

TEORÍA DE CONTROL

Realimentación de Variables de Estado
Reasignación de Autovalores

Realimentación de Variables de Estado

Ley de Control

El estado de un sistema tiene incorporado toda la información necesaria para determinar la acción de control a ser tomada. Por definición de **Modelo de Estado** la evolución de la planta está determinada por el estado actual y la evolución futura de la entrada.

Un criterio razonable, determina que el control de la planta esté determinado por la referencia y el estado del sistema.

$$u(k) = f[r(k), x(k)]$$

Esta relación es llamada **Ley de Control**.

Dado que se están estudiando sistemas lineales, es también razonable plantear una Ley de Control lineal.

$$u(k) = A_0 [r(k) - K x(k)]$$

Donde K es una matriz de constantes reales llamada **Matriz de Ganancias de Realimentación**, y A_0 es una matriz diagonal de constantes llamada **Matriz de Ganancias de Control**



Realimentación de Variables de Estado

Modelo de la Planta Realimentada

Se considerará, primeramente, el caso de sistemas de una sola entrada y salida (SISO)

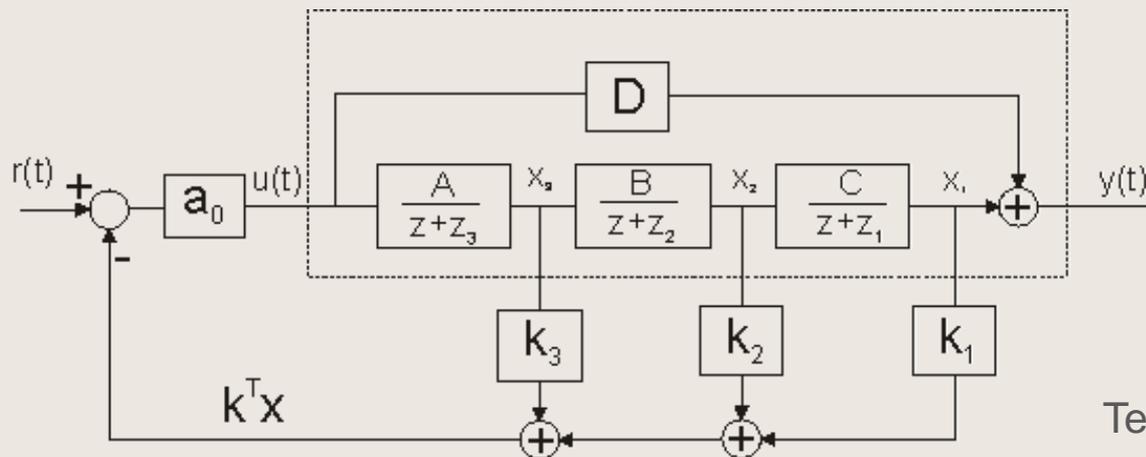
$$x(k+1) = A x(k) + b u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + d u(k)$$

La realimentación de estados debe interpretarse como una combinación lineal de las variables, es decir $k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k) + \dots$. Por lo tanto, la matriz de ganancias de realimentación es de la forma:

$$k^T = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n]$$

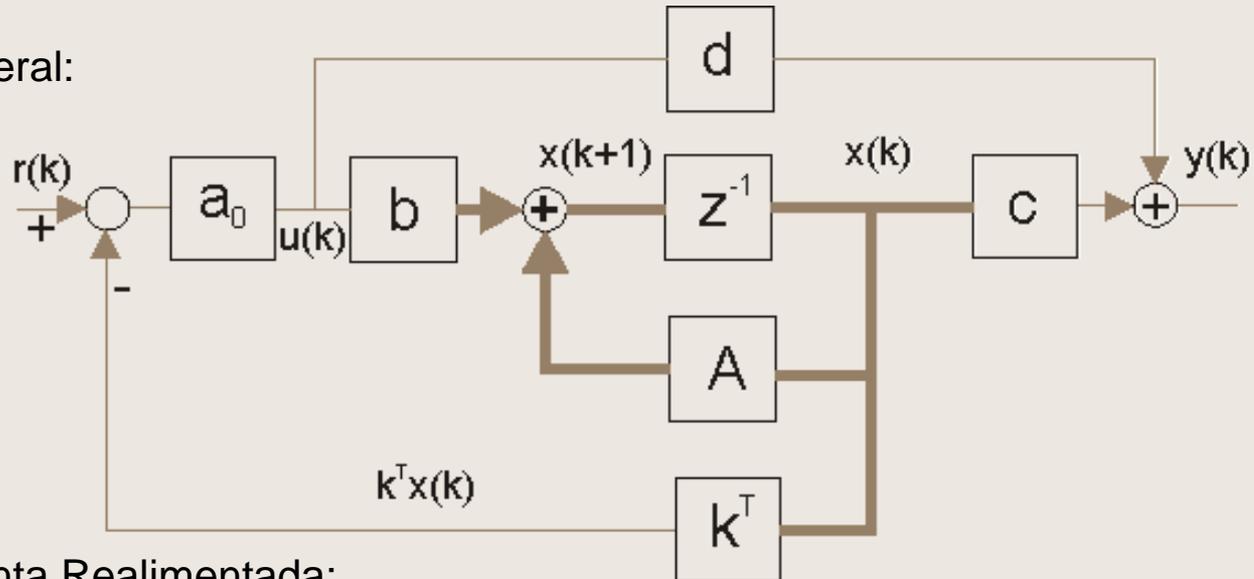
El diagrama muestra un ejemplo que evidencia lo antedicho:



Realimentación de Variables de Estado

Modelo de la Planta Realimentada

Para el caso general:



Modelo de la Planta Realimentada:

$$x(k+1) = A x(k) + b u(k) \quad , \quad u(k) = a_0 (r(k) - k^T x(k))$$

$$y(k) = C x(k) + d u(k)$$

$$x(k+1) = (A - b a_0 k^T) x(k) + b a_0 r(k)$$

$$y(k) = (C - d a_0 k^T) x(k) + d a_0 r(k)$$



Realimentación de Variables de Estado

Modelo de la Planta Realimentada

Los autovalores de la planta realimentada, son calculados a partir de :

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} A - b a_0 k^T \end{bmatrix}\right) = 0$$

Se puede demostrar que si la planta sin realimentar es **CONTROLABLE**, los autovalores de la planta realimentada se pueden reasignar a posiciones arbitrarias eligiendo convenientemente los valores de los elementos de k^T .

Reasignación de Autovalores

Caso SISO:

Para determinar las componentes del vector de realimentación y también para demostrar la anterior aseveración conviene disponer del modelo **Canónico Controlable**.

Sea Q_{cc} la transformación al modelo canónico controlable. Esta transformación puede escribirse de la siguiente forma:

$$Q_{cc} = U \bar{U}_{cc}^{-1} \quad \text{o} \quad Q_{cc}^{-1} = \bar{U}_{cc} U^{-1}$$

Donde U es la matriz de controlabilidad del modelo original y U_{cc} la matriz de controlabilidad del modelo canónico controlable.



Realimentación de Variables de Estado

Reasignación de Autovalores

Aplicando la transformación a la variable de estado: $x = Q_{cc} \bar{x}$ $y = \bar{c} \bar{x} + \bar{d} u(k)$

Las matrices del modelo se transforman en: $\bar{A} = Q_{cc}^{-1} A Q_{cc}$ $\bar{b} = Q_{cc}^{-1} b$ $\bar{c} = c Q_{cc}$ $\bar{d} = d$

Entonces el modelo transformado queda de la forma:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \cdots \quad c_{n-1} \quad c_n] \bar{x}(k) + \bar{d} u(k)$$

Donde los a_i son los coeficientes del polinomio característico de la planta

$$\det(zI - A) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1$$



Realimentación de Variables de Estado

Reasignación de Autovalores

Mediante una realimentación de variables de estado se tendrá:

$$u(k) = a_0 \left(r(k) - k^T x(k) \right) = a_0 \left(r(k) - k^T Q_{cc} \bar{x}(k) \right) = a_0 \left(r(k) - \bar{k}^T \bar{x}(k) \right)$$

Por lo tanto las ganancias para realimentar las variables de la planta original están en:

$$k^T = \bar{k}^T Q_{cc}^{-1}$$

Considerando $a_0 = 1$ y $\bar{k}^T = \left[\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \dots \quad \bar{k}_n \right]$ la matriz de la planta realimentada queda:

$$\bar{A} - \bar{b}\bar{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 & \dots & \bar{k}_n \end{bmatrix}$$



Realimentación de Variables de Estado

Reasignación de Autovalores

Desarrollando, tenemos la matriz de la planta del modelo canónico realimentado:

$$\bar{A} - \bar{b}\bar{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\left(a_1 + \bar{k}_1\right) & -\left(a_2 + \bar{k}_2\right) & -\left(a_3 + \bar{k}_3\right) & -\left(a_4 + \bar{k}_4\right) & \dots & -\left(a_{n-1} + \bar{k}_{n-1}\right) & -\left(a_n + \bar{k}_n\right) \end{bmatrix}$$

El modelo canónico controlable realimentado, tiene la misma forma canónica controlable pero ahora en la última fila, los elementos son de la forma $-(a_i + k_i)$ y a su vez son los coeficientes de la ecuación característica de la planta realimentada cambiados de signo.

