

TEORÍA DE CONTROL

MODELO DE ESTADO
DISCRETO

Modelo de estado.

De la misma forma que se planteó para sistemas continuos, existe la posibilidad de modelar un sistema discreto mediante un **modelo de estados**.

El sistema se representa en este caso como un conjunto de ecuaciones en diferencia de primer orden de modo que, para un sistema lineal, resulta de la forma:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k)$$

Existen, al igual que en los sistemas continuos, distintas formas de obtener el modelo de estado:

- Modelos canónicos (controlable y observable)
- Modelo diagonal
- Transformación exponencial.



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico controlable.

Considere un sistema discreto, representado por su función de transferencia discreta:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\beta_1 z^m + \beta_2 z^{m-1} + \dots + \beta_m z + \beta_{m+1}}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n}$$

Se plantea una separación entre el numerador y denominador planteando una variable auxiliar X_1 :

$$\frac{X_1(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n}$$
$$\frac{C(z)}{X_1(z)} = \beta_1 z^m + \beta_2 z^{m-1} + \dots + \beta_m z + \beta_{m+1}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento de la transformada z con condiciones iniciales son nulas (por definición) a la primer expresión, queda

$$x_1(k+n) + \alpha_1 x_1(k+n-1) + \dots + \alpha_{n-1} x_1(k+1) + \alpha_n x_1(k) = r(k)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico controlable.

Se definen nuevas variables , tal que:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k) = x_1(k+2)$$

....

$$x_{n-2}(k+1) = x_{n-1}(k) = x_1(k+n-2)$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k) = x_1(k+n-1)$$

Reescribiendo la ecuación en términos de las nuevas variables, resulta:

$$x_n(k+1) + \alpha_1 x_n(k) + \alpha_2 x_{n-1}(k) + \dots + \alpha_{n-1} x_2(k) + \alpha_n x_1(k) = r(k)$$

Y por lo tanto:

$$x_n(k+1) = -\alpha_1 x_n(k) - \alpha_2 x_{n-1}(k) - \dots - \alpha_{n-1} x_2(k) - \alpha_n x_1(k) + r(k)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico controlable.

En tanto la salida puede escribirse:

$$c(k) = \beta_1 x_{m-1}(k) + \beta_2 x_{m-2}(k) + \dots + \beta_m x_2(k) + \beta_{m+1} x_1(k)$$

Finalmente resulta:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \quad \text{M.C.C.}$$

$$c(k) = [\beta_{m+1} \quad \beta_m \quad \dots \quad \beta_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(k)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico observable.

Resulta de considerar la transferencia vista desde la salida y su forma es la transpuesta de la anterior.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \beta_{m+1} \\ \beta_m \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

M.C.O.

$$c(k) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x(k)$$



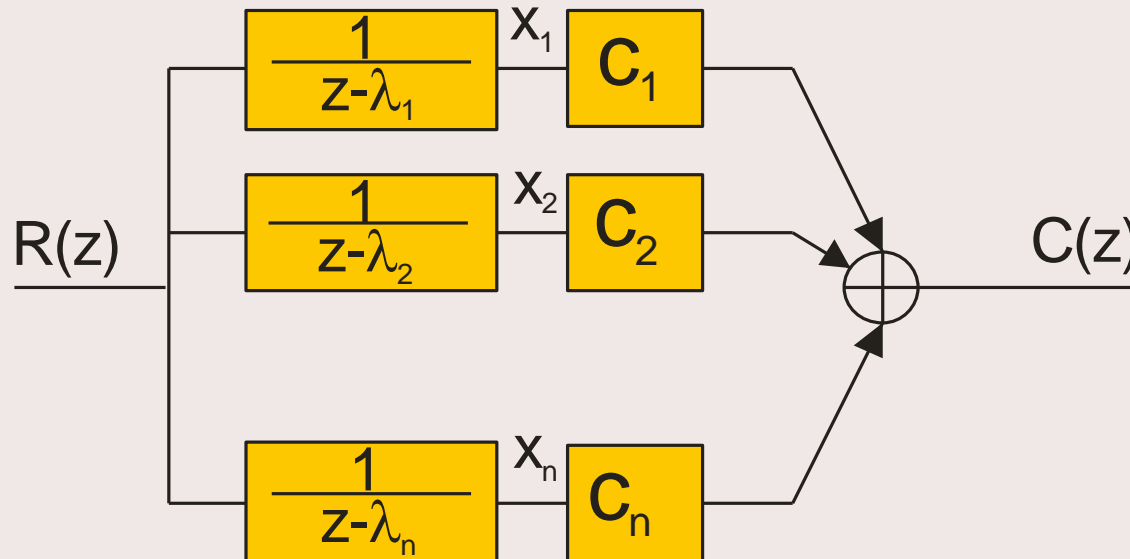
MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico diagonal.

