TEORÍA DE CONTROL

Especificaciones de Respuesta en el Tiempo

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Al momento de especificar la respuesta en el tiempo de un sistema de control, existen ciertos parámetros que definen el comportamiento.

Dependiendo de si la respuesta en el tiempo para una entrada en escalón tiene sobrepico o no se puede dividir en

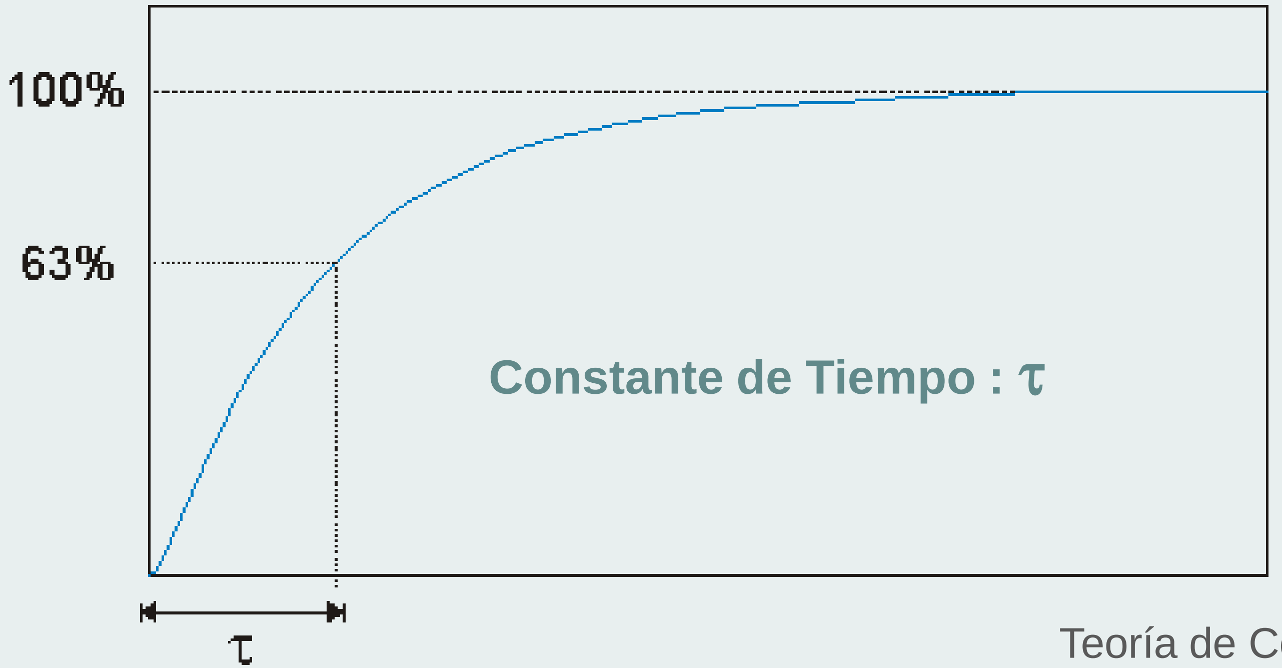
Sobreamortiguada

Subamortiguada

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Respuesta sobreamortiguada : Esta respuesta es característica de sistemas con polos reales.