Suponiendo **autovalores deseados** para la planta realimentada : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ el polinomio característico correspondiente resulta:

$$(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \alpha_{n-1} z^{n-2} + \cdots + \alpha_2 z + \alpha_1$$

Asignando los coeficiente de este polinomio a la última fila de la matriz realimentada, se ve que:

$$-\alpha_1 = -(a_1 + \bar{k}_1); -\alpha_2 = -(a_2 + \bar{k}_2); \dots; -\alpha_n = -(a_n + \bar{k}_n)$$



Reasignación de Autovalores

Por lo tanto el vector de realimentación se puede calcular como $\bar{k}_i = (\alpha_i - a_i)$ quedando:

$$\bar{k}^T = [(\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \quad \cdots \quad (\alpha_n - a_n)]$$

De esta forma hemos encontrado un vector de realimentación que asigna a posiciones arbitrarias los autovalores de la planta realimentada, para un sistema canónico controlable. Ahora bien, la realimentación se ha realizado sobre las variables del sistema canónico, pero como se vio con anterioridad la señal $u(k)$ debe resultar la misma independientemente del conjunto de variables que se realimente:

$$u(k) = (r(k) - k^T x(k)) = (r(k) - k^T Q_{cc} \bar{x}(k)) = (r(k) - \bar{k}^T \bar{x}(k))$$

Por lo tanto el vector de realimentación con las variables originales de la planta será:

$$k^T = \bar{k}^T Q_{cc}^{-1}$$

Finalmente, se ha demostrado que se pueden reasignar todos los autovalores de un sistema a posiciones arbitrarias, si el modelo de estado de la planta resulta controlable (ya que de otra forma no existiría el modelo canónico) y además se ha planteado un método para el cálculo del vector de realimentación.



Realimentación de Variables de Estado

Algoritmo para el cálculo del vector K

El problema puede ser planteado en los siguientes términos:

Dado el modelo de una planta controlable y un conjunto de autovalores arbitrarios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Hallar el vector $k^T = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$ tal que la matriz $A - b k^T$ tenga al conjunto $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ como sus autovalores.

Para ello se puede seguir los siguientes pasos:

- Hallar el polinomio característico de la matriz A

$$\det(zI - A) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1$$

- Hallar el polinomio cuyas raíces sea el conjunto de autovalores dado.

$$(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \alpha_{n-1} z^{n-2} + \dots + \alpha_2 z + \alpha_1$$

- Hallar el valor de \bar{k}^T

$$\bar{k}^T = [(\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \quad \cdots \quad (\alpha_n - a_n)]$$

- Hallar la matriz de transformación Q_{cc}^{-1}

$$Q_{cc}^{-1} = \bar{U}_{cc} U^{-1}$$

- Hallar el vector de realimentación k^T

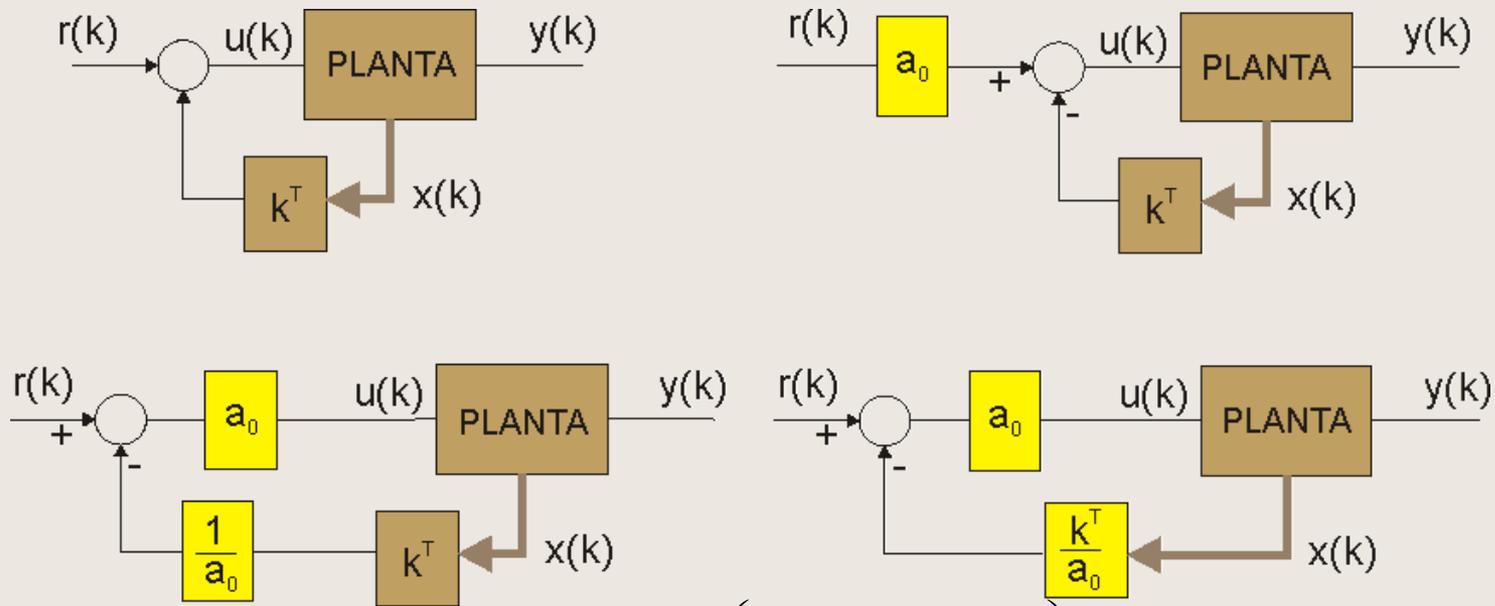
$$k^T = \bar{k}^T Q_{cc}^{-1}$$



Realimentación de Variables de Estado

Determinación de la ganancia del controlador

La inclusión de la ganancia del controlador permite magnificar o atenuar la ganancia de la transferencia a lazo cerrado. Sin embargo resulta más evidente la acción de esta ganancia observando la siguiente figura:



$$\text{De } u(k) = a_0 r(k) - k^T x(k) \text{ resulta } u(k) = a_0 \left(r(k) - \frac{k^T}{a_0} x(k) \right)$$

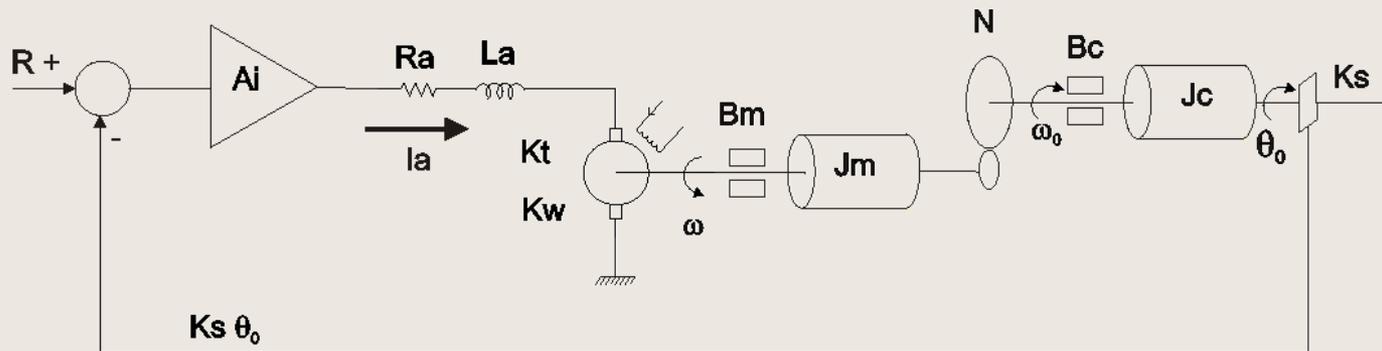
Para modificar la ganancia y no modificar los autovalores el vector de realimentación k^T se debe dividir por a_0



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

Suponga un sistema de control de posición como el que se indica en la figura:



Datos:

$$R_a = 7.94 \, \Omega$$

$$L_a = 1.54 \, \text{mH}$$

$$K_t = 39.3 \, \text{m Nm/A}$$

$$K_w = 4.12 \, \text{mV/rpm}$$

$$J_m = 26.6 \, \text{gr cm}^2$$

$$B_m = 0 \, \text{N.m.s/rad}$$

$$J_c = 48.5 \cdot 10^{-3} \, \text{kg m}^2$$

$$B_c = 660 \cdot 10^{-3} \, \text{N.m.s/rad}$$

$$N = 1 / 200$$

$$A_i = 10$$

$$K_s = 0.159 \, \text{V/rad}$$

Se pide hallar un algoritmo de control por realimentación de estados, de modo que, el sistema controlado posea las siguientes características:

- A lazo cerrado $y_{ss}/r_{ss}=1$ (ganancia en continua)
- Error nulo al escalón (sin incluir integradores en el controlador)
- Mantener la realimentación desde la salida con el sensor de ganancia K_s .
- A lazo cerrado, la respuesta transitoria debe presentar un coeficiente de amortiguamiento de 0.6 y una frecuencia natural de 5 r/s.