Si la transferencia no tiene polos de multiplicidad mayor a uno se puede descomponer en fracciones simples:

$$C(z) = \left(\frac{c_1}{z - \lambda_1} + \frac{c_2}{z - \lambda_2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z - \lambda_{n-1}} + \frac{c_n}{z - \lambda_n} \right) R(z)$$

Esto permite tener un sistema desacoplado en donde las variables no se relacionan entre si:



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo canónico diagonal.

El modelo de estado discreto resultante es el siguiente:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

M.C.D.

$$c(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n] x(k)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

Los modelos de estado tratados hasta aquí, resultan de una función de transferencia en la cual, salvo casos especiales, la única variable física es la salida. Cuando se necesita representar un modelo de estado discreto en el cual se representen, en su mayoría, variables físicas se utiliza la transformación exponencial en donde el modelo discreto deriva directamente del modelo de estado continuo.

Se considera un modelo de estado continuo, en el cual las variables representan señales de interés del sistema físico.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

Como el resto de los modelos matemáticos discretos vistos hasta aquí, estos representan el comportamiento de la planta continua en los instantes de muestreo. Para el modelo de estado no debería ser de otra forma.



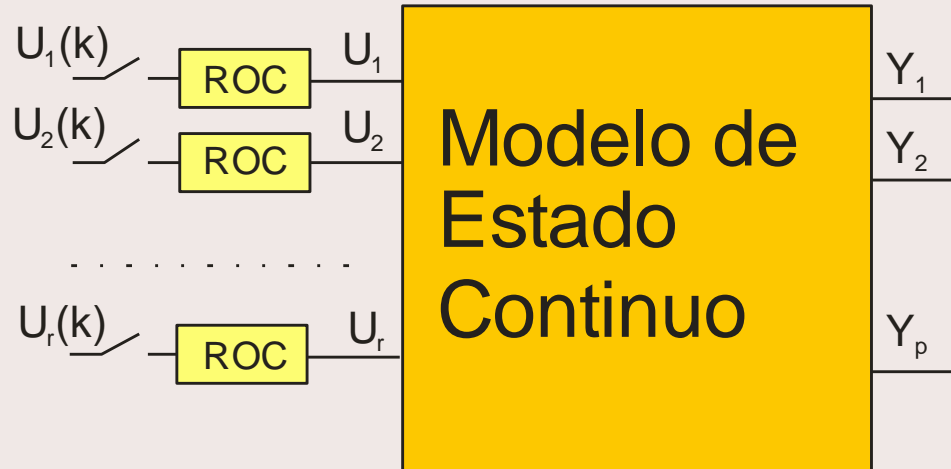
MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

La solución para el vector de estado del sistema continuo es:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Se considera que las entradas del modelo continuo provienen de una señal discreta a través de una retención de orden cero :



Por lo tanto la señal $U(t)$ será constante entre kT y $(k+1)T$, de valor $U(k)$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

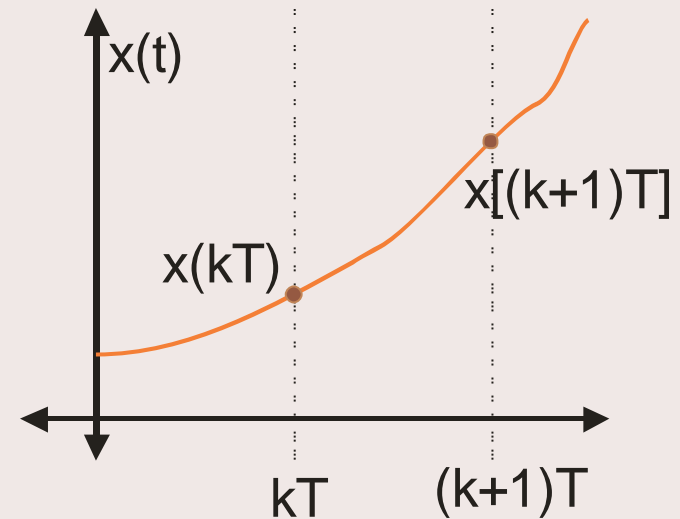
Para evaluar el comportamiento del modelo continuo en los instantes de muestreo, se consideran los valores de las variables en el instante kT y se analiza su evolución hasta el instante $(k+1)T$.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Entonces resulta: $t_0 = kT$
 $t = (k+1)T$