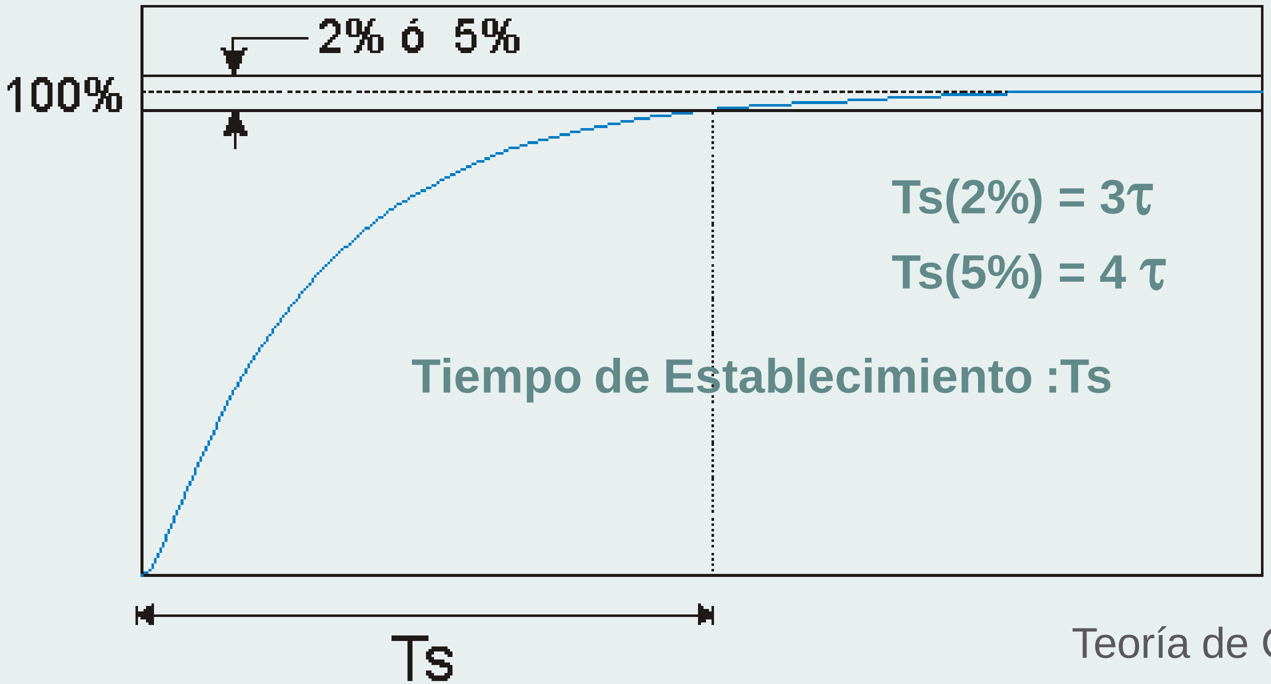
Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

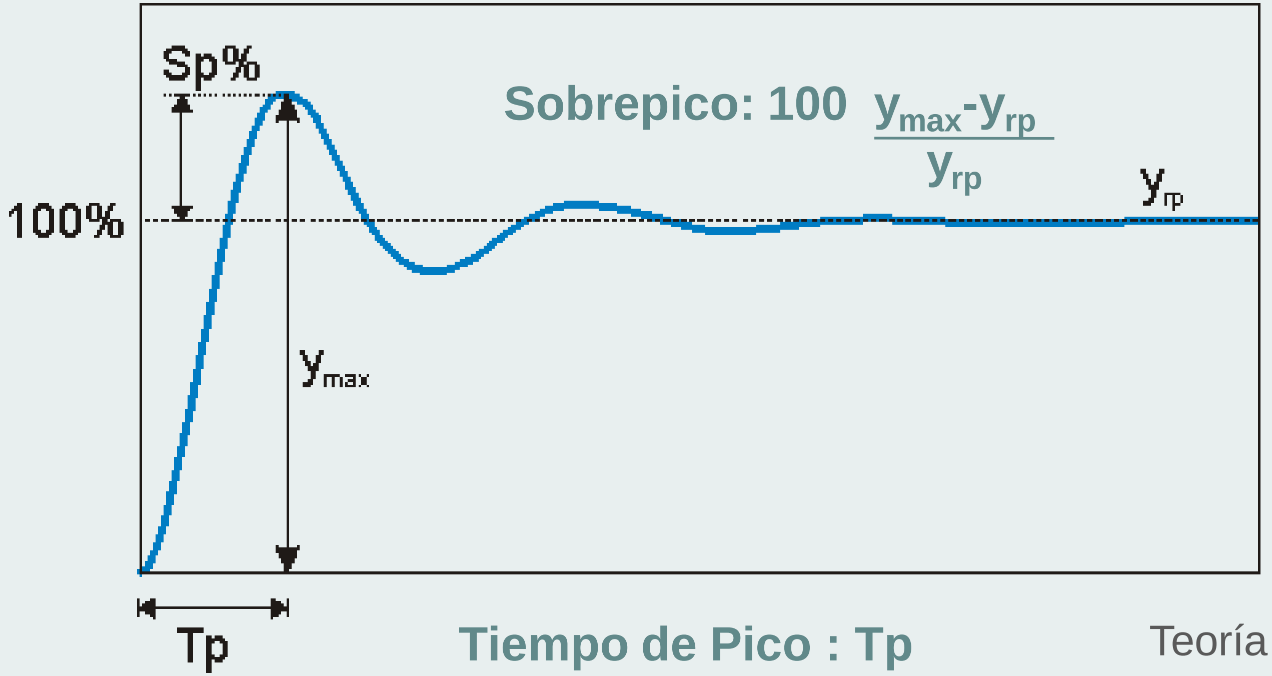
Respuesta sobreamortiguada : Esta respuesta es característica de sistemas con polos reales.

Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

<u>Respuesta subamortiguada</u>: Esta respuesta es característica de sistemas con polos complejos conjugados. Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



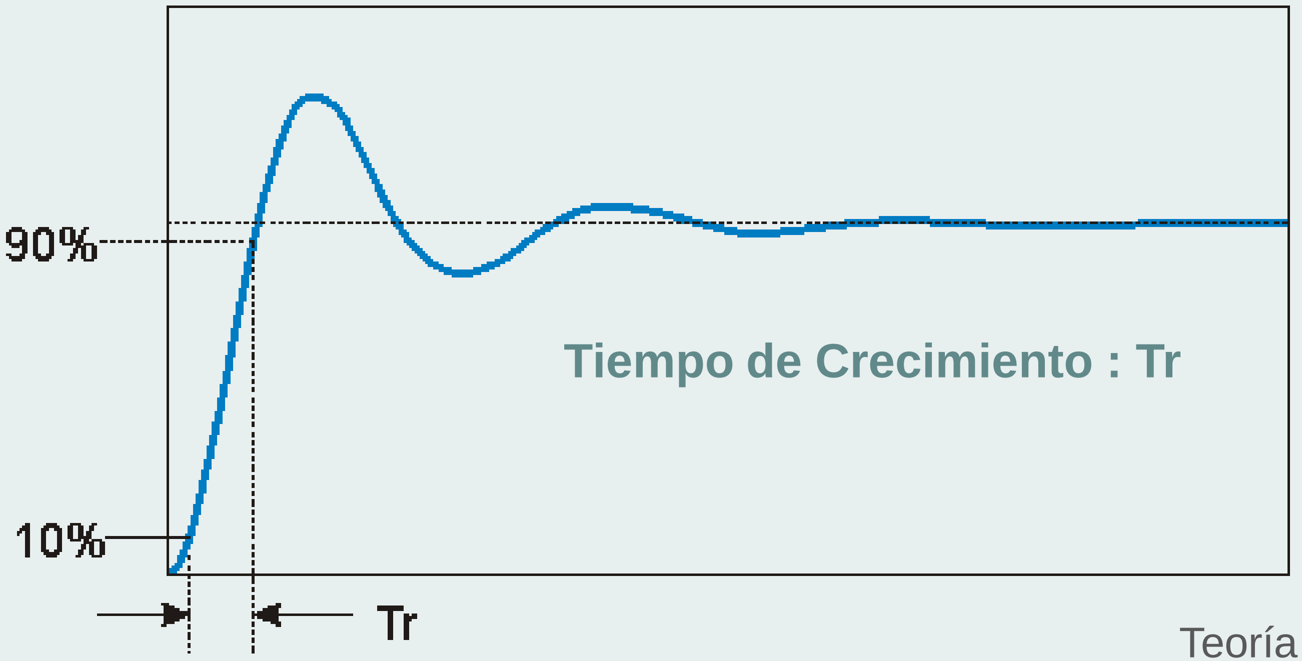
Sobrepico: $100\,\frac{y_{max}-y_{rp}}{y_{rp}}$

Tiempo de Pico : Tp

Parámetros de la Respuesta Temporal.

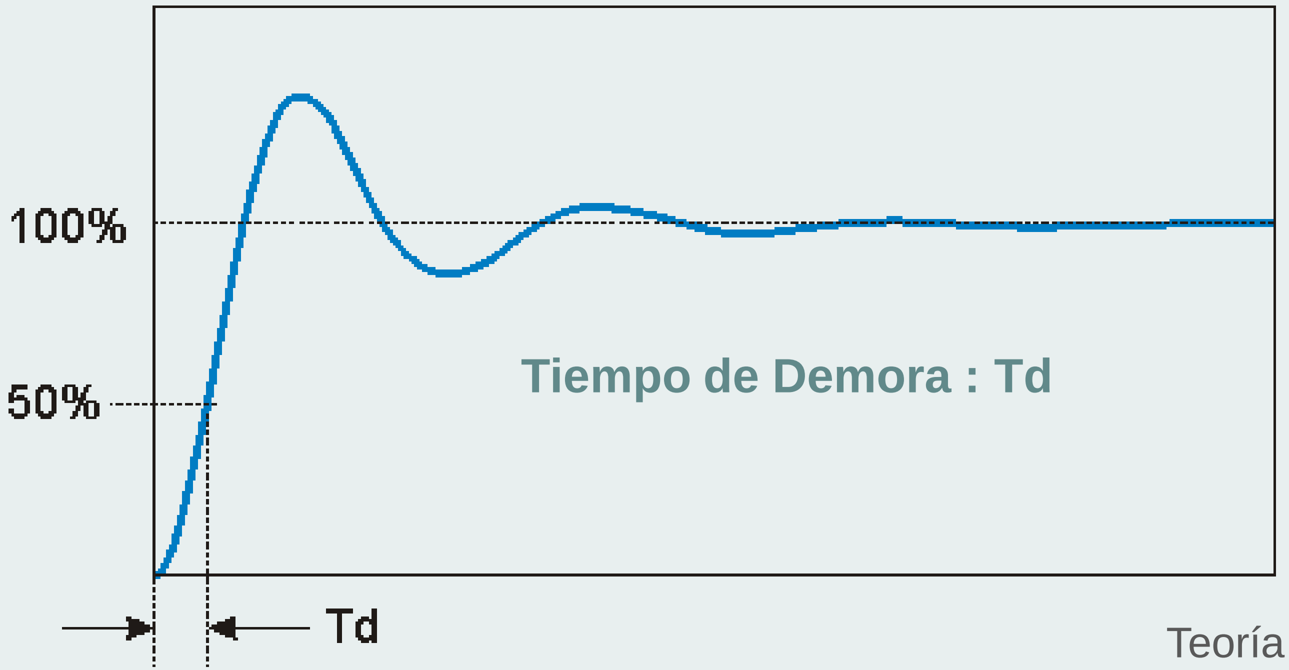
<u>Respuesta subamortiguada</u> : Esta respuesta es característica de sistemas con polos complejos conjugados.

Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



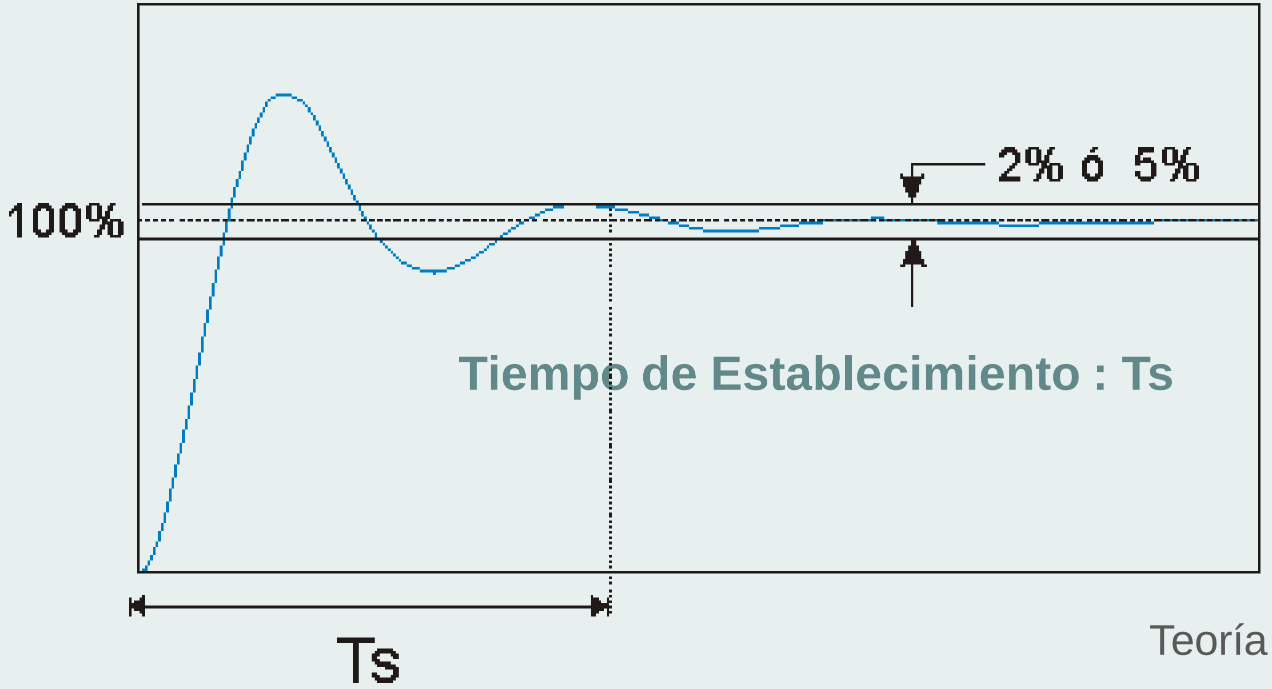
Parámetros de la Respuesta Temporal.

<u>Respuesta subamortiguada</u> : Esta respuesta es característica de sistemas con polos complejos conjugados. Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

<u>Respuesta subamortiguada</u> : Esta respuesta es característica de sistemas con polos complejos conjugados. Los parámetros que generalmente se especifican para caracterizar esta respuesta son:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

Los parámetros correspondientes a la respuesta transitoria se pueden calcular con suficiente precisión en sistemas de segundo orden a partir del coeficiente de amortiguamiento ξ y de la frecuencia natural ω_n .

