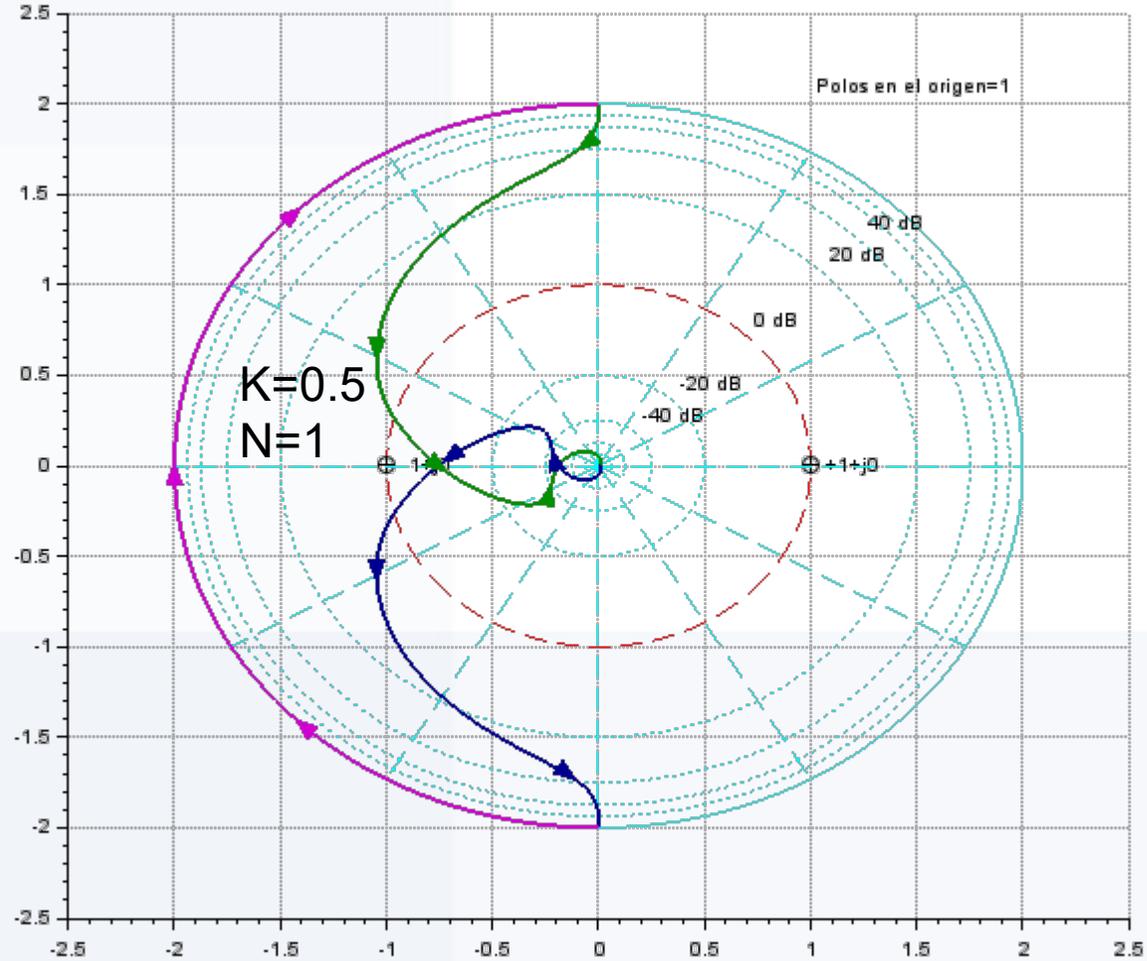


Grafico de Nyquist Logaritmico



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo 2: Sistema de fase no mínima



$$K G(s)H(s) = \frac{10^7 K(s+10)}{s(s-1)(s+100)^2(s+1000)}$$

Trayecto de Nyquist

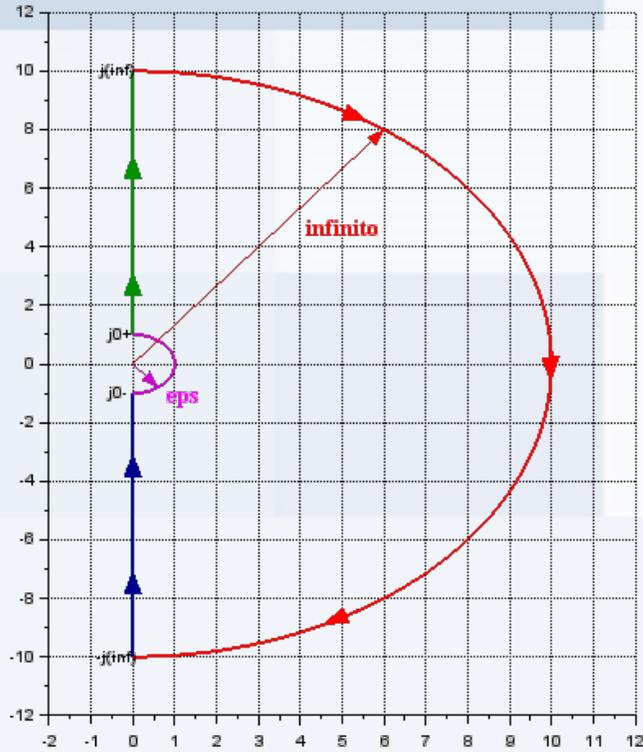
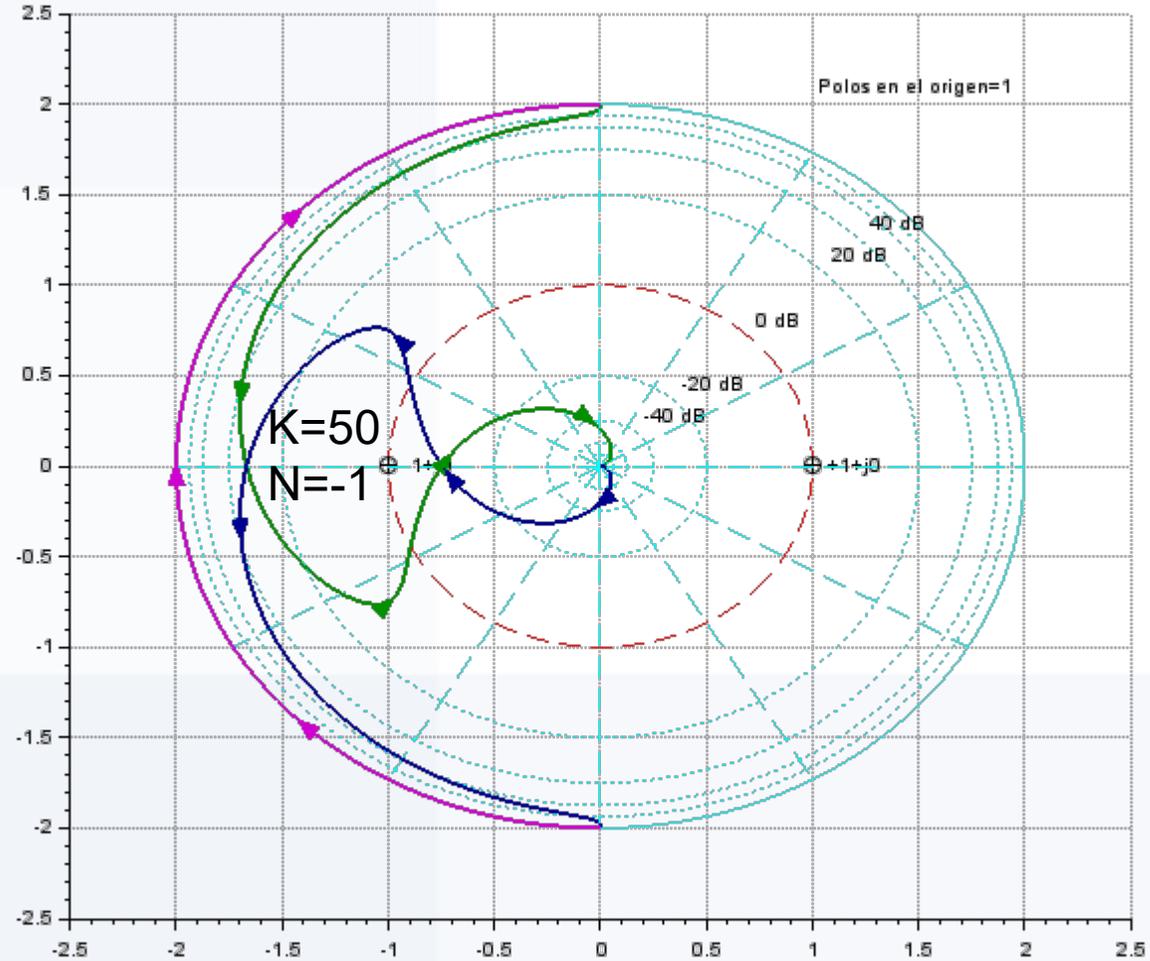


Grafico de Nyquist Logaritmico



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo 2: Sistema de fase no mínima