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

Modelo de estado continuo de la Planta:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_w}{L_a} \\ 0 & 0 & N \\ \frac{K_t}{J_{eq}} & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \theta_0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Ai}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$B_{eq} = N^2 B_c$$

$$J_{eq} = J_m + N^2 J_c$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0] x(t)$$

Reemplazando valores resulta:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5155.84 & 0 & -25.547 \\ 0 & 0 & 0.005 \\ 147.07 & 0 & -6.174 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \theta_0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6493.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

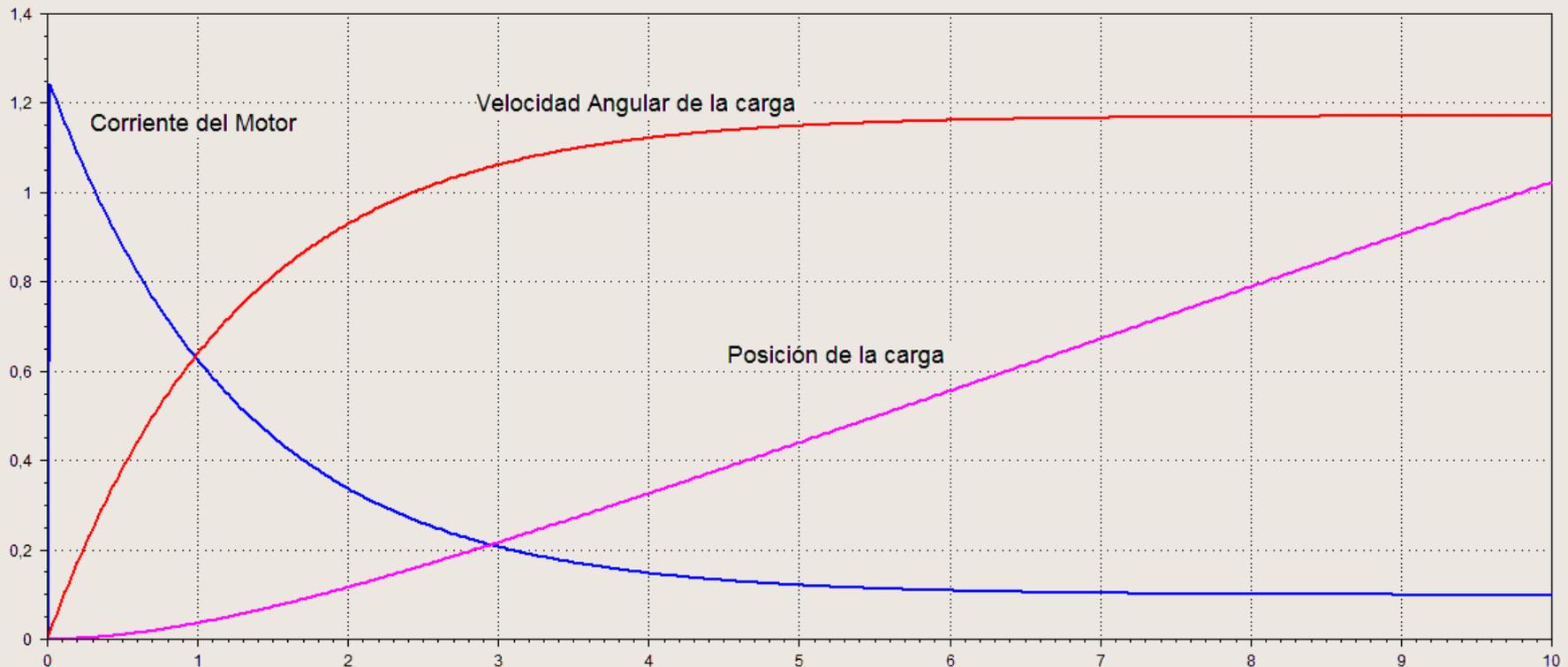
$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0] x(t)$$



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

La respuesta de las variables de la planta, para una entrada en escalón unitario, puede verse en la figura:



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

Dado que se debe realizar un controlador digital se discretiza el modelo de estado continuo con un período de muestreo $T_s = 0.1$ seg:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$y(k) = C_d x(k)$$

$$A_d = e^{AT_s}; \quad B_d = \int_0^{T_s} e^{A\lambda} B d\lambda; \quad C_d = C$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \theta_0(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3066 \cdot 10^{-4} & 0 & -4.5797 \cdot 10^{-3} \\ 1.369 \cdot 10^{-5} & 1 & 4.8081 \cdot 10^{-4} \\ 0.026365 & 0 & 0.9241 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \theta_0(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1715 \\ 4.495 \cdot 10^{-3} \\ 17.779 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1 \quad 0] x(k)$$

Los autovalores del modelo discreto resultan:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 0.92398$$

$$\lambda_3 = 2.179 \cdot 10^{-224} = 0$$



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

La matriz controlabilidad resulta:

$$U = \begin{bmatrix} 1.1715 & -0.08158 & -0.07538 \\ 4.49452 \cdot 10^{-3} & 0.01306 & 0.02097 \\ 17.779 & 16.4608 & 15.2095 \end{bmatrix} \quad \det[U] = -0.1846651$$

El modelo discreto resulta controlable.

Para hallar las ganancias de realimentación se debe determinar la ley de control.

$$u(k) = -k^T x(k) + K_i (r(k) - K_s y(k)) = K_i \left[r(k) - \left(\frac{k^T}{K_i} + K_s C \right) x(k) \right]$$
$$u(k) = K_i \left[r(k) - \frac{K_i^T}{K_i} x(k) \right]$$

Considerando inicialmente $K_i = 1$ el vector de realimentación K_i^T se puede resolver mediante el MCC.



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

El polinomio característico del modelo resulta: $\det[zI - A_d] = z^3 - 1.92398z^2 + 0.92398z$

Por lo tanto el Modelo Canónico Controlable se puede escribir como:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.92398 & 1.92398 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

La matriz controlabilidad del MCC resulta:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.92398 \\ 1 & 1.92398 & 2.7777 \end{bmatrix}$$

Finalmente se calcula la matriz de transformación:

$$Q_{cc}^{-1} = \bar{U} \cdot U^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8566571 & 112.28152 & -0.0848317 \\ -8.113915 \cdot 10^{-4} & 112.28152 & -0.0283310 \\ 7.902883 \cdot 10^{-4} & 112.28152 & 0.0278091 \end{bmatrix}$$



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

Las especificaciones dadas requieren una ubicación de los autovalores dominantes en :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -3 \pm 4j \quad s_3 = -10\xi\omega_n = -30$$

Los autovalores discretos son:

$$z_{1,2} = 0.68234 \pm 0.288488j \quad z_3 = 0.049787$$

El polinomio característico deseado resulta:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - 1.414z^2 + 0.6168z - 0.02732$$

El Vector de realimentación del modelo canónico:

$$\bar{K}_t^T = \left[(\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \quad (\alpha_3 - a_3) \right]$$

$$\bar{K}_t^T = \left[-0.0273 \quad -0.3072 \quad 0.5095 \right]$$



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

El vector de realimentación para el modelo original queda :

$$K_t^T = [-0.022755 \quad 19.6455 \quad 0.02519]$$

La Ganancia del sistema realimentado se calcula como:

$$A_0 = \left. \frac{Y}{R} \right|_{ss \Rightarrow z=1} = C_d \left[I - (A_d - B_d K_t^T) \right]^{-1} B_d = 0.050902$$

Como se requiere que el sistema tenga ganancia unitaria la ganancia K_i se calcula como:

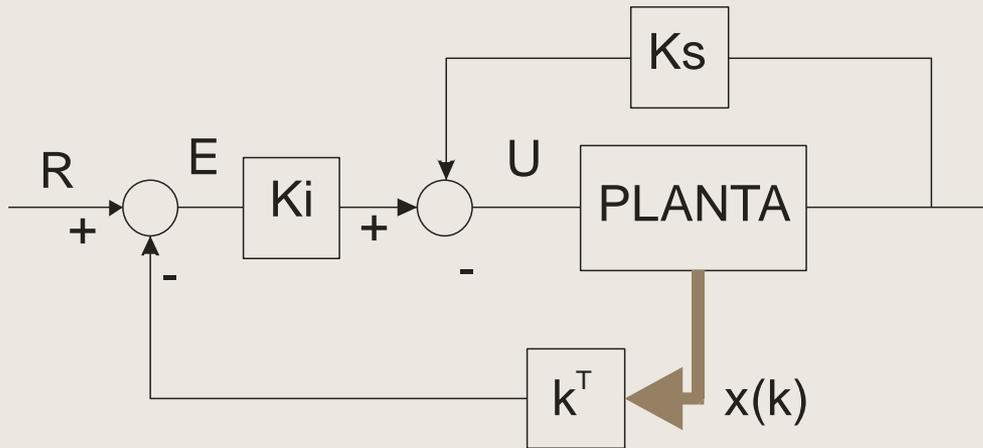
$$K_i = \frac{1}{A_0} = 19.6455$$



Realimentación de Variables de Estado

Ejemplo

El vector de realimentación para la configuración planteada:



$$u = K_i (r - k^T x) - K_s y$$

$$u = K_i \left(r - k^T x - \frac{K_s}{K_i} C x \right)$$

$$K_T^t = k^T x + \frac{K_s}{K_i} C$$

$$k^T = K_T^t - \frac{K_s}{K_i} C$$

$$k^T = [-0.0011528 \quad 0.987211 \quad 0.0012762]$$

$$K_i = 19.6455 \quad K_s = 0.159$$



Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

Si el modelo de la planta no realimentada es controlable, entonces existe un control $u(k)$ que transfiere el estado desde x_0 a x_1 , en un número de muestras determinado.

Luego si se elije :

$$r(k) = \frac{u(k)}{a_0} + k^T x(k)$$

Esta entrada, aplicada al modelo realimentado producirá sobre la planta el mismo control $u(k)$ anterior y transferirá el estado de x_0 a x_1 ,

Por lo tanto, si el modelo original k^T es controlable, entonces el modelo de estado realimentado, será controlable para cualquier vector .

Como $r(k)$ no controla directamente las variables de estado, sino a través de la señal $u(k)$. Entonces si la planta sin realimentar resulta no controlable la planta realimentada, tampoco será controlable.



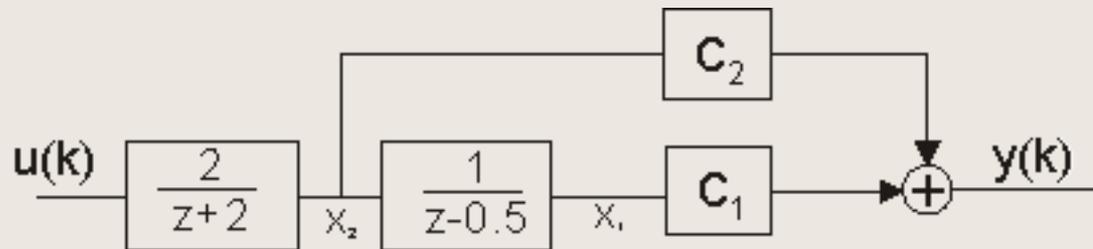
Realimentación de Variables de Estado

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

Suponiendo una planta sin realimentar **observable** se pueden dar las siguientes situaciones :

- Si la Planta corresponde a un sistema SISO y no posee ceros, entonces el modelo realimentado resultará observable.
- Si la planta corresponde a un sistema SISO con ceros, la observabilidad puede verse modificada por la realimentación.