La solución del modelo queda de esta forma

$$x((k+1)T) = e^{A((k+1)T - kT)} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T - \tau)} B u(\tau) d\tau$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

La señal $u(t)$ dentro de la integral toma un valor constante, para $kT < t < (k+1)T$, igual a $u(kT)$. Por lo tanto esta constante puede salir fuera de la integral quedando de la siguiente forma:

$$x((k+1)T) = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \mathbf{B} d\tau}_{B_d} u(kT)$$

Esta expresión tiene la forma de un modelo de estado discreto en donde:

$$A_d = e^{AT} \quad \text{y} \quad B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \mathbf{B} d\tau$$

Reemplazando en la integral $\lambda = (k+1)T - \tau$ resulta $d\lambda = -d\tau$

$$B_d = \int_T^0 e^{A\lambda} \mathbf{B} (-d\lambda) = \int_0^T e^{A\lambda} \mathbf{B} d\lambda$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

Si existe A^{-1} la matriz de entrada se puede calcular como:

$$B_d = \left[e^{AT} - I \right] A^{-1} B$$

Como el modelo planteado mantiene las variables del modelo continuo, pero en este caso evaluadas en tiempo discreto, la relación entre las salidas y las variables de estado se mantiene inalterable. Por lo tanto:

$$y(k) = Cx(k)$$

Finalmente el modelo de estado discreto queda:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad ; \quad y(k) = C_d x(k)$$

con

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\lambda} B d\lambda \quad y \quad C_d = C$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Transformación exponencial.

EJEMPLO 1: Hallar la representación en tiempo discreto para $T=1$, del sistema continuo,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

SOLUCIÓN:

Se recuerda que mediante Laplace, la matriz de transición de estado es,

$$\varphi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

siendo la inversa de una matriz,
$$M^{-1} = \frac{\text{Adjunta}(M)}{\text{Det}(M)} = \frac{[\text{Cofactores}(M)]^T}{\text{Det}(M)}$$

Luego,

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix} ; \text{Det}(sI - A) = s(s + 2)$$



Transformación exponencial.

Finalmente:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)}$$

Anti-transformando se llega a:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(1-e^{-2t})}{2} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} ; \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(1-e^{-2T})}{2} \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

Por otro lado,

$$B_d = \left(\int_0^T e^{At} B dt \right)$$

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-2t})/2 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} (1-e^{-2t})/2 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$



Transformación exponencial.

Resolviendo la integral:

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} (1 - e^{-2t}) / 2 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} + \frac{e^{-2T} - 1}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-2T}}{2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo el valor del período de muestreo en las matrices, resulta finalmente:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,432 \\ 0 & 0,135 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,284 \\ 0,432 \end{bmatrix} u(k)$$

Los autovalores del modelo discreto son:

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = 0.135$$

Que corresponden a la transformación de los autovalores continuos al plano Z



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución del modelo de estado.

Los sistemas discretos invariantes se pueden describir mediante la ecuación en diferencias

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad ; \quad y(k) = C_d x(k)$$

Asumiendo conocidos $x(0)$ y las señales de entrada $u(0), u(1), \dots$ ¿Cómo evoluciona entonces el estado?

La ecuación de estados se puede resolver en forma iterativa, como sigue:

$$x(1) = A_d x(0) + B_d u(0)$$

$$x(2) = A_d x(1) + B_d u(1) = A_d^2 x(0) + A_d B_d u(0) + B_d u(1)$$

...

$$x(k) = A_d^k x(0) + A_d^{k-1} B_d u(0) + \dots + B_d u(k-1)$$

$$= \underbrace{A_d^k x(0)}_{\text{solución homogénea}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1} B_d u(i)}_{\text{sumatoria de convolución}}$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución del modelo de estado.