$$K G(s)H(s) = \frac{10^7 K(s+10)}{s(s-1)(s+100)^2(s+1000)}$$

Trayecto de Nyquist

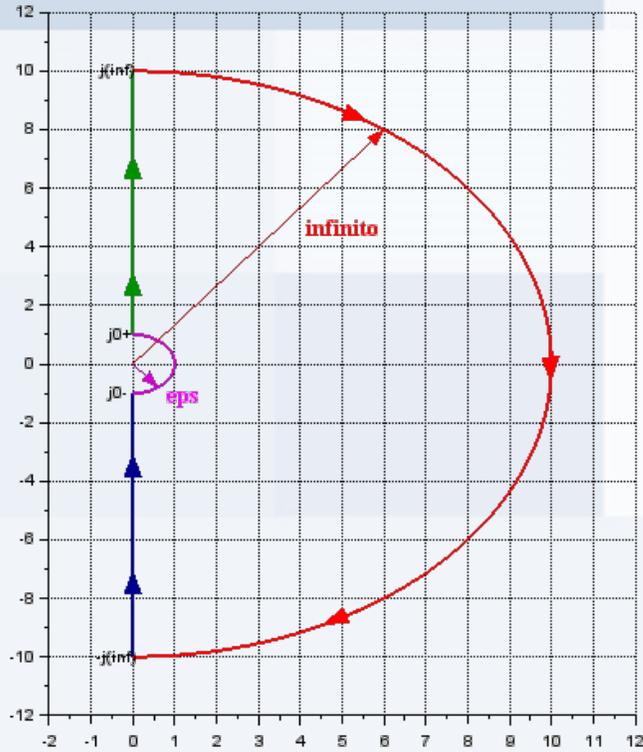
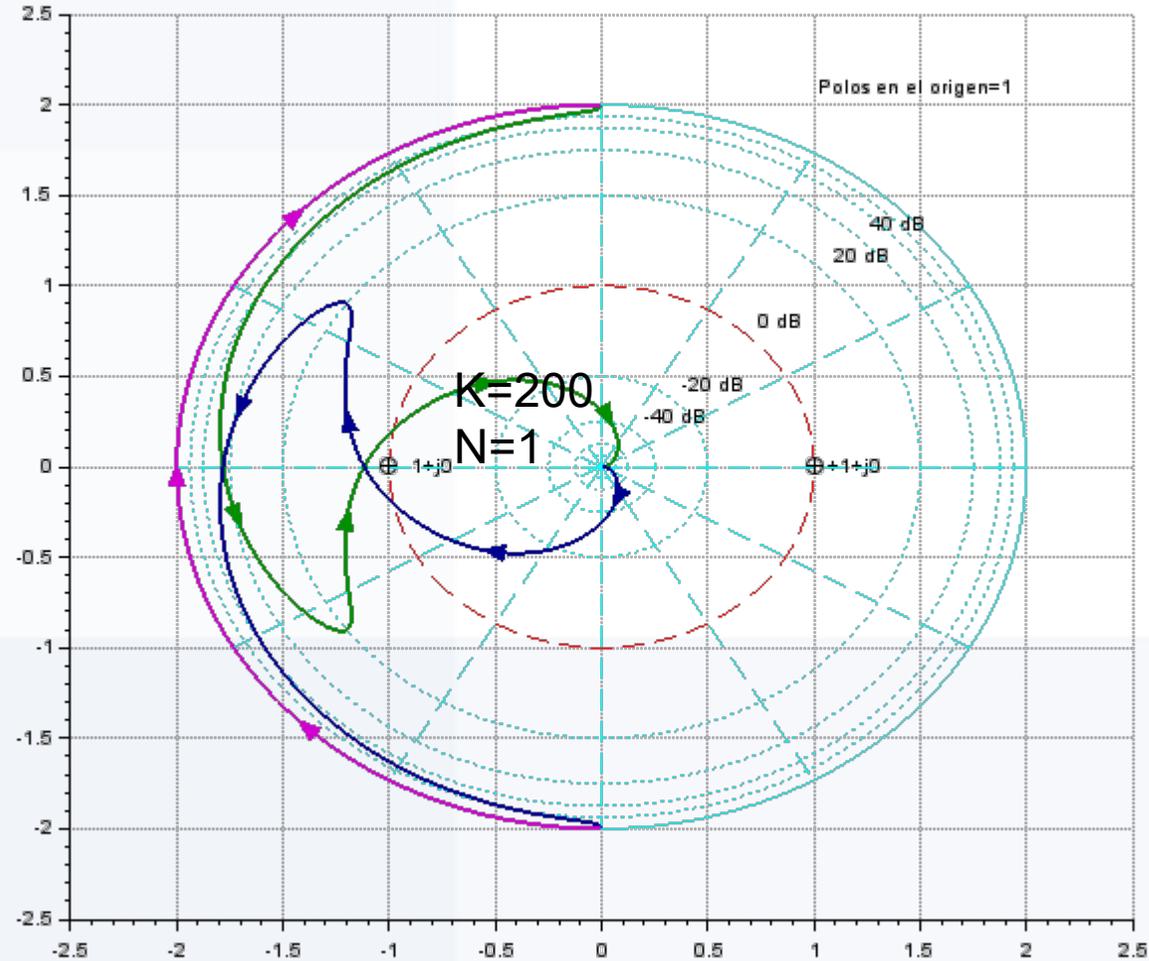


Grafico de Nyquist Logaritmico



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Ejemplo 3: Sistema de fase no mínima

Grafico de Nyquist Logarítmico

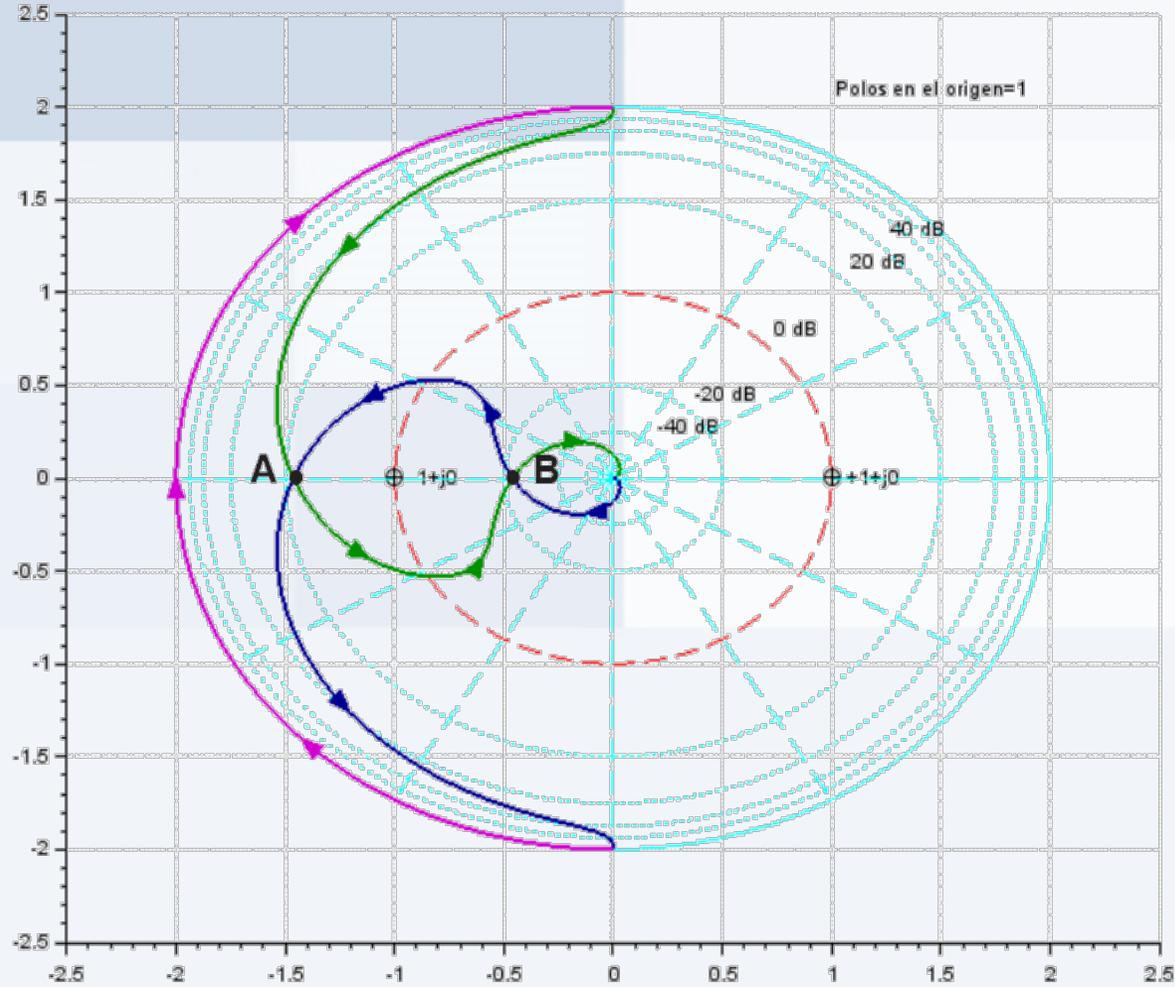


Diagrama de Bode de Módulo

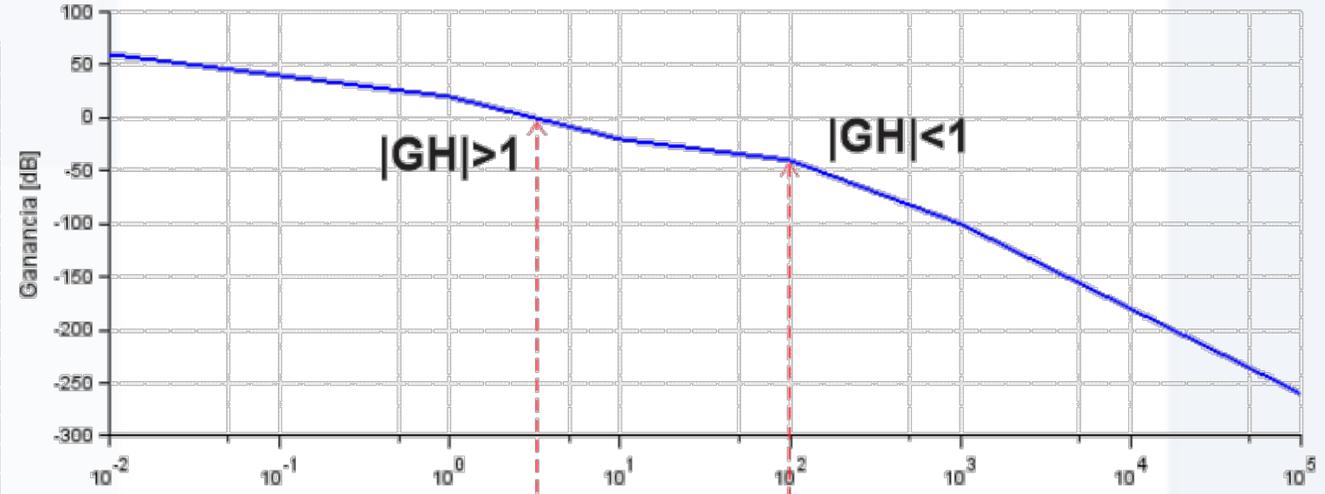
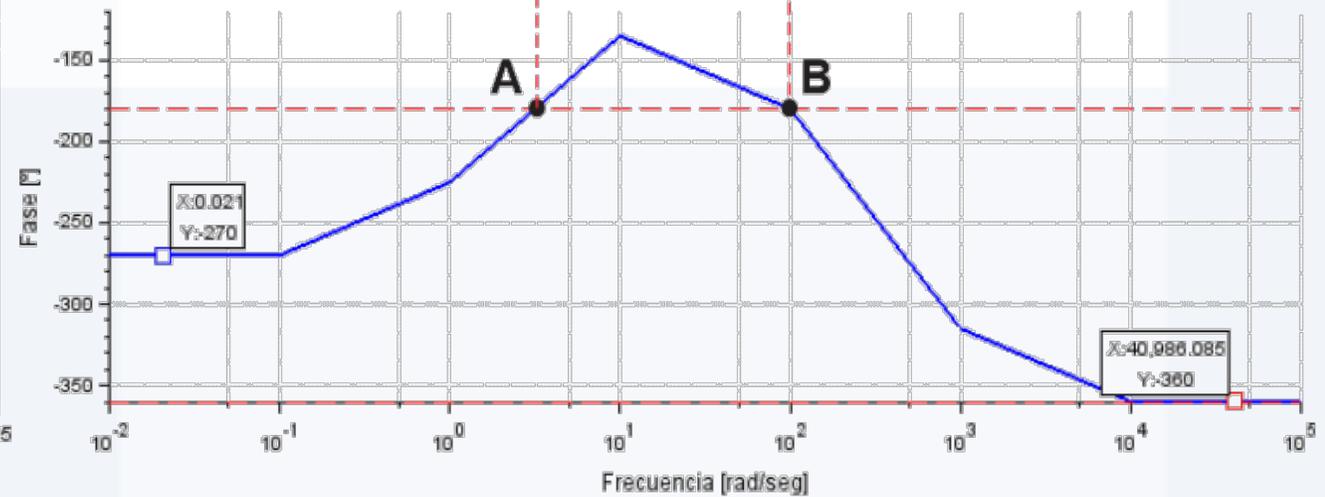