La función de transferencia de un sistema de segundo orden, con ganancia unitaria, se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\ \xi\ \omega_n\ s + \omega_n^2}$$

Si el coeficiente de amortiguamiento ξ es mayor o igual a 1 la transferencia tiene polos reales y si es menor a 1 los polos son complejos conjugados.

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Los polos de la función de transferencia resultan:

$$s = -\xi\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Si ξ<1, la raíz cuadrada da resultados imaginarios y por lo tanto los polos son complejos conjugados.

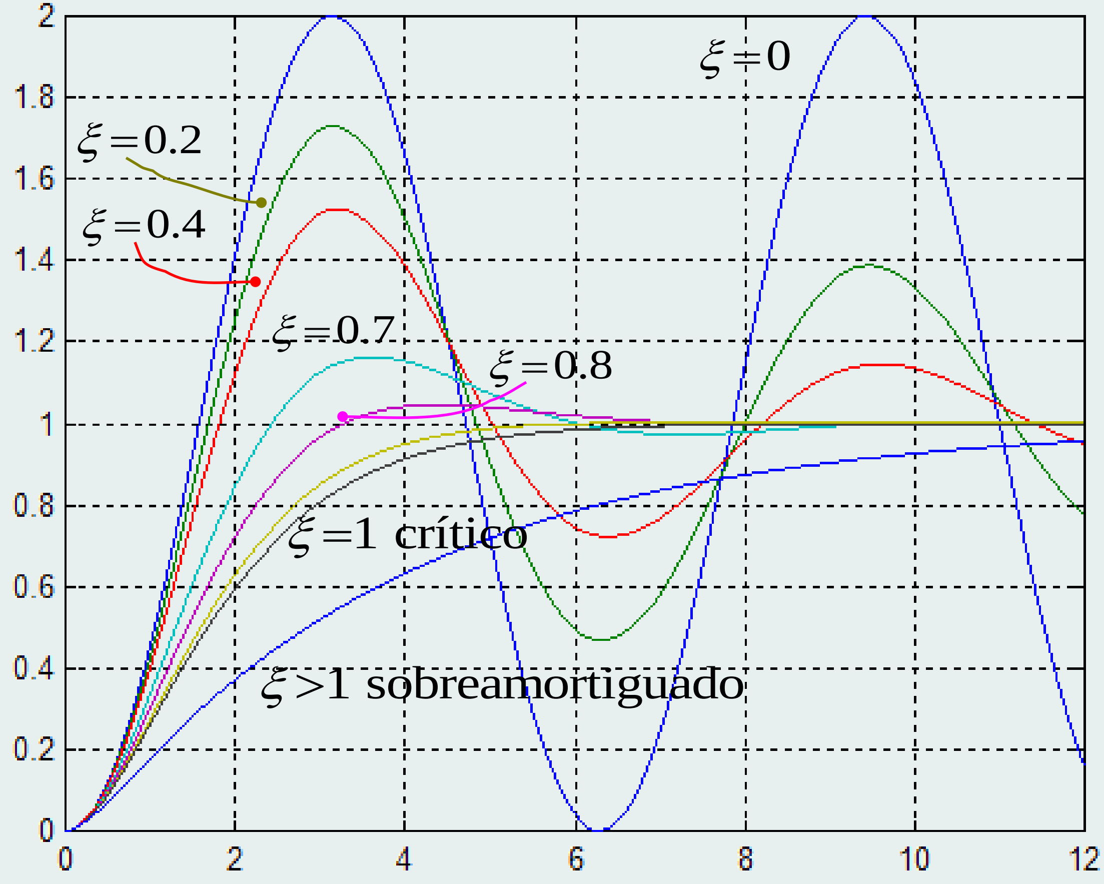
La respuesta para una entrada en escalón, con ξ<1, tiene la siguiente expresión:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\, sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\; t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \qquad (t \geq 0)$$

Esta respuesta es subamortiguada y a partir de ella se van a calcular los parámetros

Parámetros de la Respuesta Temporal.