Otra forma de encontrar la solución es aplicar al modelo transformada Z.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \xrightarrow{Z} z X(z) - z x(0) = A_d X(z) + B_d U(z)$$

$$z X(z) - A_d X(z) = z x(0) + B_d U(z)$$

$$(z I - A_d) X(z) = z x(0) + B_d U(z)$$

$$X(z) = \underbrace{z (z I - A_d)^{-1} x(0)}_{\text{solución homogénea}} + \underbrace{(z I - A_d)^{-1} B_d U(z)}_{\text{solución particular}}$$

Por lo tanto se plantea:

$$A_d^k = Z^{-1} \left\{ z (z I - A_d)^{-1} \right\}$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución del modelo de estado.

EJEMPLO 2: Hallar la solución (en el tiempo) para la ecuación de estado,

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_A x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(k)$$

cuyas condiciones iniciales son $X_0 = [1 \ 0]^T$ y la entrada es un escalón unitario.

SOLUCIÓN:

La entrada a considerar es, $U(z) = \frac{z}{z-1}$ y la matriz de transición de estado es,

$$\phi(z) = (zI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}}{(z-1)(z-2)}$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución del modelo de estado.

Con lo que la solución homogénea es,

$$\phi(z) z X_0 = \frac{z \begin{bmatrix} z-2 \\ 0 \end{bmatrix}}{(z-1)(z-2)} = \begin{bmatrix} z/(z-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y la solución particular es,

$$\phi(z) B U(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ z/(z-1)(z-2) \end{bmatrix}$$

Finalmente, con la suma de las dos soluciones, resulta:

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{(z-1)(z-2)} \end{bmatrix} \rightarrow x(k) = \begin{bmatrix} 1^k \\ 2^k - 1^k \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Función de transferencia discreta.

Por definición la función de transferencia tiene condiciones iniciales nulas.
Entonces a partir del modelo de estado:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \xrightarrow{Z} z X(z) - \underbrace{z x(0)}_{=0} = A_d X(z) + B_d U(z)$$

$$(z I - A_d) X(z) = B_d U(z)$$

$$X(z) = (z I - A_d)^{-1} B_d U(z)$$

La salida del modelo se puede plantear como:

$$Y(z) = C X(z) = \underbrace{C (z I - A_d)^{-1} B_d}_{\substack{G(z) \\ \text{Matriz de transferencia} \\ \text{discreta}}} U(z)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Sistemas con retardo.

Se plantea una forma de representar el modelo de estado de sistemas con retardo. Se pueden dar dos situaciones en cuanto al efecto del retardo sobre la planta:



El modelo del retardo se puede considerar intrínsecamente discreto con una transferencia z^{-d} , con $d=Td/Ts$, por lo tanto se puede plantear un modelo canónico para el mismo a partir de la función de transferencia



Sistemas con retardo.

El modelo del retardo en su forma canónica controlable será:

$$x_R(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x_R(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R(k)$$
$$y_R(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] x_R(k)$$

$$x_R(k+1) = A_R x_R(k) + B_R u_R(k) \quad ; \quad y_R(k) = C_R x_R(k)$$

El modelo del de la planta sin retardo puede ser calculado por ejemplo, con la matriz exponencial :

$$x_P(k+1) = A_P x_P(k) + B_P u_P(k) \quad ; \quad y_P(k) = C_P x_P(k)$$



Sistemas con retardo.

Para los casos planteados será suficiente con conectar en serie ambos modelos de estado, lo que dará como resultado un modelo en el cual las variables serán las variables del modelo de la planta más las variables del modelo del retardo.

Para el caso del retardo a la salida:

$$u(k) = u_P(k) \quad ; \quad y(k) = y_R(k) \quad \text{y} \quad y_P(k) = C_P x_P(k) = u_R(k)$$

Entonces el conjunto de variables de estado queda:

$$x_P(k+1) = A_P x_P(k) + B_P u(k)$$

$$x_R(k+1) = A_R x_R(k) + B_R C_P x_P(k) \quad ; \quad y(k) = C_R x_R(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_P(k+1) \\ x_R(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ B_R C_P & A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_P \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & C_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix}$$

**Modelo con retardo
a la Salida**



Sistemas con retardo.

Para el caso del retardo a la entrada:

$$u(k) = u_R(k) \quad ; \quad y(k) = y_P(k) \quad \text{y} \quad y_R(k) = C_R x_R(k) = u_P(k)$$

Entonces el conjunto de variables de estado queda:

$$x_P(k+1) = A_P x_P(k) + B_P C_R x_R(k) \quad ; \quad y(k) = C_P x_P(k)$$

$$x_R(k+1) = A_R x_R(k) + B_R u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_P(k+1) \\ x_R(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P & B_P C_R \\ 0 & A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_R \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix}$$

**Modelo con retardo
a la Entrada**



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Sistemas con retardo.