Diagrama de Bode de Fase



Estabilidad de Sistemas Realimentados

Polos sobre el eje $j\omega$





ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas de Segundo Orden

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Módulo

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \left\{ \begin{array}{l} \omega \ll \omega_n \rightarrow |F(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \omega_n \rightarrow |F(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \text{ dB} \end{array} \right.$$

Fase

$$\angle F(j\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \omega \ll \omega_n \rightarrow \angle F(j\omega) = 0 \\ \omega = \omega_n \rightarrow \angle F(j\omega) = -90 \\ \omega \gg \omega_n \rightarrow \angle F(j\omega) = -180 \end{array} \right.$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas de Segundo Orden

Con $\xi < 1$ la transferencia tiene polos complejos conjugados

Módulo Máximo

$$\frac{d|F(j\omega)|}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \right) = 0$$

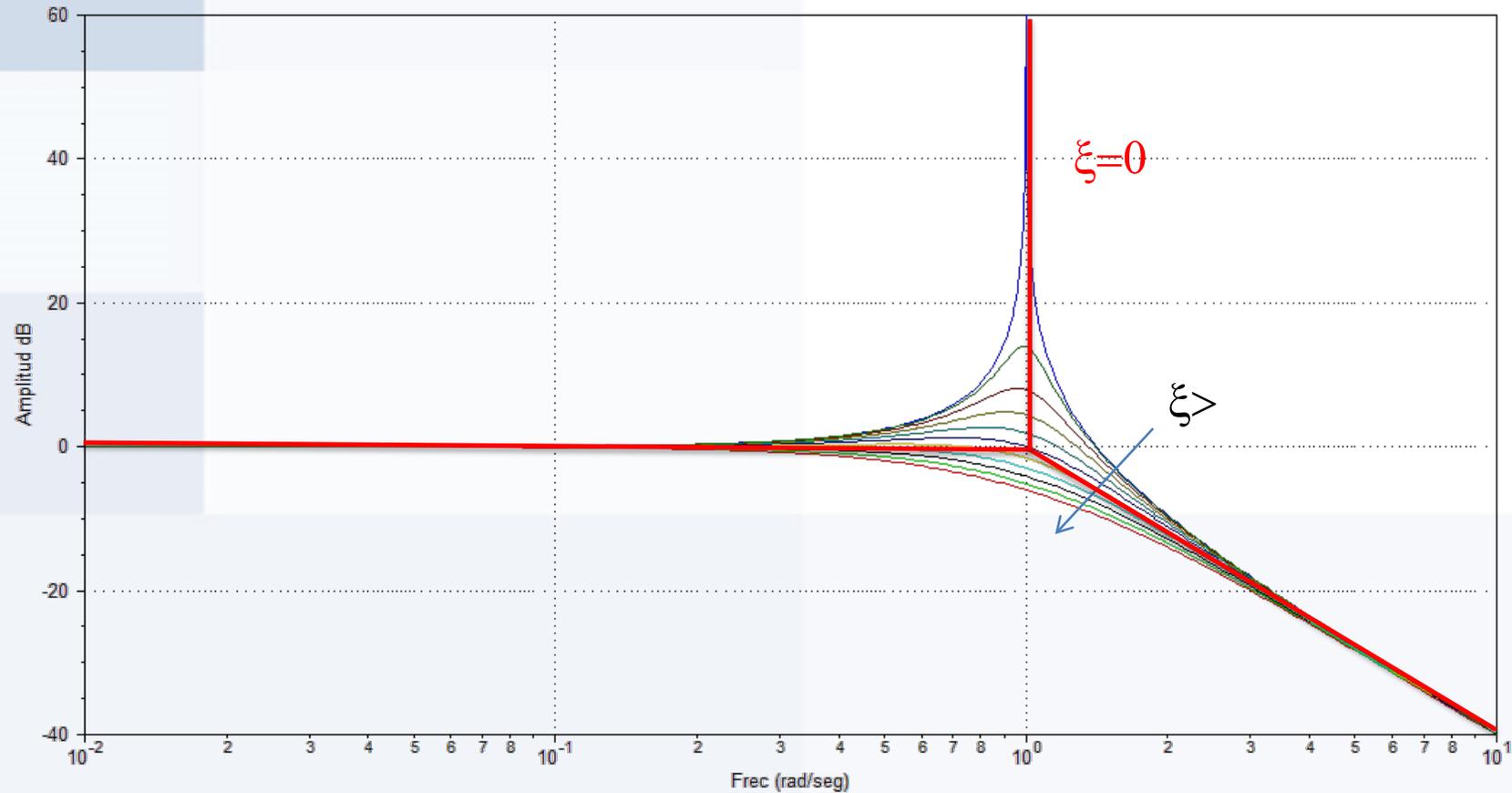
Se cumple para:
$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{cases} \text{ con } \xi < 0.707$$

El Módulo Máximo resulta:
$$M_r = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas de Segundo Orden

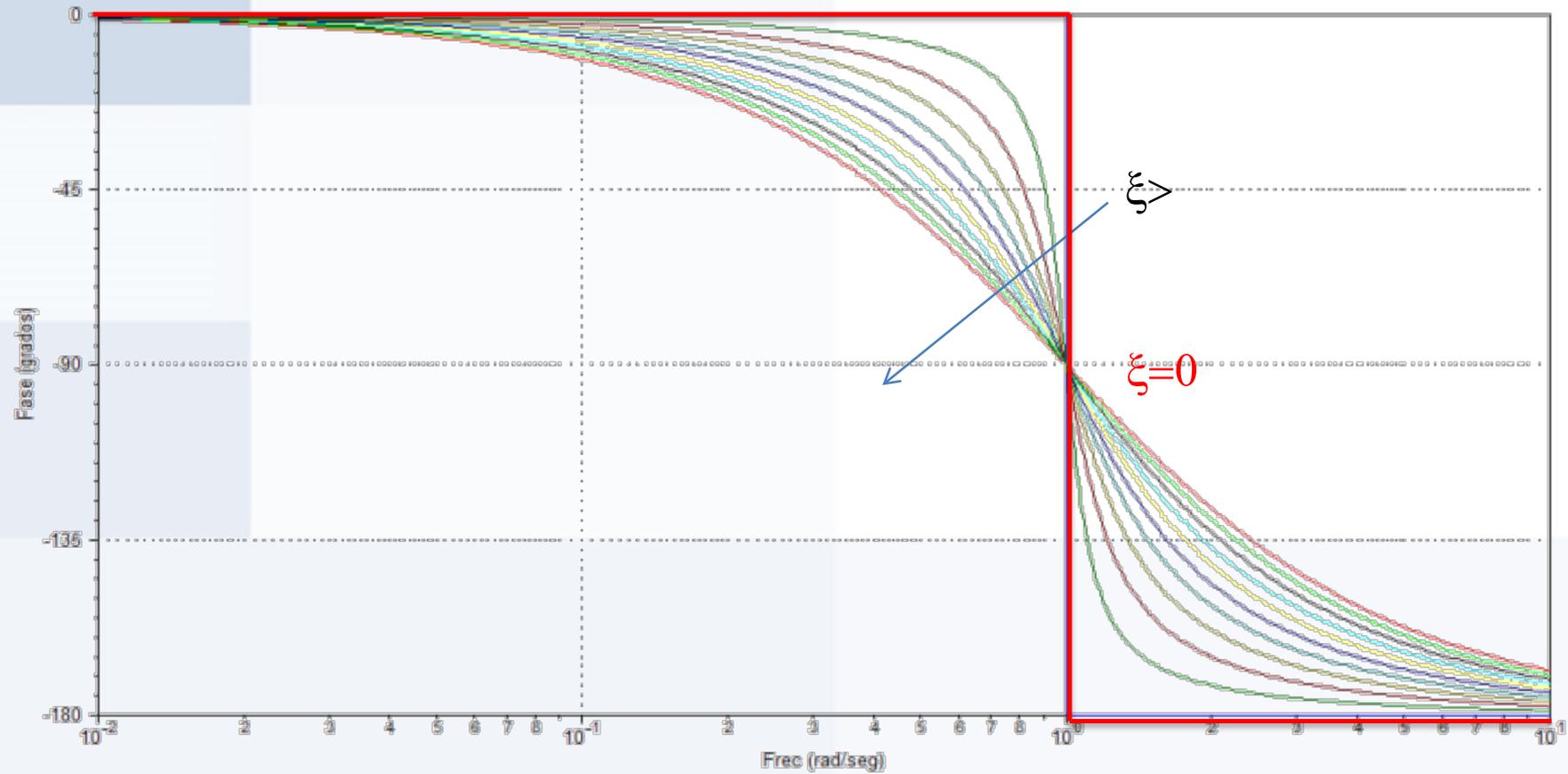
Diagrama de Bode de Amplitud



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Sistemas de Segundo Orden

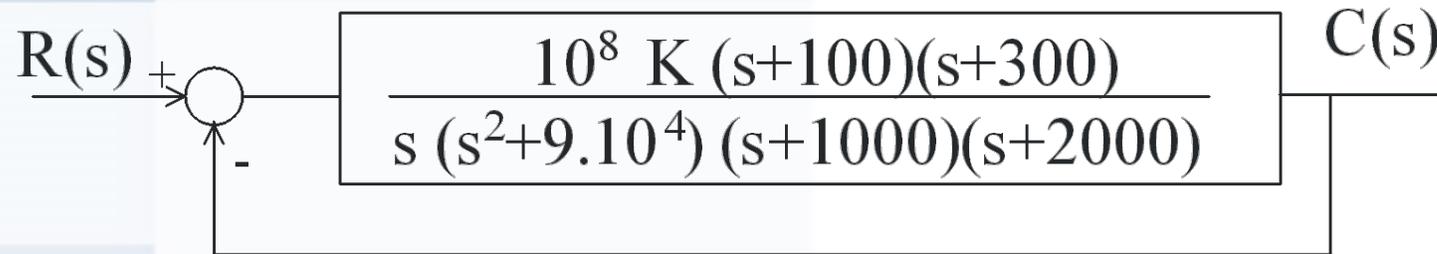
Diagrama de Bode de Fase



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo:

Determine mediante diagramas de Bode el rango de valores de K que hacen estable al sistema.