La figura muestra la respuesta para distintos coeficientes de amortiguamiento:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

El tiempo correspondiente al sobrepico Tp se puede calcular derivando la expresión de la salida e igualando a cero.

$$\frac{d}{dt}y(t)=0$$

Esta condición tiene el primer máximo en:

$$Tp=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

El valor de la salida para este instante es:

$$y_{\max}=1-e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

El Sobrepico porcentual da como resultado:

$$SP\ [\%] = 100\ e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

El tiempo de Crecimiento se calcula como:

$$Tr = \frac{7.04\xi^2 + 0.2}{2\ \xi\ \omega_n}$$

El tiempo de Demora resulta:

$$Td = \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

La constante de tiempo se calcula como:

$$\tau = \frac{1}{\xi \ \omega_n}$$

El tiempo de Establecimiento se calcula teniendo en cuenta el término exponencial:

Para el 5% de tolerancia:

$$Ts = \frac{3}{\xi \ \omega_n}$$

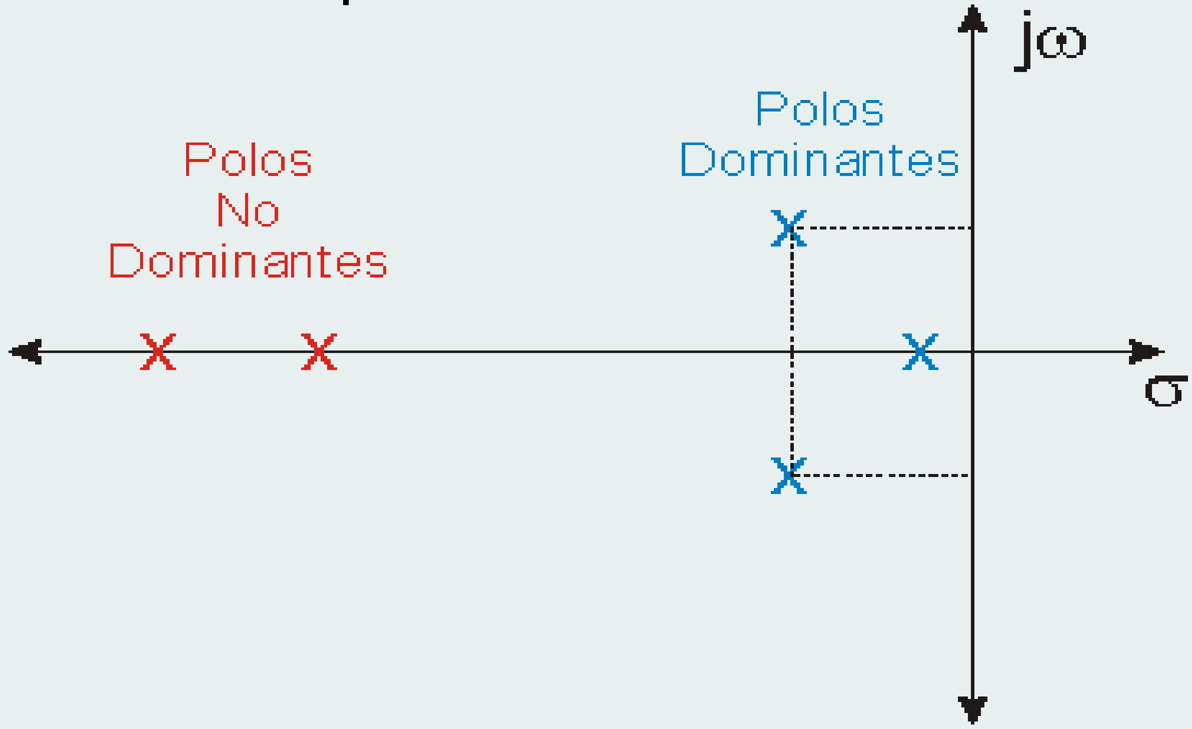
Para el 2% de tolerancia:

$$Ts = \frac{4}{\xi \ \omega_n}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Polos Dominantes:

Los polos de la transferencia de un sistema que están más próximos al eje imaginario son los que determinan generalmente la respuesta transitoria.