EJEMPLO 3: Considere el sistema del EJEMPLO 1 con salida $y(k) = x_1(k)$, en el cual se plantea un retardo a la salida de $T_d = 3$ s. Plantee un modelo discreto, en el cual se tenga en cuenta el retardo del sistema.

SOLUCIÓN:

La planta continua discretizada tiene el siguiente modelo:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,432 \\ 0 & 0,135 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,284 \\ 0,432 \end{bmatrix} u(k) ; y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

En este caso $d = T_d/T_s = 3$, por lo tanto la transferencia del modelo del retardo es Z^{-3} .

El modelo de estado del retardo resulta:

$$x_R(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_R(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R(k)$$

$$y_R(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_R(k)$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Sistemas con retardo.

El modelo completo tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_R(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,135 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,284 \\ 0,432 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y_t(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_R(k) \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO DISCRETO

Controlabilidad y Observabilidad.

Para los modelos de estado discretos el análisis de controlabilidad y observabilidad se realiza de la misma forma que en los modelos continuos:

Matriz Controlabilidad: $U = \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-2}B \mid A^{n-1}B \right]$

Matriz Observabilidad: $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

Se debe tener en cuenta que las matrices del modelo discreto dependen del periodo de muestreo y si bien en la mayoría de los casos el modelo discreto mantiene las características de controlabilidad y observabilidad del modelo continuo, existen situaciones en donde esta condición se ve modificada .



Controlabilidad y Observabilidad.

Para determinar las restricciones impuestas al periodo de muestreo para conservar las condiciones de controlabilidad y observabilidad del sistema continuo se analiza el caso de un sistema de segundo orden con autovalores complejos conjugados.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x(t)$$

La matriz de la planta del modelo discreto para un T genérico resulta.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s + \sigma & \omega \\ -\omega & s + \sigma \end{bmatrix}$$

$$e^{AT} = e^{-\sigma T} \begin{bmatrix} \cos \omega T & \text{sen} \omega T \\ -\text{sen} \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix}$$



Controlabilidad y Observabilidad.

La matriz controlabilidad del modelo resultante es:

$$U = \begin{bmatrix} b_d & e^{AT} b_d \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} b_{1d} & e^{-\sigma T} (b_{1d} \cos \omega T + b_{2d} \operatorname{sen} \omega T) \\ b_{2d} & e^{-\sigma T} (-b_{1d} \operatorname{sen} \omega T + b_{2d} \cos \omega T) \end{bmatrix}$$

$$\det U = -e^{-\sigma T} \left(b_{2d}^2 \operatorname{sen} \omega T + b_{1d}^2 \operatorname{sen} \omega T \underbrace{-b_{1d} b_{2d} \cos \omega T + b_{1d} b_{2d} \cos \omega T}_0 \right)$$

$$\det U = -e^{-\sigma T} (b_{2d}^2 + b_{1d}^2) \operatorname{sen} \omega T = 0$$

$$\operatorname{sen} \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{k}{2} \frac{2\pi}{T} = k \frac{\omega_s}{2}$$

Si la parte imaginaria de los polos complejos conjugados es múltiplo de la mitad de la frecuencia de muestreo se pierde la controlabilidad.



Controlabilidad y Observabilidad.

Por su parte, la matriz observabilidad del modelo es:

$$V = \begin{bmatrix} c_d \\ c_d e^{AT} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} c_{1d} & c_{2d} \\ e^{-\sigma T} (c_{1d} \cos \omega T - c_{2d} \operatorname{sen} \omega T) & e^{-\sigma T} (c_{1d} \operatorname{sen} \omega T + c_{2d} \cos \omega T) \end{bmatrix}$$

$$\det V = e^{-\sigma T} (c_{1d}^2 + c_{2d}^2) \operatorname{sen} \omega T = 0$$

$$\operatorname{sen} \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{k}{2} \frac{2\pi}{T} = k \frac{\omega_s}{2}$$

Si la parte imaginaria de los polos complejos conjugados es múltiplo de la mitad de la frecuencia de muestreo se pierde la observabilidad.