Bosqueje el diagrama de Nyquist correspondiente a $K=1$ y analice las condiciones de estabilidad.

Realice el lugar de raíces y verifique los resultados anteriores.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Transferencia de Lazo Abierto Normalizada

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{16.67 \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2000}\right) \left[1 + \left(\frac{j\omega}{300}\right)^2\right]}$$

Polos de la transferencia:

$$\begin{aligned}p_1 &= 0 \\p_2 &= -1000 \\p_3 &= -2000 \\p_4 &= j 300 \\p_5 &= -j 300\end{aligned}$$

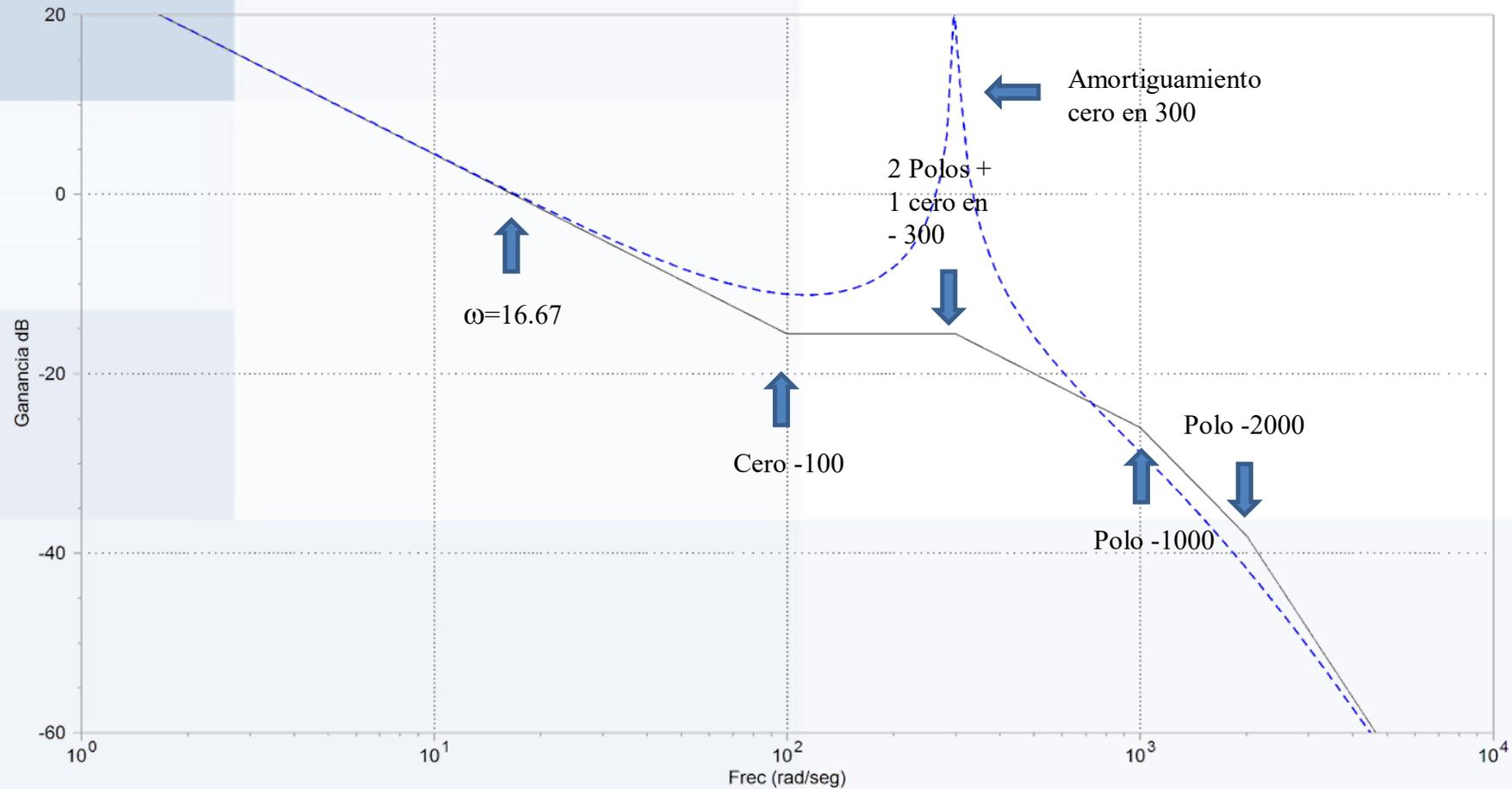
Ceros de la transferencia:

$$\begin{aligned}z_1 &= -100 \\z_2 &= -300\end{aligned}$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Diagrama de bode de Amplitud

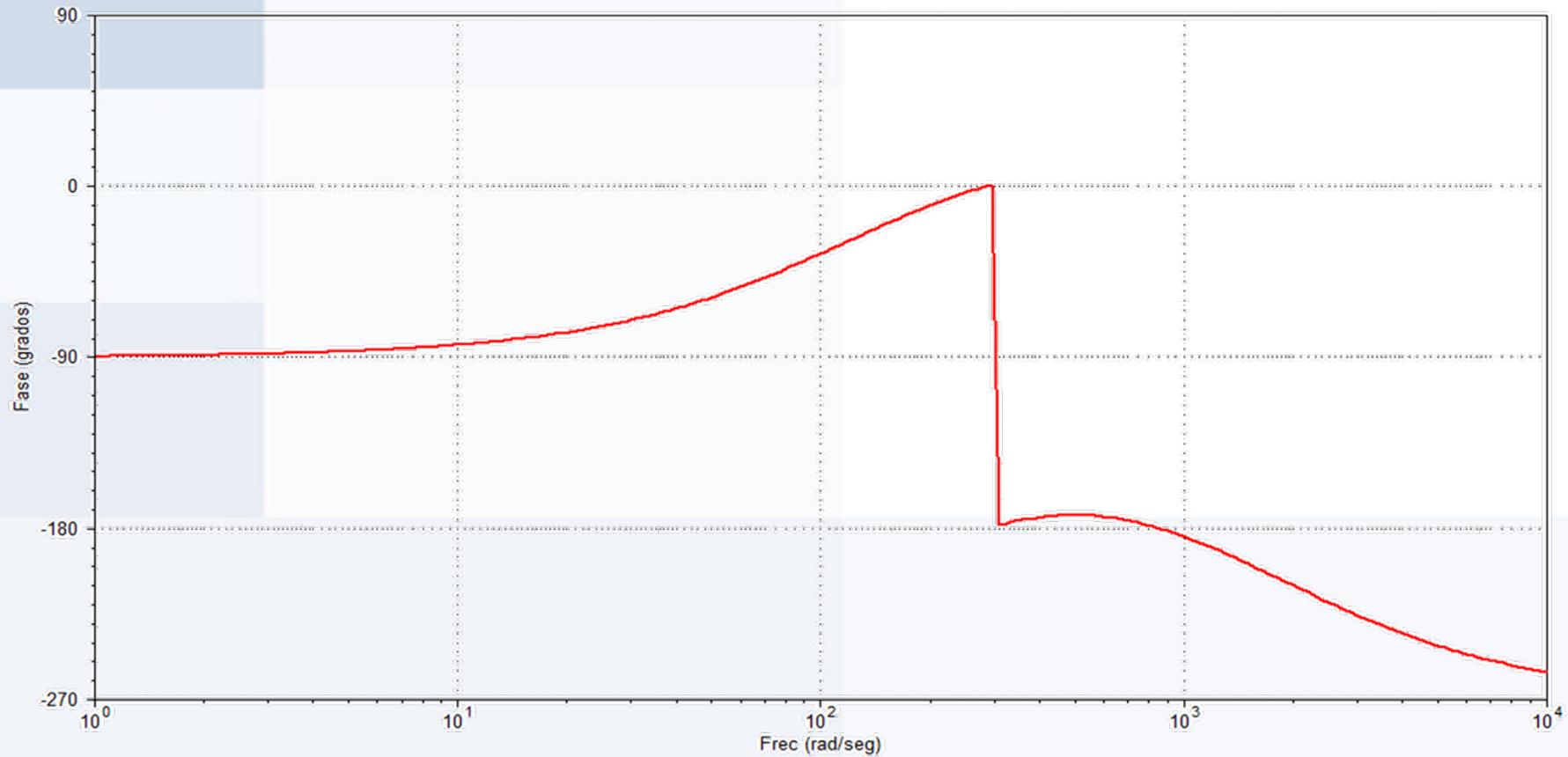
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{16.67 \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2000}\right) \left[1 + \left(\frac{j\omega}{300}\right)^2\right]}$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Diagrama de bode de Fase