Supongamos un sistema representado en el siguiente diagrama:



$$Y(z) = C_2 \frac{2}{(z+2)} U(z) + C_1 \frac{2}{(z+2)} \frac{1}{(z-0.5)} U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2C_2(z-0.5) + 2C_1}{(z+2)(z-0.5)}$$



Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

El modelo de estado resulta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_2}{U} &= \frac{2}{(z+2)} \Rightarrow zX_2 + 2X_2 = 2U \\ \frac{X_1}{X_2} &= \frac{1}{(z-0.5)} \Rightarrow zX_1 - 0.5X_1 = X_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [C_1 \quad C_2] x(k) \end{aligned}$$

El sistema es inestable debido a que tiene un polo en $z=-2$.

La matriz controlabilidad resulta: $U = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$; $\text{rango}[U] = 2$

Si $C_1 = 0$ o $C_1/C_2 = 2.5$ habrá una cancelación de un polo y por lo tanto el sistema resultará inobservable.



Realimentación de Variables de Estado

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

a) $C_1 = 2.5$ $C_2 = 1$

La transferencia resulta:
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B = \frac{2}{(z - 0.5)}$$

Siendo el modelo controlable, al haber una cancelación el modelo es inobservable.

Si se realimenta para obtener un par de autovalores en 0.5 y 0.8 el vector de realimentación

resulta $k^T = [0 \ -1.4]$ y $A_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ la función de transferencia resulta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2(z - 2)}{(z - 0.5)(z - 0.8)}$$

Y por lo tanto la planta realimentada se ha vuelto observable.



Realimentación de Variables de Estado

Controlabilidad y Observabilidad bajo Realimentación

b) $C_1 = 1.4$ $C_2 = 1$

La transferencia resulta:
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B = \frac{2(z + 0.9)}{(z - 0.5)(z + 2)}$$

En este caso no hay cancelación de polos, por lo tanto el sistema es observable.

Si se realimenta para obtener un par de autovalores en 0.5 y -0.9 el vector de realimentación

resulta $k^T = [0 \ -0.55]$ y $A_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$

La función de transferencia resulta:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{2}{(z - 0.5)}$$

Y por lo tanto la planta realimentada se ha vuelto inobservable.

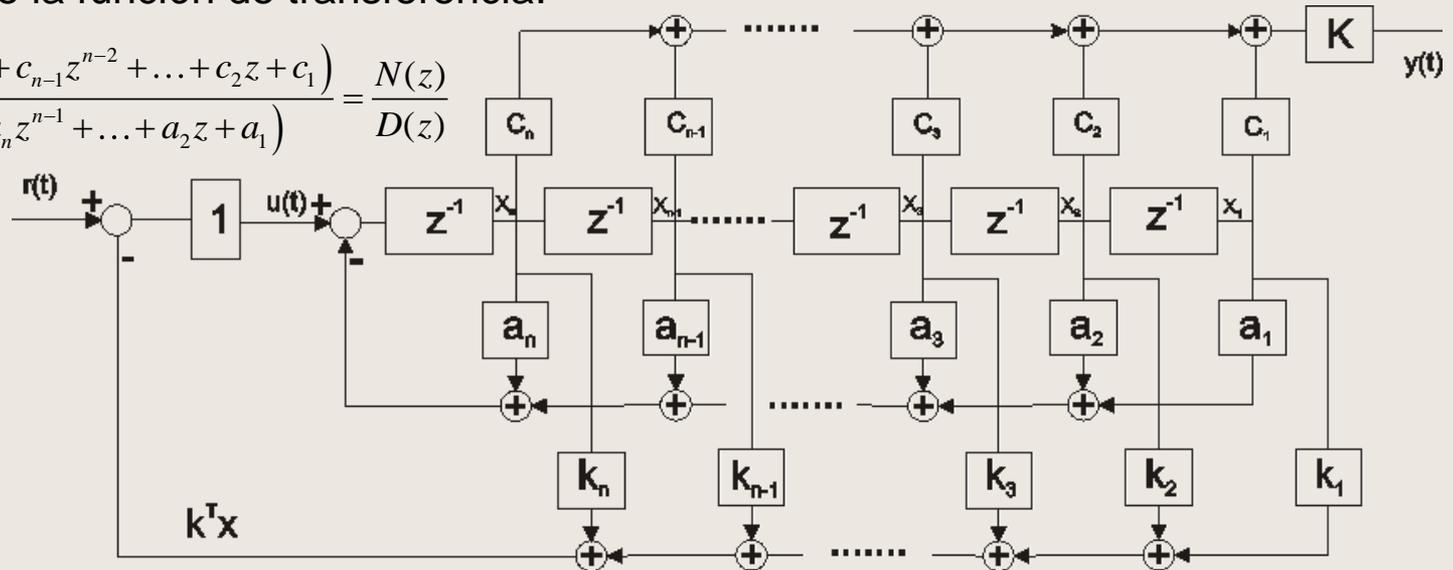


Realimentación de Variables de Estado

Ceros de la Función de Transferencia

En el desarrollo anterior se ha puesto atención en la ubicación de los polos de la ecuación de transferencia de un sistema SISO, ya que de ellos depende la respuesta del sistema. Sin embargo nada se ha dicho respecto de que tipo de comportamiento van a tener los ceros. Para analizar el comportamiento de los ceros se hace uso del modelo canónico controlable obtenido a partir de la función de transferencia.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K(c_n z^{n-1} + c_{n-1} z^{n-2} + \dots + c_2 z + c_1)}{(z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$



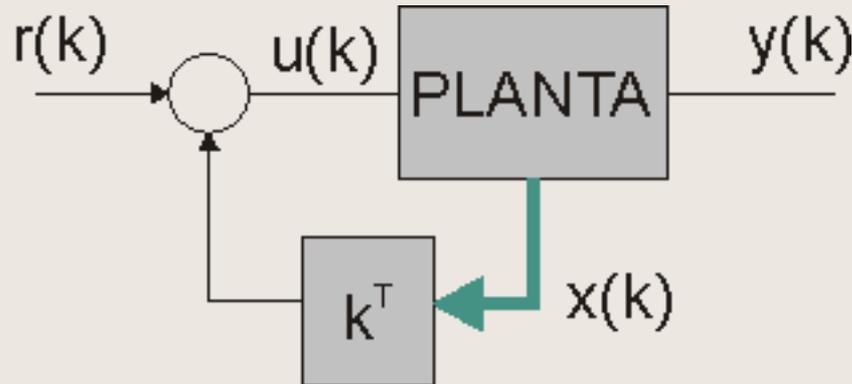
Como puede verse al agregar la realimentación solamente modifica los coeficientes a_i y por lo tanto el denominador de la transferencia $D(z)$, y no altera el valor de los coeficientes c_i de $N(z)$. Por lo tanto la realimentación de estado no afecta la ubicación de los ceros, para un sistema SISO.



Realimentación de Variables de Estado

Estabilidad con realimentación de estados

Si bien la realimentación de estados reasigna los autovalores de lazo cerrado a posiciones arbitrarias, esta ubicación puede cambiar ante variaciones de la ganancia de la planta hasta el punto de hacer inestable al sistema. Para determinar esta situación se debe analizar la estabilidad relativa (por ej. mediante diagramas de Bode), para lo cual se requiere conocer la transferencia de lazo abierto del sistema.



La transferencia de lazo abierto tiene como entrada a $u(k)$ y como salida a $k^T x(k)$.



Estabilidad con realimentación de estados

Aplicando transformada Z al modelo de estado con condiciones iniciales nulas resulta:

$$X(z) = [zI - A]^{-1} BU(z)$$

Entonces la transferencia de lazo abierto resulta:

$$GH(z) = k^T [zI - A]^{-1} B$$

Desarrollando esta transferencia resulta de la siguiente forma:

$$GH(z) = \frac{k^T \text{Adj}[zI - A] B}{\det(zI - A)}$$

Esta transferencia tiene los mismos polos que la planta, sin embargo posee (n-1) ceros cuya posición dependen del valor de k^T . Estos ceros permiten que la trayectoria de los polos ante variaciones de la ganancia pasen, para un valor unitario, por la posición deseada para lazo cerrado.



TEORÍA DE CONTROL

Realimentación de Variables de Estado
Sistemas No Controlables

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Dado un sistema SISO:

$$x(k+1) = A x(k) + b u(k)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

La matriz **Controlabilidad** del modelo :

$$U = \left[b \mid Ab \mid A^2b \mid \dots \mid A^{n-1}b \right]$$

es de rango: $Rg[U] = j < n$ (con $n =$ número de estados).

En estas condiciones, debido a que el sistema no es totalmente controlable, no se pueden reasignar todos los autovalores del modelo por realimentación de estados.



SISTEMAS NO CONTROLABLES

A partir de la situación planteada, se presentan los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son las variables de estado no controlables?
- ¿Se pueden reasignar algunos autovalores?
- ¿Si es posible, cuáles?
- ¿Se puede estabilizar el sistema por realimentación de variables de estados aunque el sistema sea no controlable?



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Si $Rg[U] = j < n$ entonces, se puede demostrar que la matriz U tiene las primeras j columnas linealmente independientes (LI).