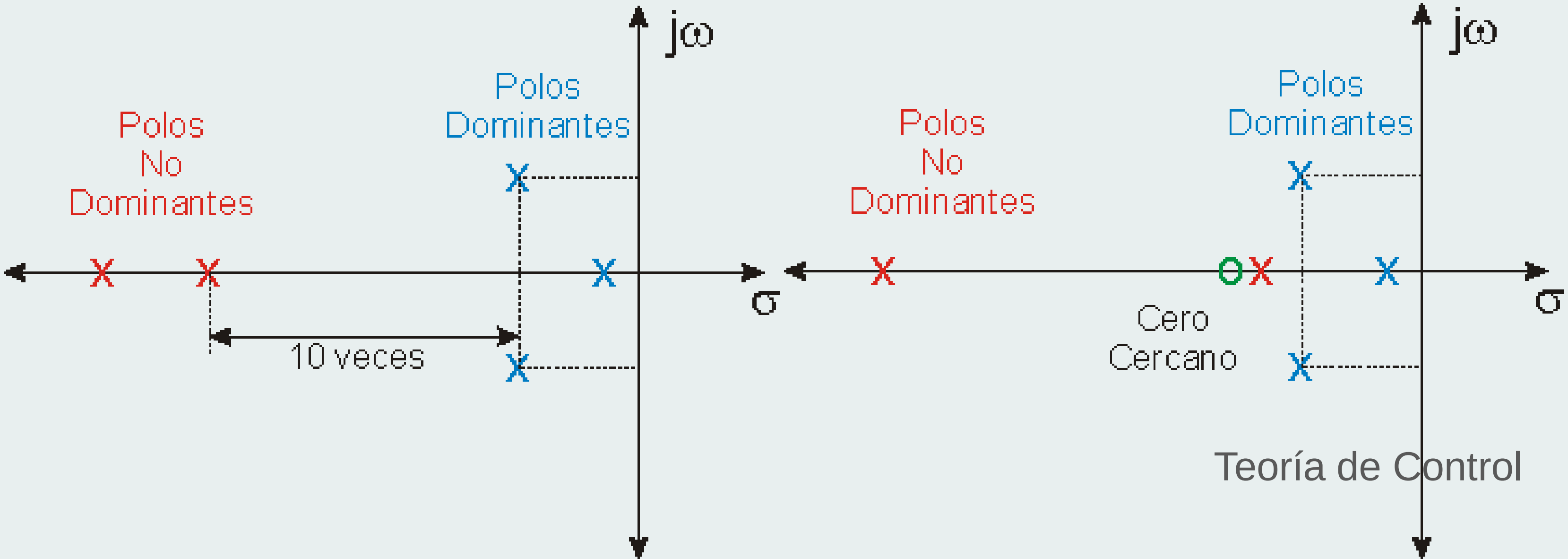


Parámetros de la Respuesta Temporal.

Polos Dominantes

Para que un polo de la función de transferencia sea no dominante pueden ocurrir dos situaciones:

- Que la parte real del polo sea al menos 10 veces mayor que parte real del polo de baja frecuencia más cercano.
- Que haya un cero muy próximo a la ubicación del polo.



Parámetros de la Respuesta Temporal.

Función de Transferencia Deseada:

Dadas ciertas especificaciones se puede determinar una transferencia de segundo orden que cumpla con esas especificaciones.

En el caso que se requiera un sistema de orden mayor, lo que se hace es determinar un par de polos para cumplir con las especificaciones y ubicar el resto de los polos en posiciones no dominantes.

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Ejemplo:

Encuentre una transferencia de tercer orden que tenga una respuesta al escalón con las siguientes especificaciones:

- Ganancia = 10.
- Soprepico Sp[%]= 10%
- Tiempo de estalecimiento Ts[2%] = 0,5 seg.

Se va a diseñar una transferencia con un par de polos complejos conjugados y un polo en alta frecuencia

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Con el sobrepico especificado se calcula el coeficiente de amortiguamiento ξ.

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{SP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{SP}{100}\right)\right]^2}} = 0.5911$$

Con el coeficiente de amortiguamiento ξ calculado y el tiempo de establecimiento se calcula ω_n.

$$\omega_n = \frac{4}{\xi\ Ts} = 13.53\frac{rad}{seg}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

Se calculan los polos de segundo orden:

$$s_{1,2} = -\ \xi\ \omega_n \pm j\ \omega_n\ \sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2} = -\ 8 \pm j\ 10.9$$

Para determinar el tercer polo (no dominante) se multiplica por 10 la parte real de los complejos:

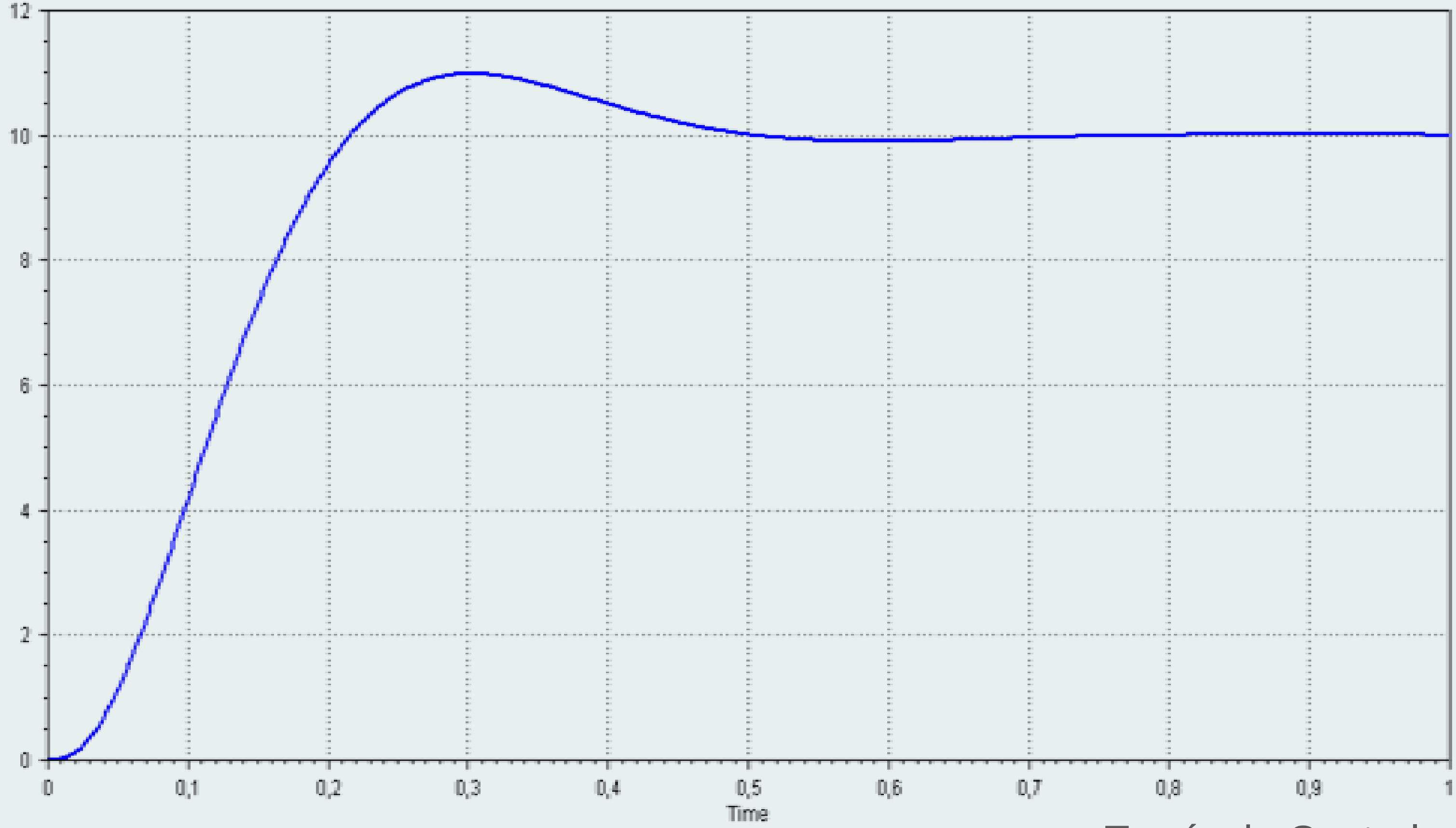
$$s_3 = -\ 10\ \xi\ \omega_n = -80$$

Finalmente la transferencia queda:

$$G(s) = \frac{(10)\cdot(183.1)\cdot(80)}{\left(s^2+16s+183.1\right)(s+80)} = \frac{1.464\cdot 10^5}{s^3+96s^2+1463s+1.464\cdot 10^4}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

La respuesta al escalón resulta:



Parámetros de la Respuesta Temporal.

SISTEMAS DISCRETOS

En el caso de tener que trabajar con transferencias discretas, generalmente se ubican los polos en el plano “s” y luego se transforma la transferencia al plano “z”.
Para poder determinar las especificaciones de un sistema de segundo orden discreto se recurre a la siguiente técnica.
Partiendo de la función de transferencia continua:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\ \xi\ \omega_n\ s + \omega_n^2}$$

Los polos de la función de transferencia resultan:

$$s_{1,2} = -\ \xi\ \omega_n \pm j\ \omega_n\ \sqrt{1-\xi^2}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

SISTEMAS DISCRETOS

Transformando los polos al plano z:

$$z_{1,2} = e^{sT} = e^{-\xi\omega_n T} \underline{\left| \pm\omega_n T\sqrt{1-\xi^2} \right.} = r\underline{\left| \pm\theta \right.}$$

Por consiguiente: $r = e^{-\xi\omega_n T}$ y $\theta = \omega_n T\sqrt{1-\xi^2}$

Despejando queda: $-\ln r = \xi\omega_n T$

Calculando:

$$-\frac{\ln r}{\theta} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Parámetros de la Respuesta Temporal.

SISTEMAS DISCRETOS:

Despejando ξ: $$\xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}}$$

Por lo tanto: $$\omega_n = \frac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}$$

La constante de tiempo queda: $$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{-T}{\ln r}$$