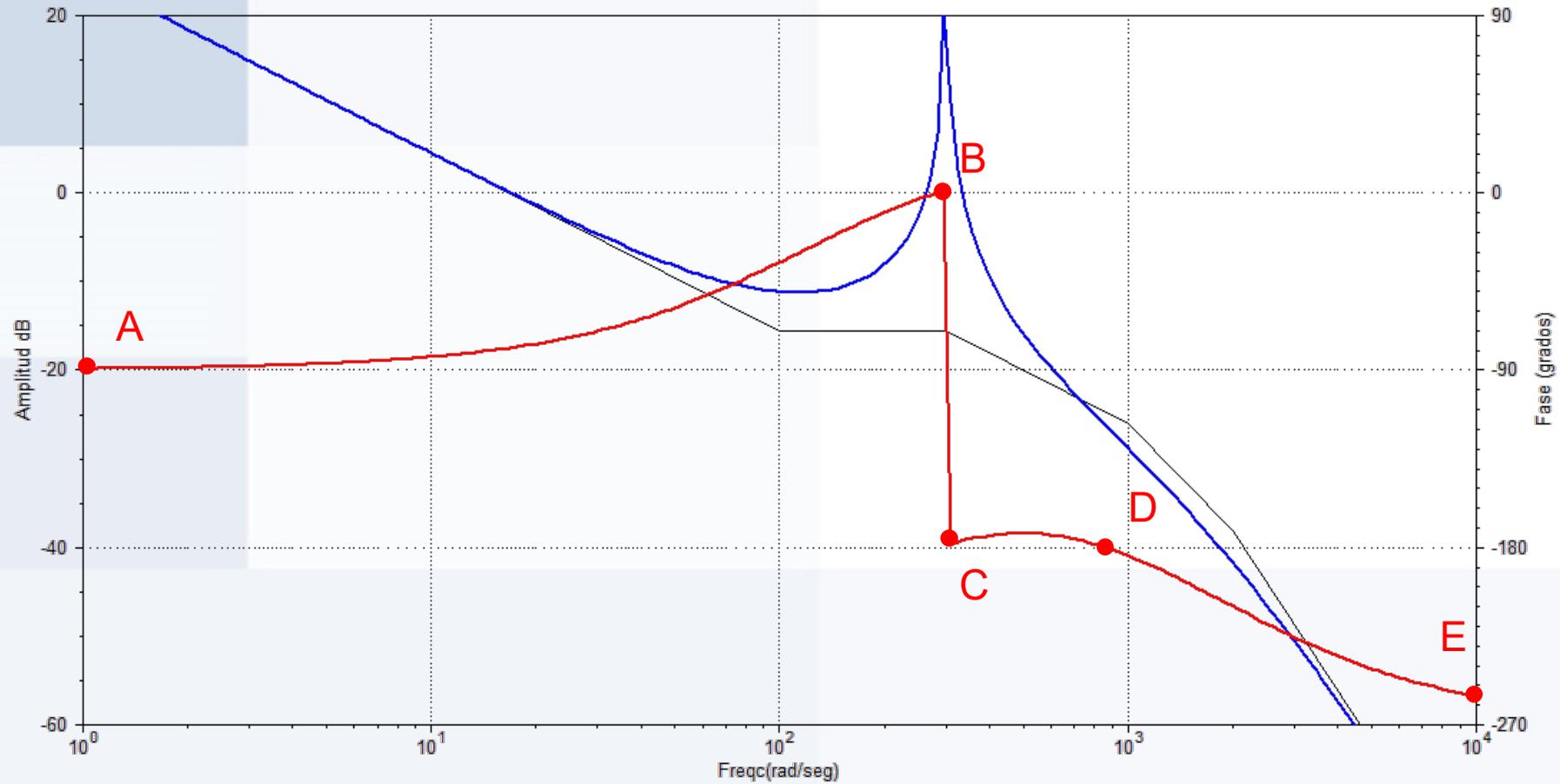
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{16.67 \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2000}\right) \left[1 + \left(\frac{j\omega}{300}\right)^2\right]}$$