A partir de esta propiedad, se construye una matriz Q como sigue:

$$Q = \left[\underbrace{b \mid Ab \mid A^2b \mid \dots \mid A^{j-1}b}_{j \text{ Columnas LI de } U} \mid \underbrace{q_1 \mid q_2 \mid \dots \mid q_{n-j}}_{(n-j) \text{ Columnas LI}} \right]$$

La matriz Q , debido a que todas sus columnas son LI, es no singular y por lo tanto, $Rg[Q] = n$

Ahora si se define la siguiente transformación lineal: $x(k) = Q \hat{x}(k)$

$$\text{Queda: } \hat{A} = Q^{-1}AQ \quad \hat{b} = Q^{-1}b \quad \hat{c} = cQ$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El modelo resultante de aplicar la transformación tiene la siguiente forma:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_{\substack{\underbrace{\quad}_{j} & \underbrace{\quad}_{n-j}}} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} (k) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\underbrace{\quad}_{j} \\ \underbrace{\quad}_{n-j}}} u(k)$$

Las $(n-j)$ variables x_n son no controlables ya que dependen de si mismas y no dependen de la entrada; en consecuencia, las variables x_c resultan controlables.

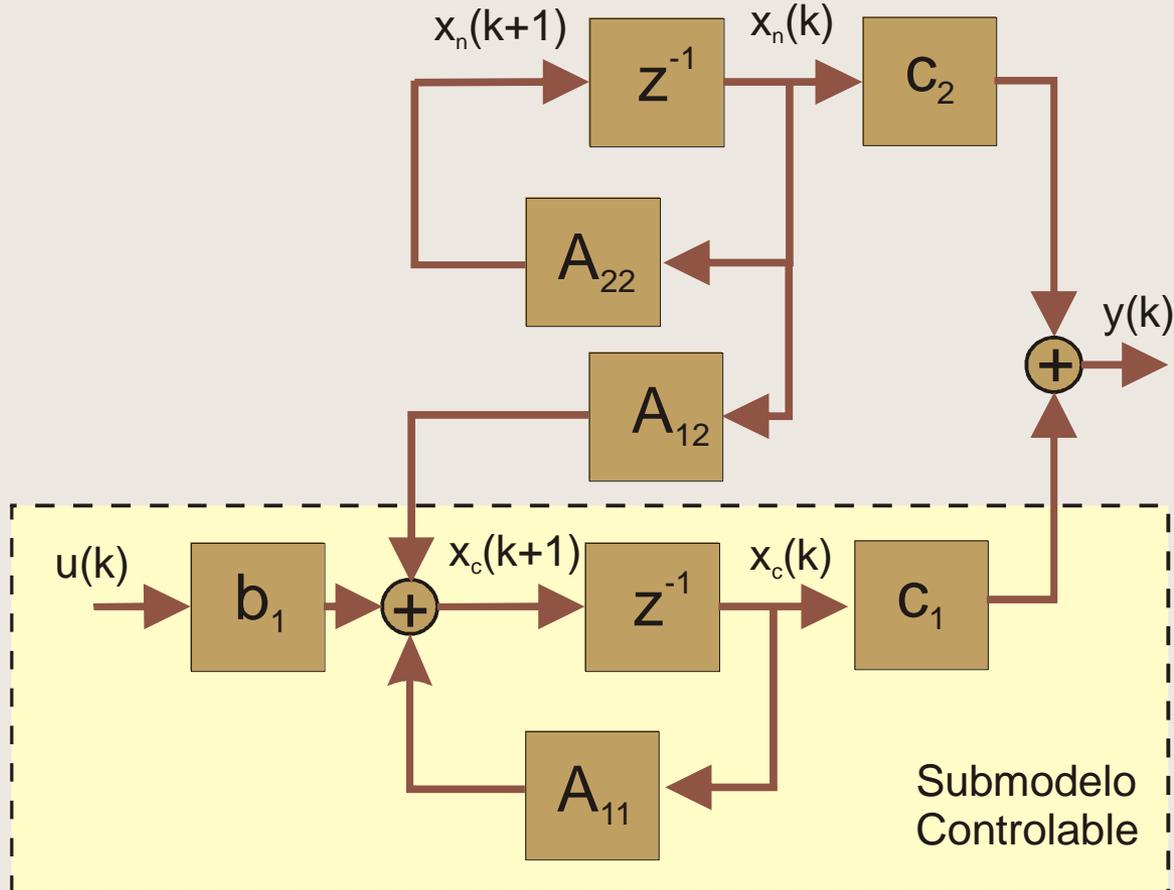
- La matriz A_{11} contiene los autovalores controlables del modelo, es decir los reasignables.
- La matriz A_{22} contiene los autovalores no controlables del modelo y por lo tanto no reasignables.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La situación de las variables de estado, respecto de su controlabilidad, puede verse representada en el siguiente gráfico.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La respuesta de las variables no controlables depende exclusivamente de los autovalores de la matriz A_{22} , es decir que si estos autovalores son estables estas variables tenderán a cero, caso contrario el comportamiento de estas variables será inestable y esta situación abarcará a todo el modelo.

Ahora, el par $[A_{11}, b_1]$ es controlable, por lo tanto se puede plantear una ecuación de estado para el submodelo controlable:

$$x_c(k+1) = A_{11} x_c(k) + b_1 u(k)$$

Sobre este modelo se puede encontrar un vector k_c , que reasigne los autovalores a posiciones arbitrarias por los métodos conocidos. Esta realimentación, no provocará ningún efecto sobre el comportamiento de las variables no controlables.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Luego de la realimentación, el submodelo controlable resulta:

$$x_c(k+1) = (A_{11} - b_1 k_c) x_c(k) + b_1 r(k)$$

El acoplamiento de las variables no controlables a través de la matriz A_{12} no modifica los autovalores de este submodelo y que puede ser considerada una perturbación ; del mismo modo si se realiza una realimentación de estas variables.

El vector k_c tiene j componentes por lo tanto para aplicarlo al modelo completo debo llevarlo a n componentes. Agrego $(n-j)$ ceros al final correspondientes a las variables no controlables.

$$\hat{k} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & n-j \\ k_c & & 0 \dots 0 \end{bmatrix}}_n$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El vector \hat{k} reasigna los autovalores controlables del modelo con variables \hat{x} .

Para reasignar los autovalores del modelo original se debe transformar el vector mediante la transformación Q

$$k^T = \hat{k} Q^{-1}$$

ETABILIZABILIDAD

Si los autovalores de la matriz A_{22} resultan estables se dice que el sistema **no es controlable** pero es **estabilizable**, ya que si el modelo tuviese autovalores inestables estos pueden ser reasignados por realimentación.



SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ahora bien, en todo momento se trabajó con las variables no controlables del modelo transformado entonces, ¿cuáles son las variables controlables del modelo original?.

La transformación lineal $x(k) = Q \hat{x}(k)$ se puede expresar como una combinación lineal de las variables del modelo transformado:

$$\begin{cases} x_1(k) = q_{11}\hat{x}_1(k) + q_{12}\hat{x}_2(k) + \dots + q_{1n}\hat{x}_n(k) \\ x_2(k) = q_{21}\hat{x}_1(k) + q_{22}\hat{x}_2(k) + \dots + q_{2n}\hat{x}_n(k) \\ \dots \\ x_n(k) = q_{n1}\hat{x}_1(k) + q_{n2}\hat{x}_2(k) + \dots + q_{nn}\hat{x}_n(k) \end{cases}$$

Aquellas variables que resulten solamente combinación lineal de las $(n-j)$ últimas variables, es decir la no controlables, resultarán incontrolables. El resto serán controlables.



SISTEMAS NO CONTROLABLES

Por lo tanto:

- Se pueden resignar tantos autovalores como el rango de la matriz controlabilidad U .
- Los autovalores reasignables son los de la matriz A_{11}
- Las variables no controlables son aquellas que resultan solamente combinación lineal de las variables no controlables de \hat{x} .
- Un sistema resulta estabilizable si los autovalores de A_{22} son estables.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

RESUMEN:

- Hallar la matriz controlabilidad U y calcular el rango.
- Si resulta no totalmente controlable, construir la matriz Q y aplicar la transformación al modelo.
- Hallar el vector de realimentación k_c del submodelo controlable (p.e. transformando al M.C.C.)
- Ampliar el vector de realimentación para las variables no controlables.
- Transformar el vector de realimentación al modelo original.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de nivel de líquidos en el cual se desea controlar el nivel h_2 actuando sobre el caudal Q_2 . Se va a considerar al caudal Q_1 como una perturbación.

$$A_1 = 12 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 45 \text{ m}^2$$

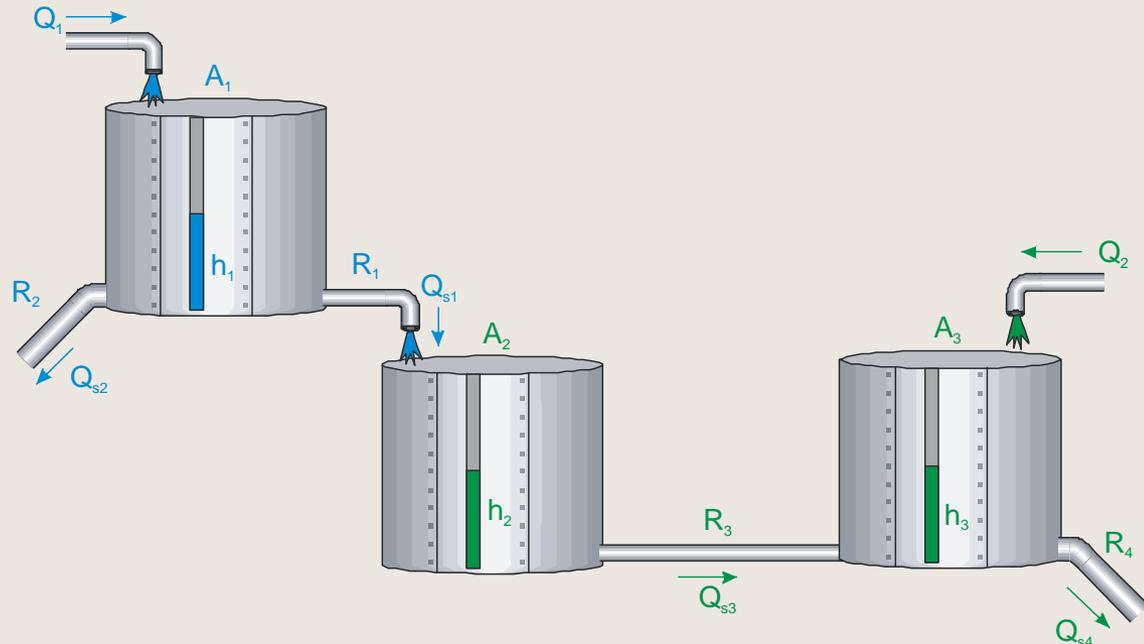
$$A_3 = 15 \text{ m}^2$$

$$R_1 = 120 \text{ seg /m}^2$$

$$R_2 = 360 \text{ seg /m}^2$$

$$R_3 = 72 \text{ seg /m}^2$$

$$R_4 = 300 \text{ seg /m}^2$$



Analice la posibilidad de utilizar una realimentación de estado para lograr un control con las siguientes especificaciones : Sobrepico 5% y Tiempo de Establecimiento : 3000 seg.