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



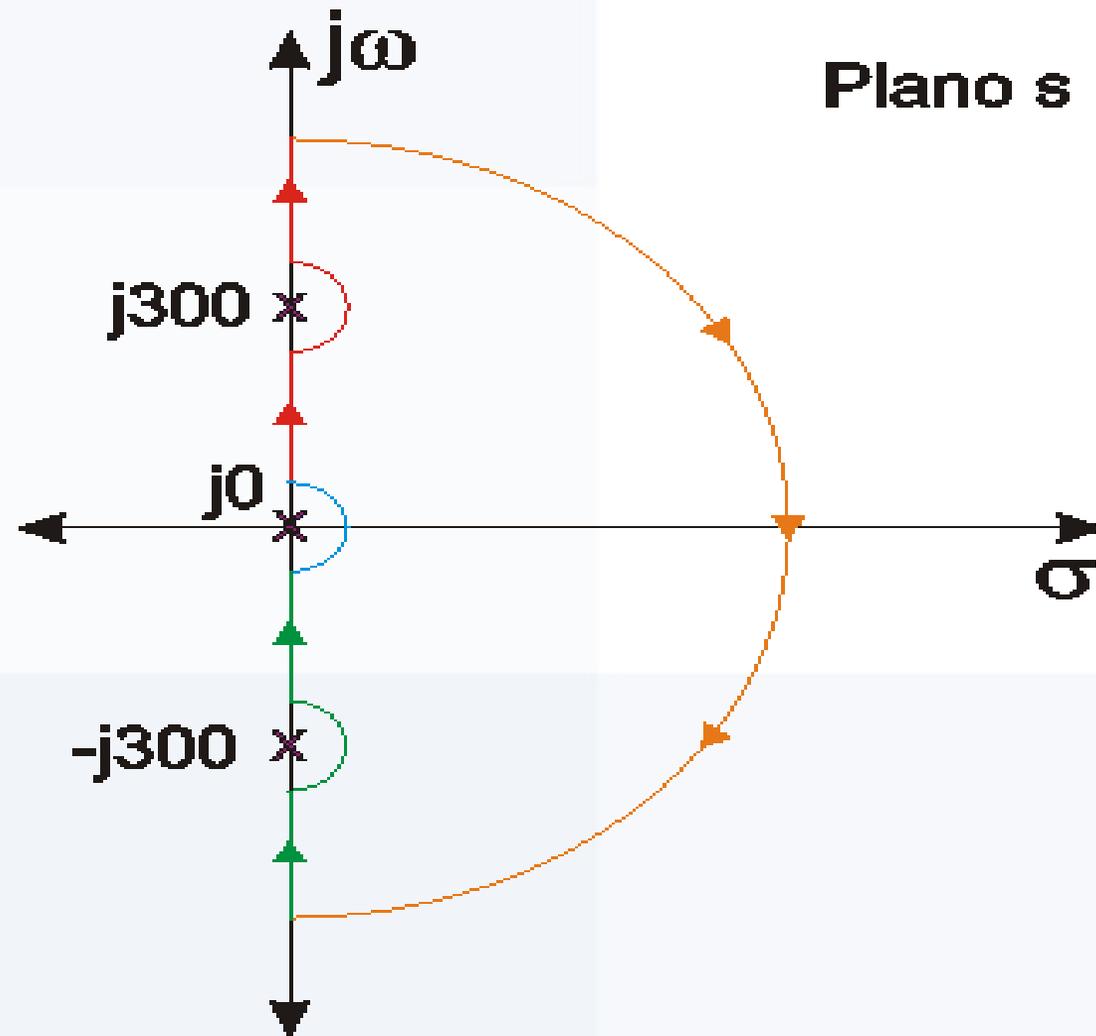
Diagrama de Bode



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

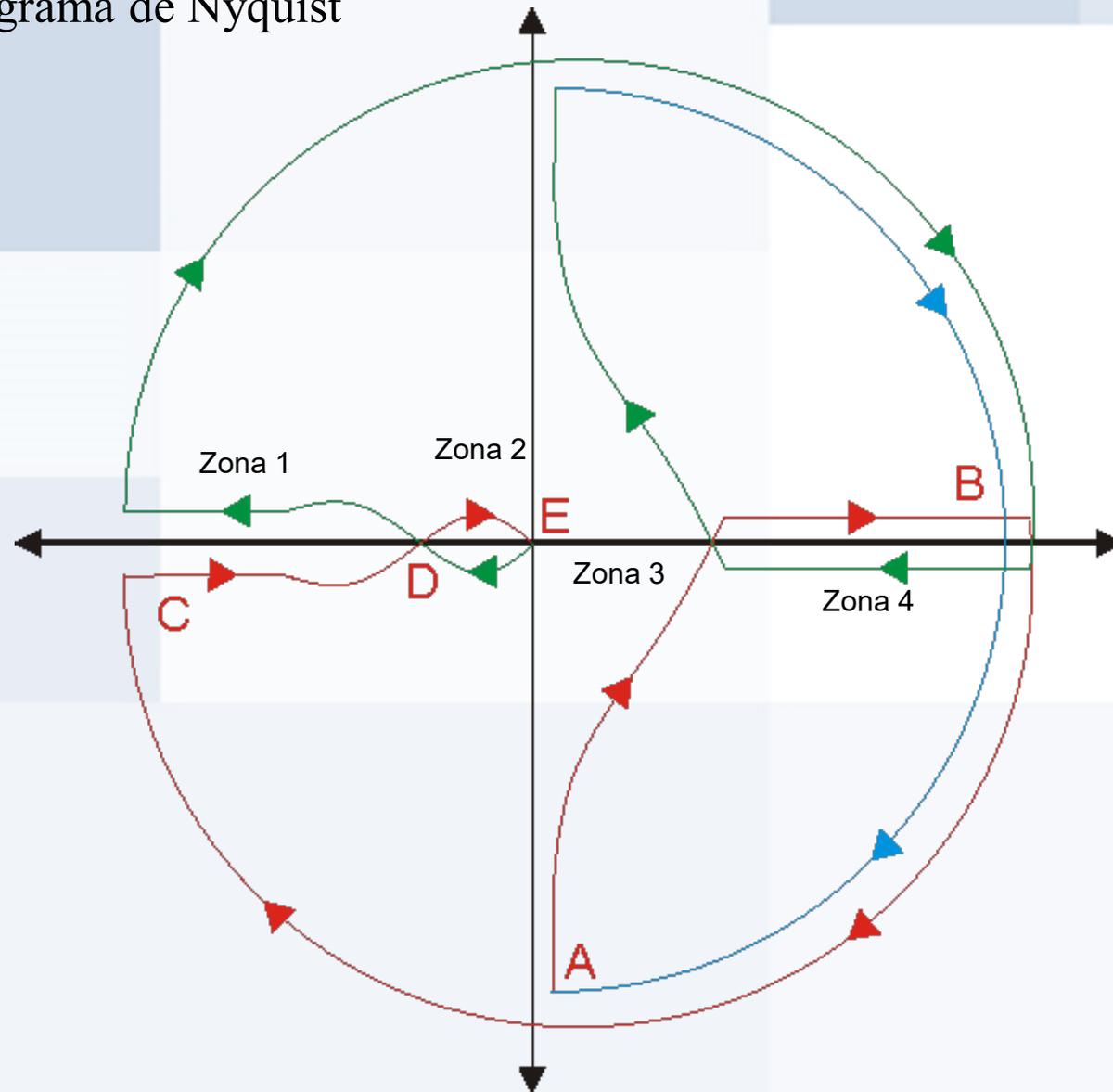


Circulación en el plano complejo



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Diagrama de Nyquist

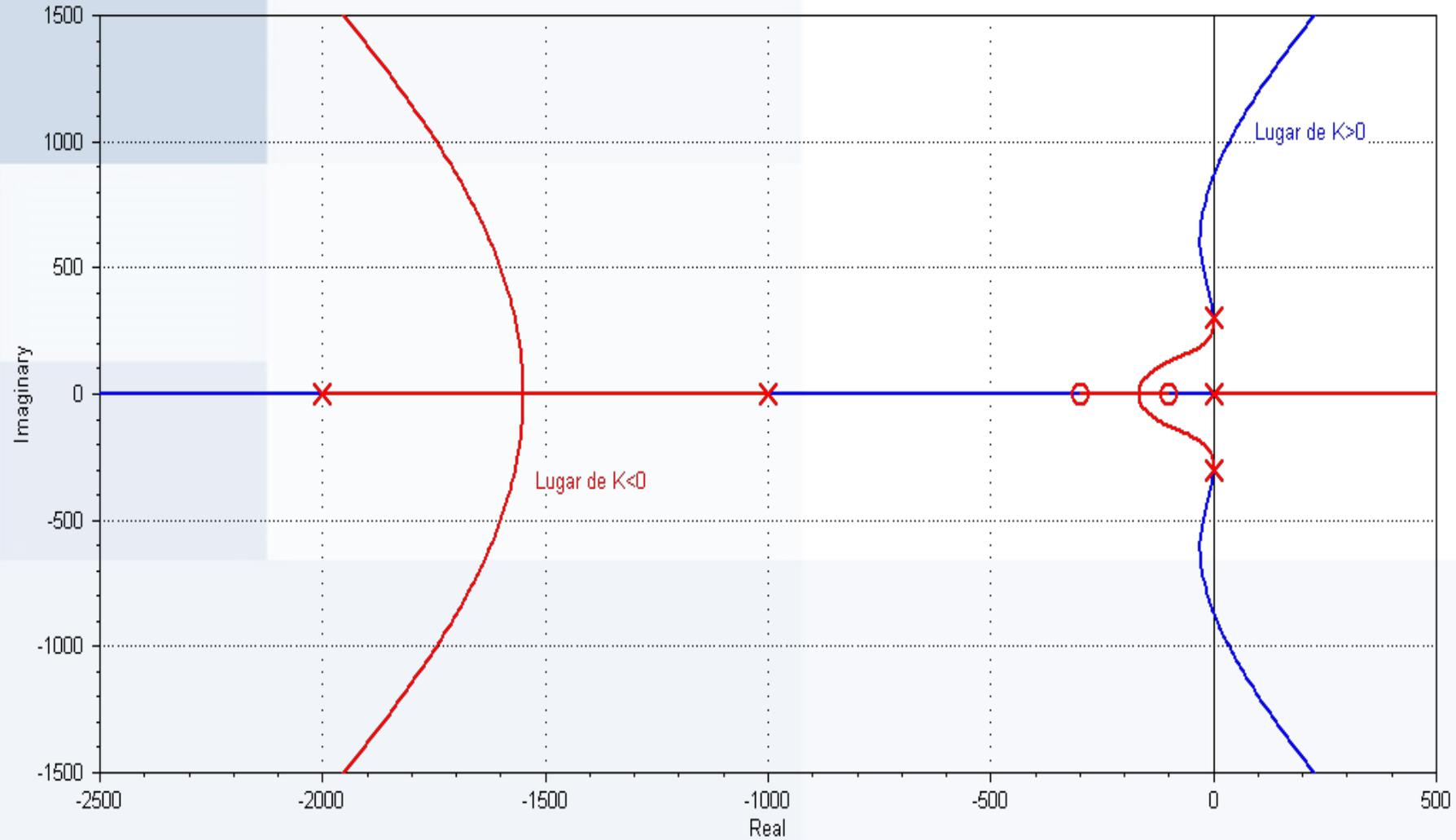


Zona 1	$P=0$
$K>0$	$N=0$
	$Z=0$
	Estable
Zona 2	$P=0$
$K>0$	$N=2$
	$Z=2$
	Inestable
Zona 3	$P=0$
$K<0$	$N=1$
	$Z=1$
	Inestable
Zona 4	$P=0$
$K<0$	$N=3$
	$Z=3$
	Inestable

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Lugar de Raices



Estabilidad de Sistemas Realimentados

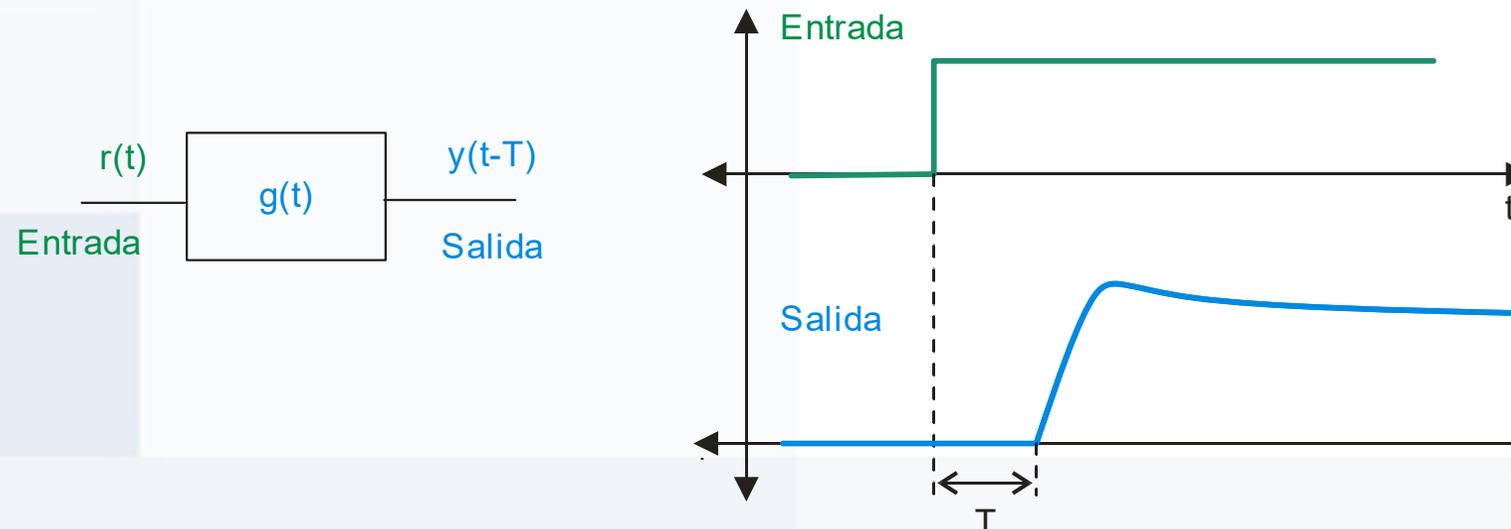
Sistemas con Demora



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

SISTEMAS CON DEMORA (TIEMPO MUERTO)

Existen sistemas en los cuales la respuesta a una entrada, no es instantánea. Es decir que transcurre un tiempo T desde el momento de aplicación de la entrada y el correspondiente efecto sobre la salida. Este tiempo puede ser atribuido a fenómenos de transporte, a tiempos de procesamiento o bien a respuesta de sistemas de orden alto.



Si la parte variable de la señal de salida se puede representar mediante la señal $y(t)$, las salida real será entonces $y(t-T)$.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Si la transformada de Laplace de la señal de entrada $r(t)$ es $R(s)$ y la de la señal de salida $y(t-T)$ es $Y(s)e^{-sT}$ entonces, la función de transferencia es:

$$G_r(s) = \frac{Y(s) e^{-sT}}{R(s)} = G(s) e^{-sT}$$

Si se considera un sistema con demora formando parte de un sistema de lazo cerrado, el análisis de estabilidad se ve modificado debido a la aparición del término e^{-sT} .

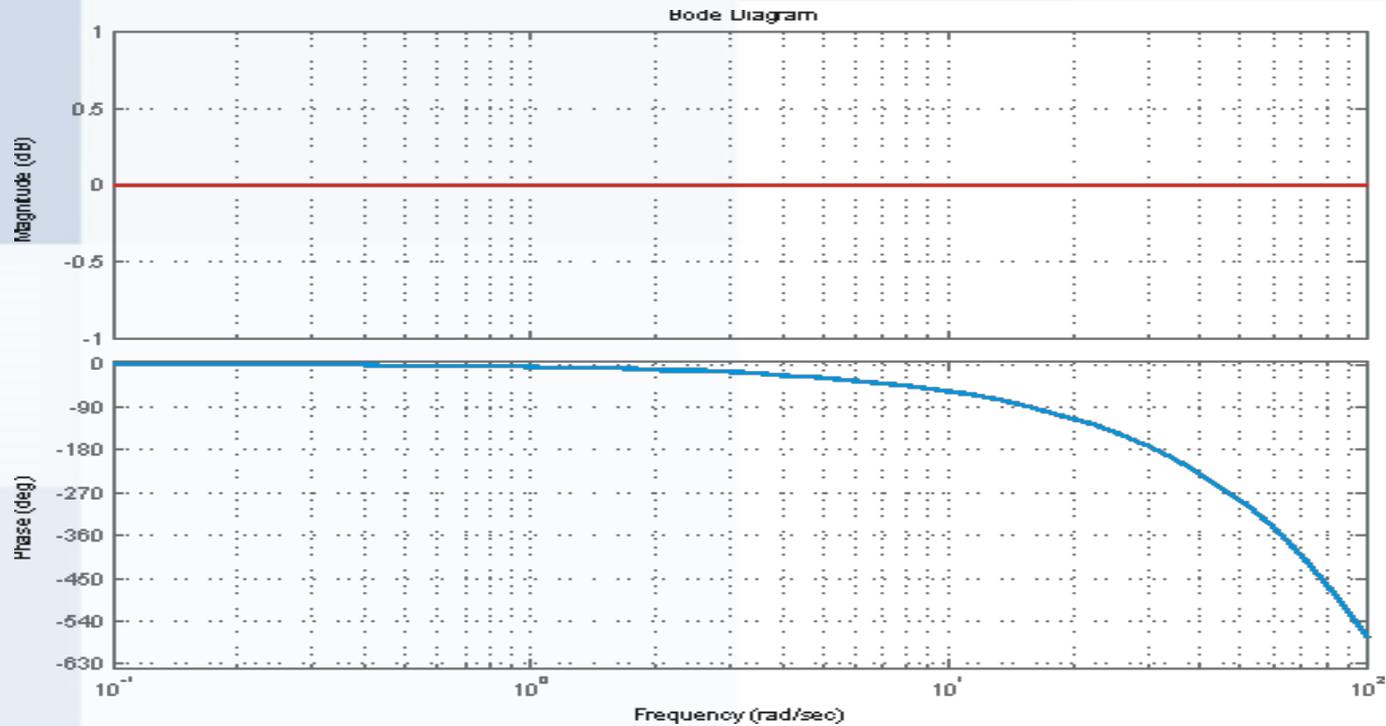


Para el caso del análisis mediante Diagramas de Bode, basta con sumar a los gráficos de magnitud y fase la representación del término exponencial.

$$\text{Módulo} (e^{-j\omega T}) = |e^{-j\omega T}| = 1$$

$$\text{Fase}(e^{-j\omega T}) = -\omega T$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