Considere que para controlar el caudal se utiliza una válvula con ganancia $K_q=0.007\text{m}^3/\text{V}$.

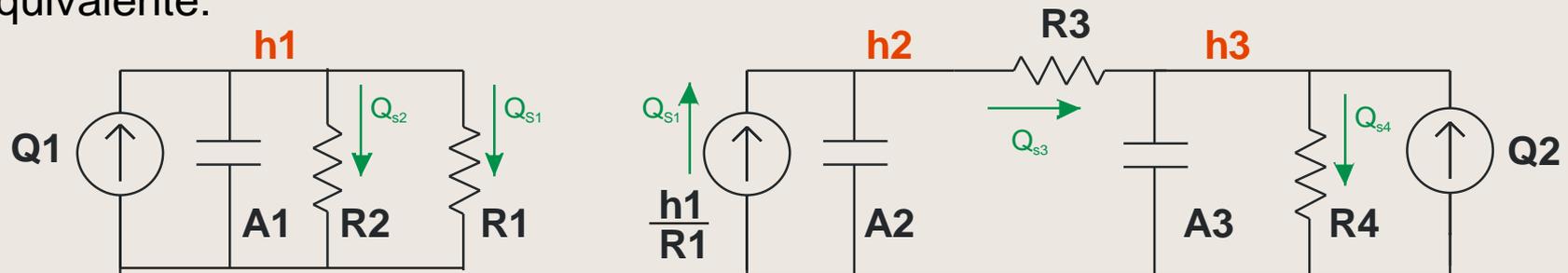


Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Ejemplo:

El modelo de estado de la planta se puede extraer del circuito eléctrico equivalente:



Aplicando nodos se extraen las ecuaciones diferenciales:

$$Q_1 = A_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{R_1} + \frac{h_1}{R_2}$$

$$\frac{h_1}{R_1} = A_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2 - h_3}{R_3}$$

$$Q_2 + \frac{h_2 - h_3}{R_3} = A_3 \frac{dh_3}{dt} + \frac{h_3}{R_4}$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

El modelo de estado continuo de la planta es:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{A_2 R_3} & \frac{1}{A_2 R_3} \\ 0 & \frac{1}{A_3 R_3} & -\frac{1}{A_3} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las constantes queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.259 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 1.852 \times 10^{-4} & -3.086 \times 10^{-4} & 3.086 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.259 \times 10^{-4} & -1.148 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.333 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$y = h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

El caudal Q_2 se va a controlar a partir de una válvula. Por lo tanto $Q_2 = 0.007 * u(t)$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

Se muestrea con un periodo $T=10s$, entonces el modelo de estado discreto es :

$$\begin{bmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \\ h_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9908 & 0 & 0 \\ 1.84 \times 10^{-3} & 0.9969 & 3.064 \times 10^{-3} \\ 8.506 \times 10^{-6} & 9.192 \times 10^{-3} & 0.9886 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8295 & 0 \\ 7.684 \times 10^{-4} & 7.167 \times 10^{-6} \\ 2.367 \times 10^{-6} & 4.64 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad respecto la entrada u_2 es:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7.167 \times 10^{-6} & 2.1362 \times 10^{-5} & 3.5352 \times 10^{-5} \\ 4.64 \times 10^{-3} & 4.5872 \times 10^{-3} & 4.5351 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 2. El sistema no es totalmente controlable.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

La matriz de transformación para separar las variables controlables puede ser :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7.167 \times 10^{-6} & 2.1362 \times 10^{-5} & 0 \\ 4.64 \times 10^{-3} & 4.5872 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

Se utiliza el modelo solamente con la entrada Q_2 . El modelo transformado con la matriz Q resulta:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2.2 \times 10^{-16} & -0.9855 & -127.4 \\ 1 & 1.986 & 128.9 \\ 0 & 0 & 0.9908 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \times 10^{-16} \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = h_2 = \begin{bmatrix} 7.167 \times 10^{-6} & 2.136 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

El sub-modelo controlable agregando la válvula de control es:

$$x_c(k+1) = \begin{bmatrix} 2.2 \times 10^{-16} & -0.9855 \\ 1 & 1.986 \end{bmatrix} x_c(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \times 10^{-16} \end{bmatrix} u(k)$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS NO CONTROLABLES

En base a las especificaciones se determina que los autovalores deseados son:

$$z_1 = 0.9867 + 0.0138j \quad y \quad z_2 = 0.9867 - 0.0138j$$

El vector de realimentación para el sub- modelo controlable es:

$$k_c^T = [0.0122 \quad 0.0124]$$

El vector de realimentación para el modelo transformado es:

$$\hat{k}^T = [0.0122 \quad 0.0124 \quad 0]$$

El vector de realimentación para el modelo original es:

$$k^T = [0 \quad 22.6870 \quad 2.5972]$$

Se ajusta la ganancia del controlador para que el sistema a lazo cerrado gane 1. Entonces queda:

$$A_0 = 25.7603 \quad y \quad k_0^T = \frac{k^T}{A_0} = [0 \quad 0.8807 \quad 0.1008]$$



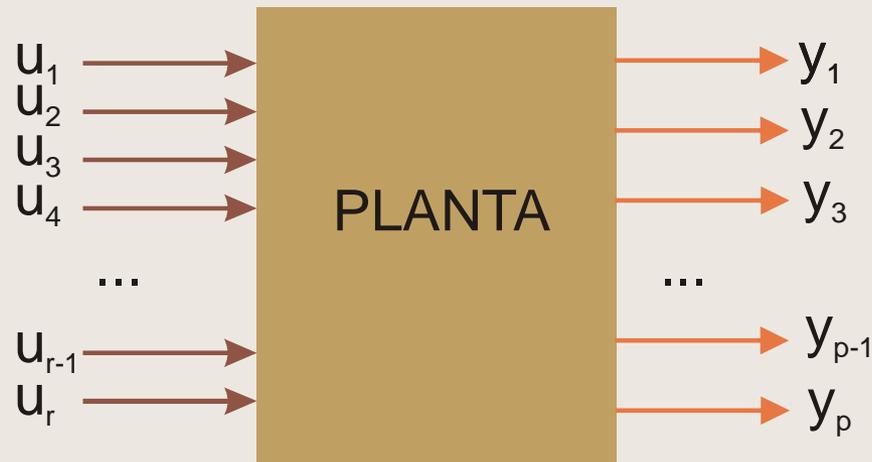
TEORÍA DE CONTROL

Realimentación de Variables de Estado
Sistemas MIMO Controlables

Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Considere un sistema , representado mediante variables de estado en el cual existen múltiples entradas.



Es decir que:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

En donde las dimensiones de B son $[n \times r]$.

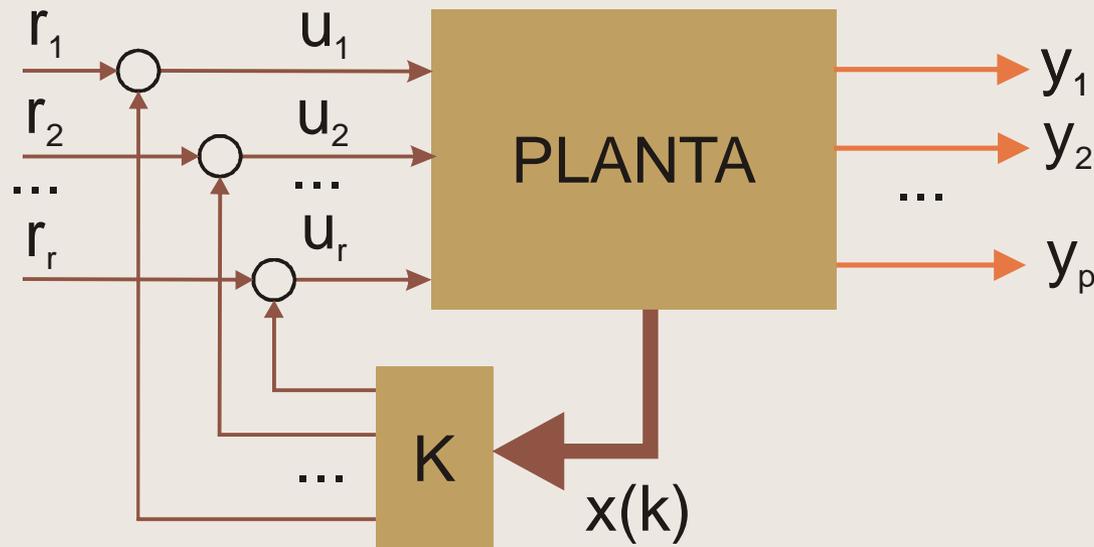
El sistema se considera controlable desde las r entradas.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

En el caso de plantear una realimentación de estados sobre todas las entradas con una ley de control $u(k) = r(k) - Kx(k)$



La matriz K tiene dimensiones $[r \times n]$.

Si el objetivo es reasignar los “ n ” autovalores del sistema, existen infinitas matrices K que cumplen con ese objetivo.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Analizando el problema:

Si el sistema es controlable puedo reasignar todos los autovalores.