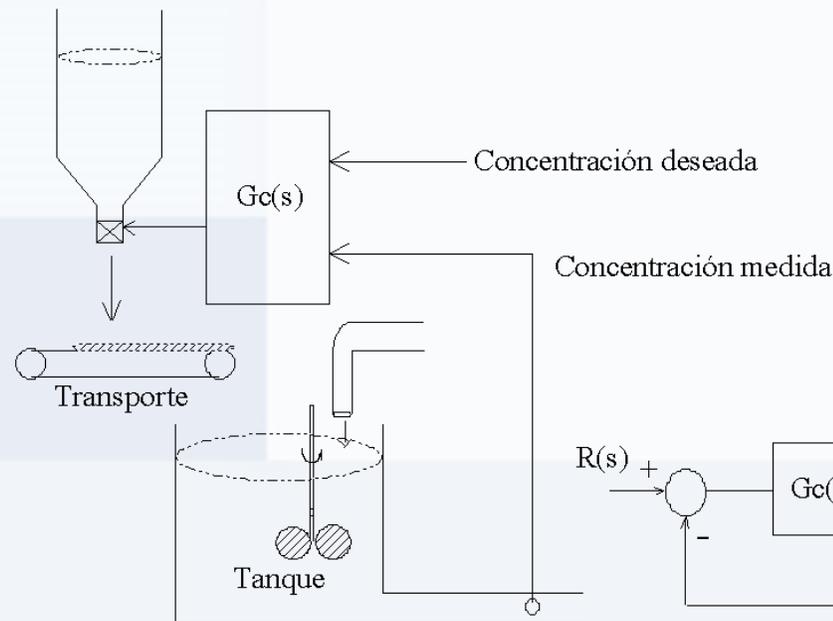


Se ve que el retardo no modifica la curva de amplitud, pero sí agrega un atraso de fase lineal con la frecuencia, por lo tanto puede volver al sistema inestable dependiendo de la magnitud el mismo.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Ejemplo :

Un sistema de control para regulación de concentración química es mostrado en la figura. El sistema recibe una alimentación granular para variar la concentración de la mezcla de salida por ajuste de la apertura de una válvula.

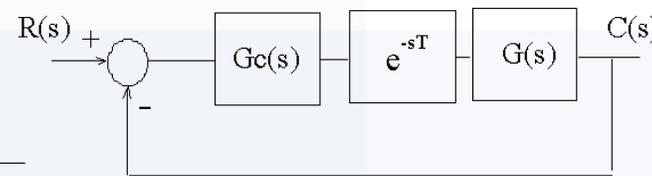


La función transferencia del tanque y la válvula de salida es:

$$G(s) = \frac{5}{10s+1}$$

y la del controlador:

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$$



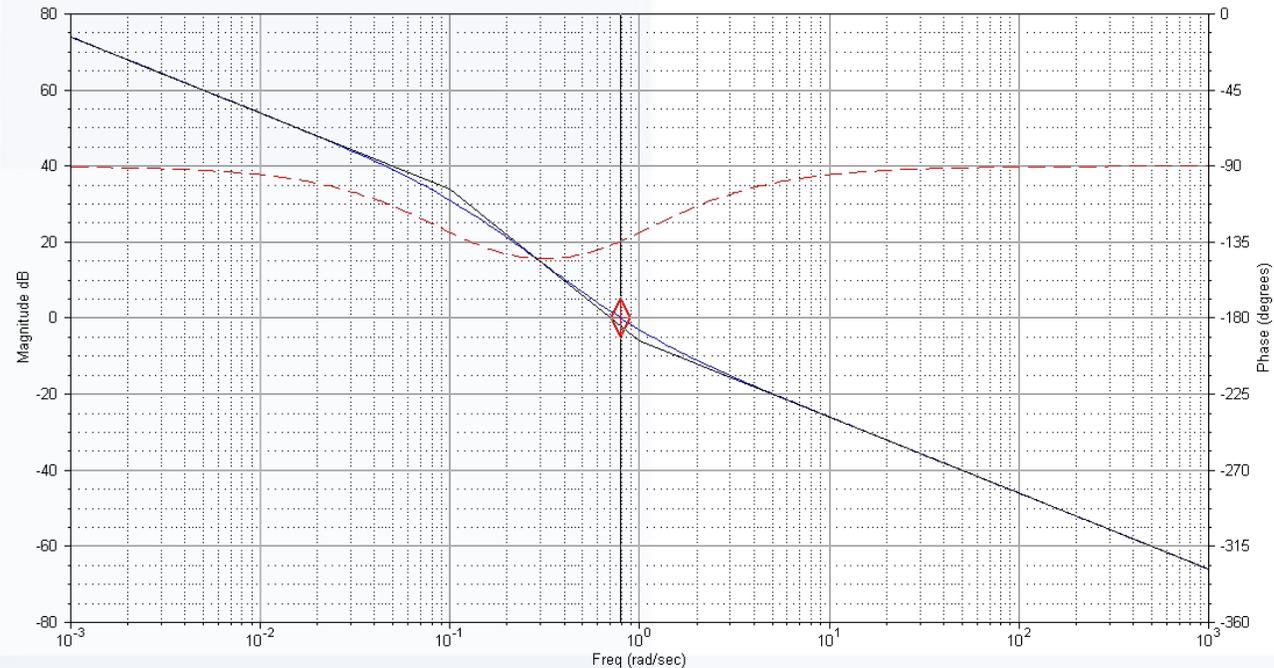
El transporte de la alimentación a lo largo del conductor requiere un tiempo de transporte o retardo de T seg.

Para valores de $K_1=K_2= 1$ determine el máximo retardo admisible.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



El diagrama de bode de la transferencia sin retardo queda:



*At $\omega=0,7964$ r/s, Phase margin= 45,69 deg, Delay margin= 1 sec
No gain margin found

El retardo máximo admisible será aquel que haga que el $M\phi=0$

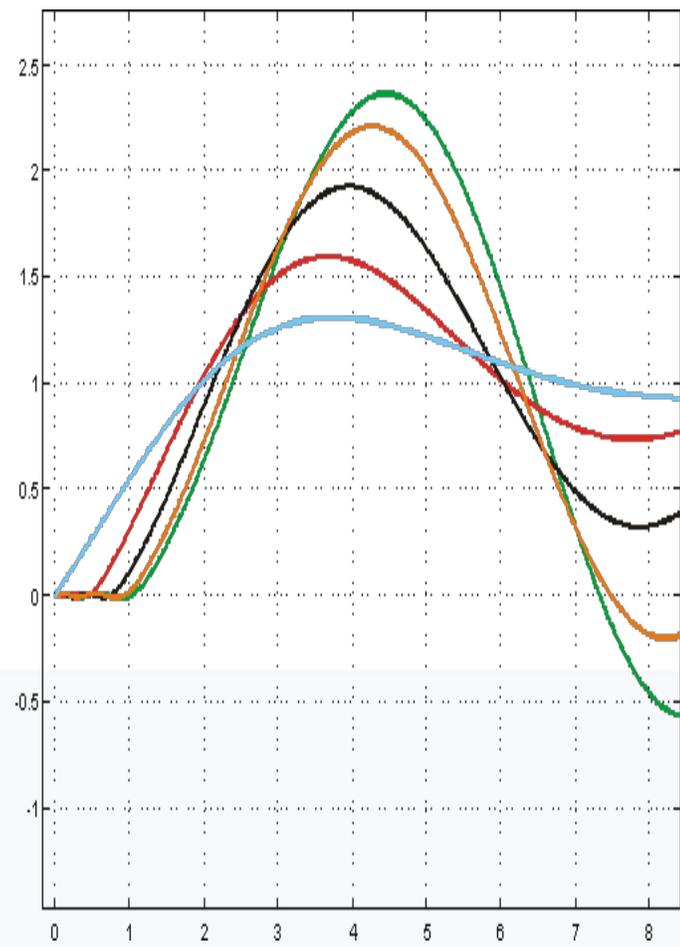
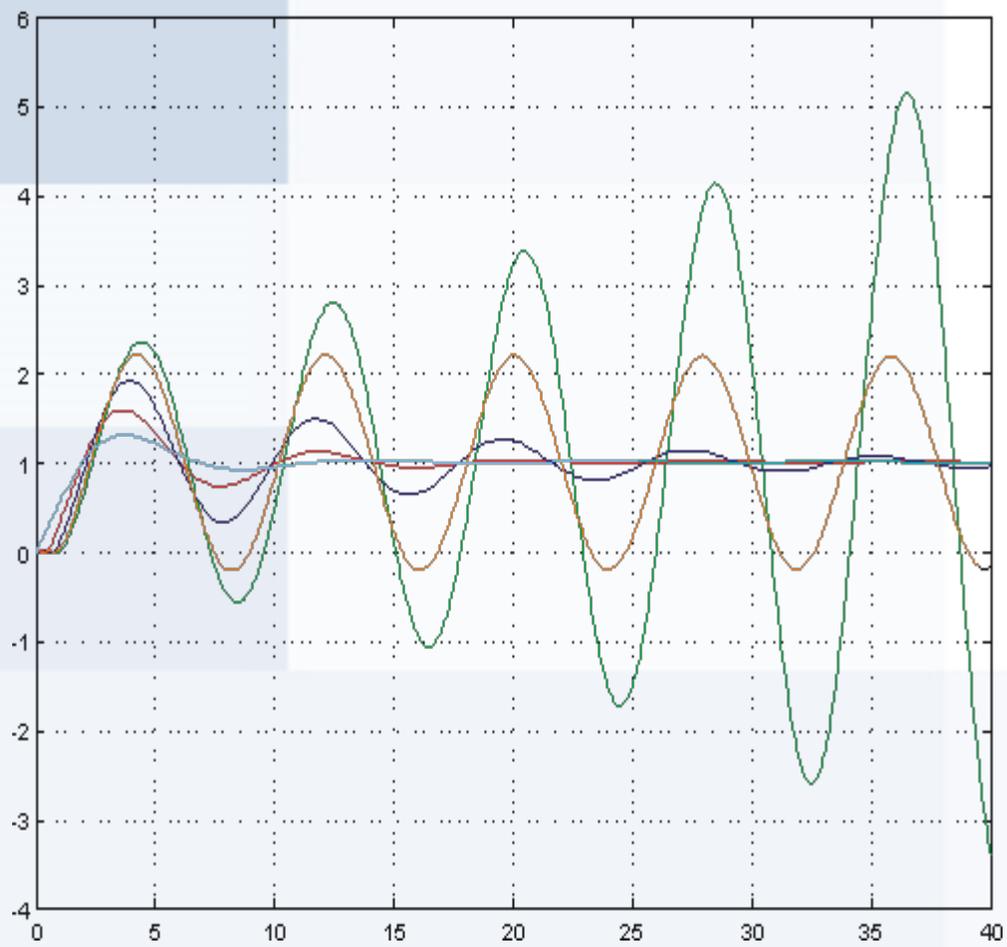
$$M\phi = 180 - \phi(\text{GH})\Big|_{T=0} - \frac{180}{\pi} \omega T = 0 \quad \text{Por lo tanto,} \quad M\phi\Big|_{T=0} = 180 - \phi(\text{GH})\Big|_{T=0} = \frac{180}{\pi} \omega T$$

$$45,69^\circ = \frac{180}{\pi} (0,7964 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}) T_{MAX} \Rightarrow T_{MAX} = 1 \text{ seg}$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



RESPUESTA TRANSITORIA $T=0$, $T=0.5$, $T=0.8$, $T=1$ y $T=1.1$





ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Aproximación de PADE

Existen situaciones en las cuales trabajar con transferencias de sistemas con retardo implica no poder encontrar soluciones cerradas, tal es el caso de tener que encontrar la respuesta transitoria del sistema a lazo cerrado. Para el caso del ejemplo

$$T_{LC}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5(s+1) e^{-sT}}{10s^2 + s(1+5 e^{-sT}) + e^{-sT}}$$

La cual no tiene solución exacta, es decir que la anti-transformada de la salida se debe resolver por métodos numéricos.