Pero, ¿Cuántas entradas necesito para que el sistema sea controlable?

La matriz B esta formada por “r” columnas, cada una correspondiente a una entrada.

$$B = \left[b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_r \right]$$

Se puede calcular la matriz controlabilidad para cada entrada en particular.

Para el caso de la entrada u_i será:

$$U_i = \left[b_i \mid Ab_i \mid A^2b_i \mid \dots \mid A^{n-1}b_i \right]$$

Si el rango de alguna de estas U_i resulta ser “n”, el problema se puede resolver con una solución SISO. En este caso, realimentando solamente sobre la entrada en cuestión reasigno todos los autovalores del sistema.

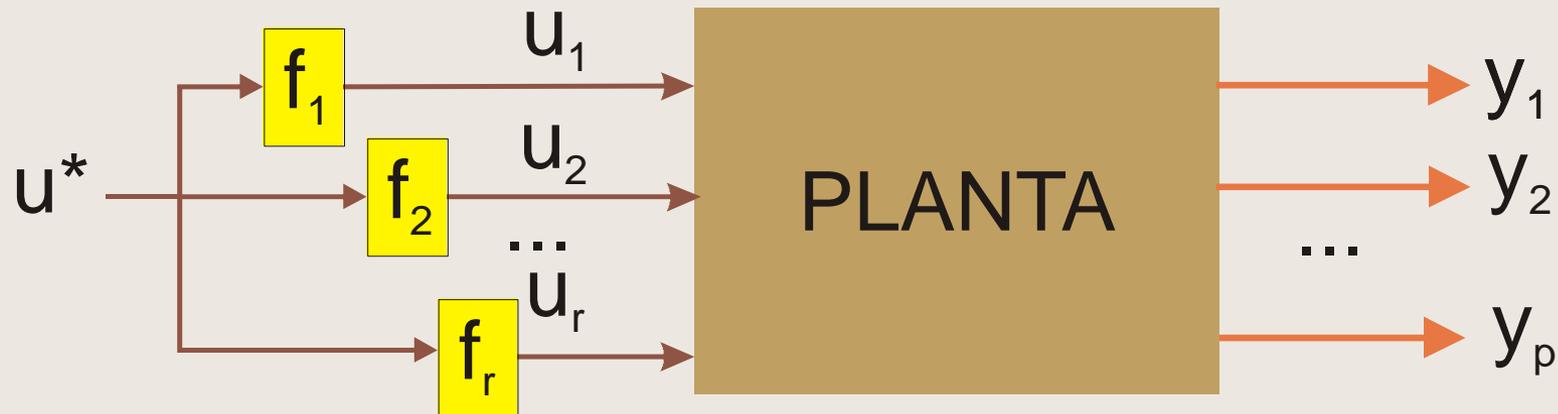


Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Si no se da la situación anterior, hay que encontrar el **mínimo número** de entradas que hacen al sistema controlable. Esta cantidad está dada por el rango de la matriz B.

En caso de necesitar más de una entrada para que el sistema resulte controlable, se plantea la siguiente solución:



Se considera una entrada u^* (entrada ficticia), de modo que cada una de las entradas del modelo resulte proporcional a u^* .



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = f_1 u^* \\ u_2 = f_2 u^* \\ \dots \\ u_r = f_r u^* \end{array} \right\} \text{ es decir: } u(k) = F u^*(k) \text{ con } f_1, f_2, \dots, f_r \text{ arbitrarios.}$$

Entonces, reemplazando $u(k)$ en el modelo de estado queda:

$$x(k+1) = A x(k) + B F u^*(k)$$

Ahora, el modelo resulta de una sola entrada, con un vector $b^* = B F$

Se debe cumplir que la matriz controlabilidad para la nueva entrada:

$$U^* = \begin{bmatrix} b^* & | & A b^* & | & \dots & | & A^{n-1} b^* \end{bmatrix}$$

tenga rango n :

$$\text{Rg}[U^*] = n$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Por lo tanto, se deben elegir las constantes f_i de modo que se mantenga la controlabilidad.

A partir de esta modificación, se obtiene un sistema SISO totalmente controlable y se pueden reasignar todos los autovalores del modelo, realimentando las variables de estado sobre u^* .

Se puede calcular el vector k^{T*} por el método del MCC para reasignar los autovalores.

La matriz A de la planta realimentada resulta: $A_r = (A - b^* k^{T*})$

Reemplazando b^* queda: $A_r = (A - BFk^{T*})$

$$A_r = (A - BK)$$

La matriz K que reasigna los autovalores resulta $K = F k^{T*}$. Es decir que todas las filas de K resultan proporcionales de acuerdo al valor de f_i asignado



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Ejemplo:

La figura muestra un sistema de nivel de líquidos en el cual se desea controlar el nivel h_2 actuando sobre los caudales Q_1 y Q_2

$$A_1 = 12 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 45 \text{ m}^2$$

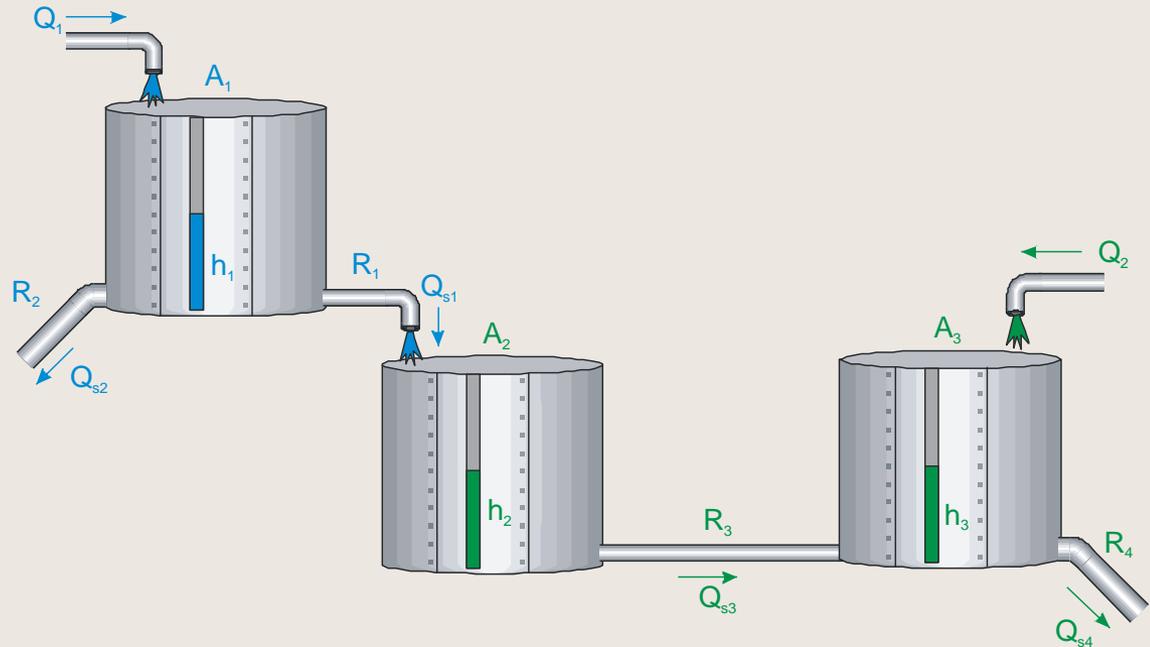
$$A_3 = 15 \text{ m}^2$$

$$R_1 = 120 \text{ seg /m}^2$$

$$R_2 = 360 \text{ seg /m}^2$$

$$R_3 = 72 \text{ seg /m}^2$$

$$R_4 = 300 \text{ seg /m}^2$$



Analice la posibilidad de utilizar una realimentación de estado para lograr un control con las siguientes especificaciones : Sobrepico 5% y Tiempo de Establecimiento : 3000 seg.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

El modelo hallado en el desarrollo del ejemplo de sistemas no controlables con entradas Q_1 y Q_2 resulta:

$$\begin{bmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \\ h_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9908 & 0 & 0 \\ 1.84 \times 10^{-3} & 0.9969 & 3.064 \times 10^{-3} \\ 8.506 \times 10^{-6} & 9.192 \times 10^{-3} & 0.9886 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005806 & 0 \\ 5.379 \times 10^{-6} & 7.167 \times 10^{-6} \\ 1.657 \times 10^{-8} & 4.64 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$y = h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad del sistema considerando las dos entradas es:

$$U = \begin{bmatrix} 5.806 \times 10^{-3} & 0 & 5.7529 \times 10^{-3} & 0 & 5.6999 \times 10^{-3} & 0 \\ 5.3799 \times 10^{-6} & 7.1668 \times 10^{-6} & 1.605 \times 10^{-5} & 2.1362 \times 10^{-5} & 2.6589 \times 10^{-5} & 3.535 \times 10^{-5} \\ 1.657 \times 10^{-8} & 4.640 \times 10^{-3} & 1.152 \times 10^{-7} & 4.587 \times 10^{-3} & 3.1036 \times 10^{-7} & 4.535 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 3



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Se define el vector de transformación para la entrada ficticia como: $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto la nueva matriz de entrada resulta:

$$B^* = BF = \begin{bmatrix} 0.005806 & 0 \\ 5.379 \times 10^{-6} & 7.167 \times 10^{-6} \\ 1.657 \times 10^{-8} & 4.64 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.80641 \times 10^{-3} \\ 1.254587 \times 10^{-5} \\ 4.640017 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad para la entrada ficticia es:

$$U^* = \begin{bmatrix} 5.80641 \times 10^{-3} & 5.752895 \times 10^{-3} & 5.699874 \times 10^{-3} \\ 1.254587 \times 10^{-5} & 3.741112 \times 10^{-5} & 6.1940 \times 10^{-5} \\ 4.640017 \times 10^{-3} & 4.587278 \times 10^{-3} & 4.535369 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