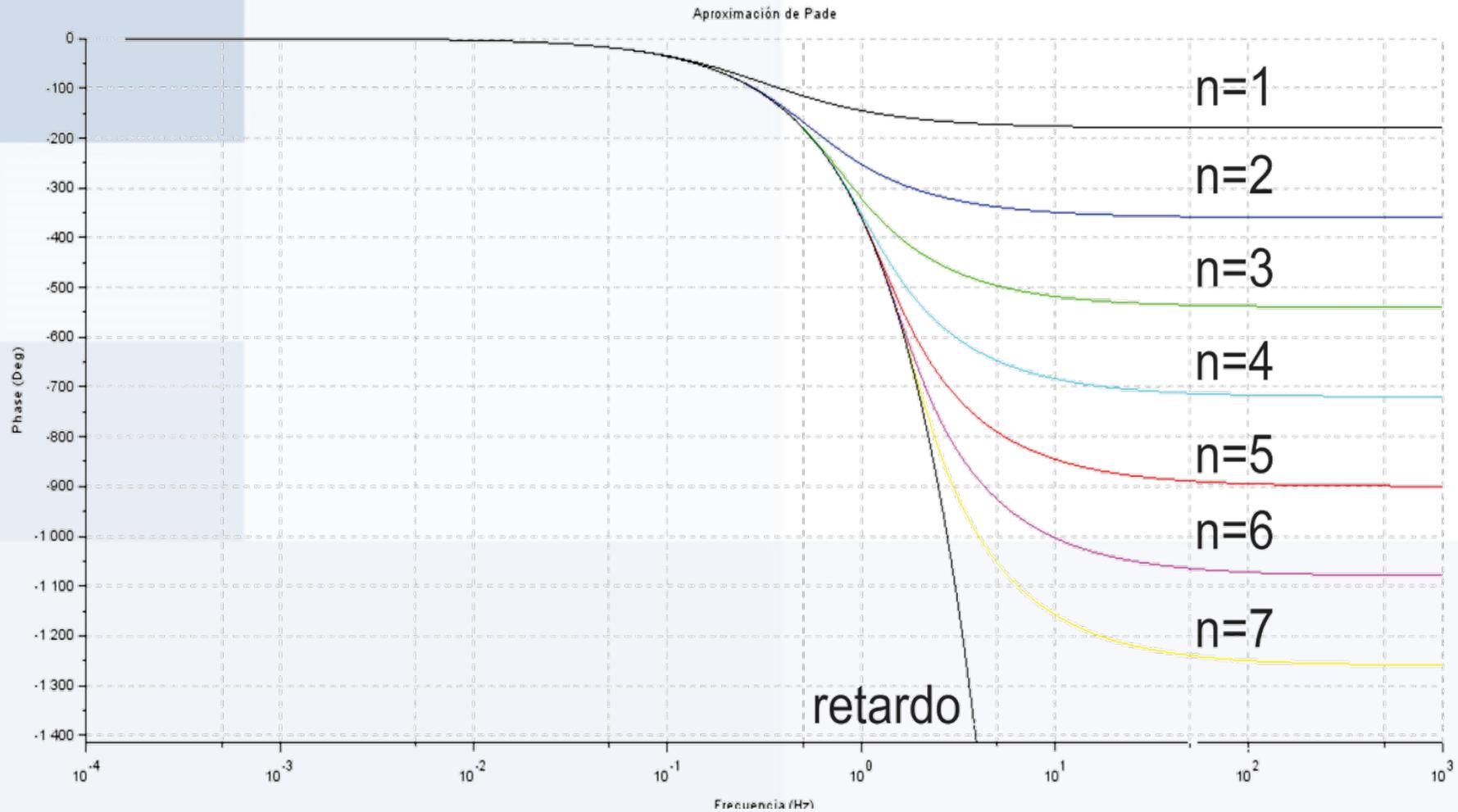
Otra posibilidad es encontrar una aproximación polinómica de la exponencial tal como la aproximación de PADE, y reemplazarla por la exponencial .

$$e^{-sT} = \frac{n_n(s)}{d_n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(2n-1)! n!}{(2n)!(n-i)!} (-sT)^i}{\sum_{j=0}^n \frac{(2n-1)! n!}{(2n)!(n-j)!} (sT)^j} \left\{ \begin{array}{l} T = 1 \\ n = 1 \quad G_r(s) = \frac{-s+2}{s+2} \\ n = 2 \quad G_r(s) = \frac{s^2-6s+12}{s^2+6s+12} \\ n = 3 \quad G_r(s) = \frac{-s^3+12s^2-60s+120}{s^3+12s^2+60s+120} \end{array} \right.$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



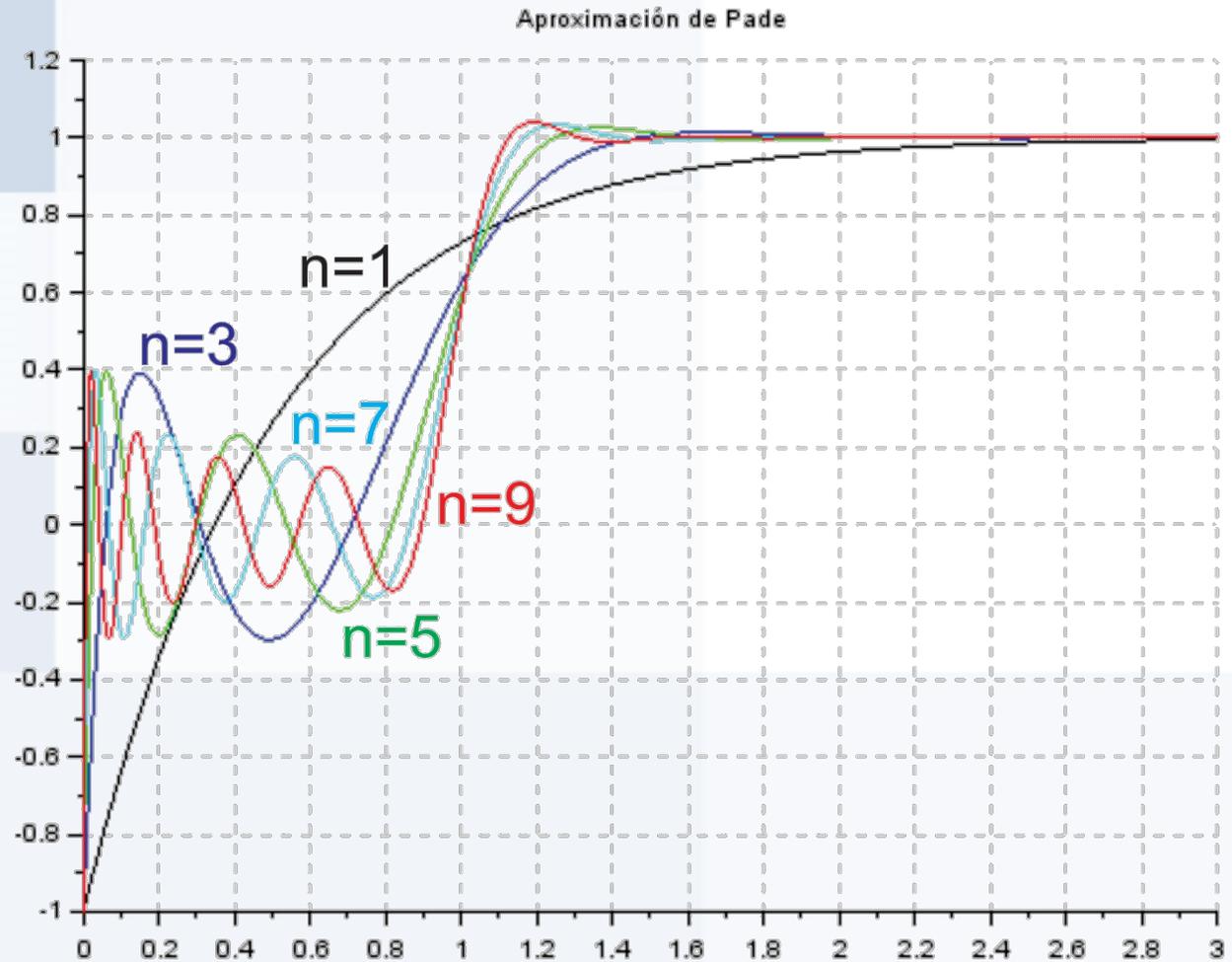
Representación en Diagrama de Bode



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Respuesta transitoria para una entrada en escalón.



ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Aproximación de PADE

Suponiendo un retardo de $T=0.8$ seg. Se va a aproximar con una función de Padé de tercer orden

$$Gr(s) = \frac{-s^3 + 15s^2 - 93.75s + 234.373}{s^3 + 15s^2 + 93.75s + 234.373}$$

Reemplazando la transferencia anterior en la transferencia de Lazo Abierto queda:

$$Gc(s)G(s)e^{-0.8s} \cong \left(\frac{5(s+1)}{s(10s+1)} \right) \left(\frac{-s^3 + 15s^2 - 93.75s + 234.373}{s^3 + 15s^2 + 93.75s + 234.373} \right)$$

Finalmente la transferencia de Lazo cerrado resulta:

$$T_{LC}(s) = \frac{-5s^4 + 70s^3 - 393.7s^2 + 703.1s + 1172}{10s^5 + 146s^4 + 1022s^3 + 2044s^2 + 937.5s + 1172}$$

$$T_{LC}(s) = \frac{-0,5(s+1)(s-5.805) \left[(s-4.597)^2 + 4.386^2 \right]}{(s+2.62) \left[(s+0.08031)^2 + 0.8052^2 \right] \left[(s+5.91)^2 + 5.778^2 \right]}$$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS REALIMENTADOS



Respuesta transitoria a Lazo Cerrado