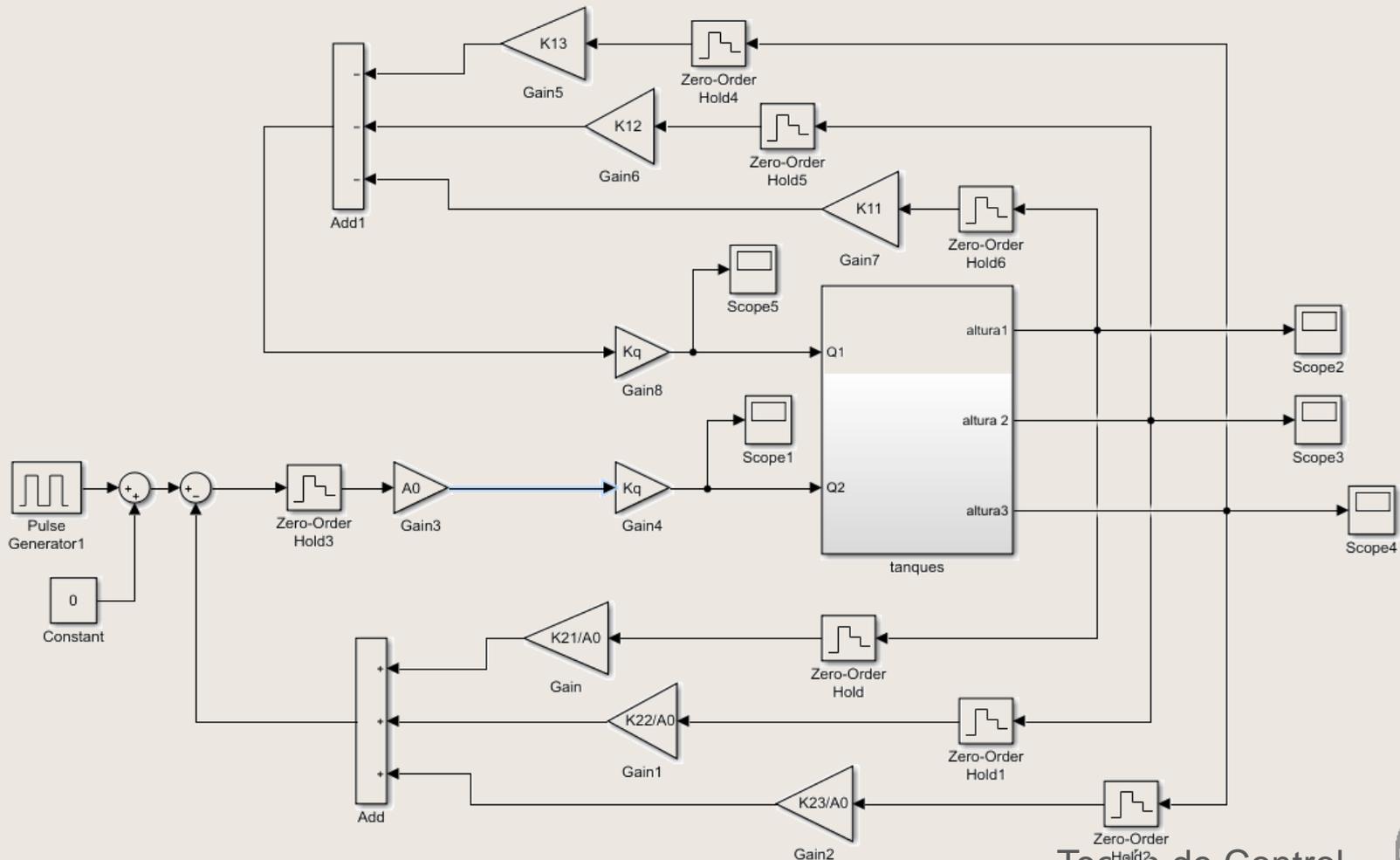
El rango de esta matriz controlabilidad es 3.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

Se va a utilizar el siguiente esquema de realimentación:



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

En base a las especificaciones se determina que los autovalores deseados son:

$$z_1 = 0.9867 + 0.0138j \quad y \quad z_2 = 0.9867 - 0.0138j$$

Se agrega un tercer autovalor en: $z_3 = 0.875173$

El vector de realimentación para el modelo correspondiente a la entrada ficticia es:

$$k^T * = [-51.7231 \quad 105.1570 \quad 91.9889]$$

La matriz de realimentación para el sistema MIMO es:

$$K^* = F \cdot k^T * = \begin{bmatrix} -51.7231 & 105.1570 & 91.9889 \\ -51.7231 & 105.1570 & 91.9889 \end{bmatrix}$$

Se va a considerar que la señal de referencia se aplica solamente en la entrada del tanque de área A3. Entonces se va a ajustar la ganancia respecto de esa entrada.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS MIMO CONTROLABLES

La ganancia del sistema a lazo cerrado se puede calcular utilizando solamente la

entrada de referencia 2 [B(2)], como: $\frac{1}{A_0} = C[I - (A - BK)]^{-1} B(2) = -0.1902$

Entonces queda:

$$A_0 = -5.2578 \quad \text{y} \quad K = \begin{bmatrix} -51.7231 & 105.1570 & 91.9889 \\ 9.8374 & -20.0002 & -17.4957 \end{bmatrix}$$

Se analizarán distintas alternativas de diseño por simulación



TEORÍA DE CONTROL

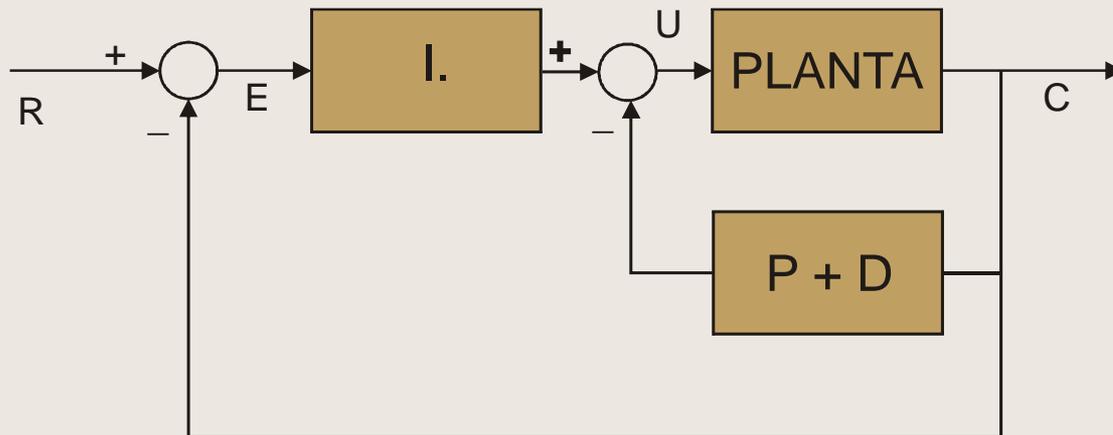
Realimentación de Variables de Estado
Sistemas de Seguimiento

Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

En el diseño de controladores se suele especificar la precisión del sistema a través del error en régimen permanente. En sistemas de seguimiento se requiere error nulo al escalón, condición que se puede satisfacer con la existencia de un integrador en la transferencia de lazo abierto. Esta situación se puede dar por que la planta ya cuenta con el integrador o mediante la inclusión de este en la transferencia del compensador serie, si la planta fuese tipo cero.

Para el caso de un controlador PID se podía plantear la siguiente solución:



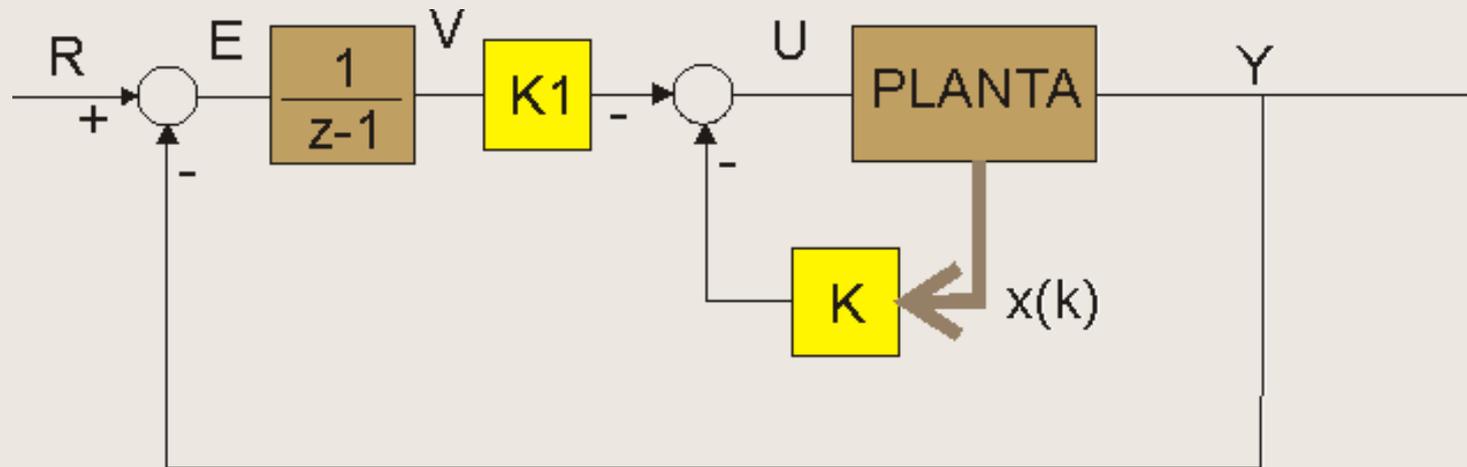
El término integral que afecta al error, asegura el error nulo al escalón.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Si se desea realizar un sistema de seguimiento utilizando una realimentación de variables de estado, para una planta tipo cero, el esquema a utilizar es el siguiente:



El modelo de estado de la planta es:

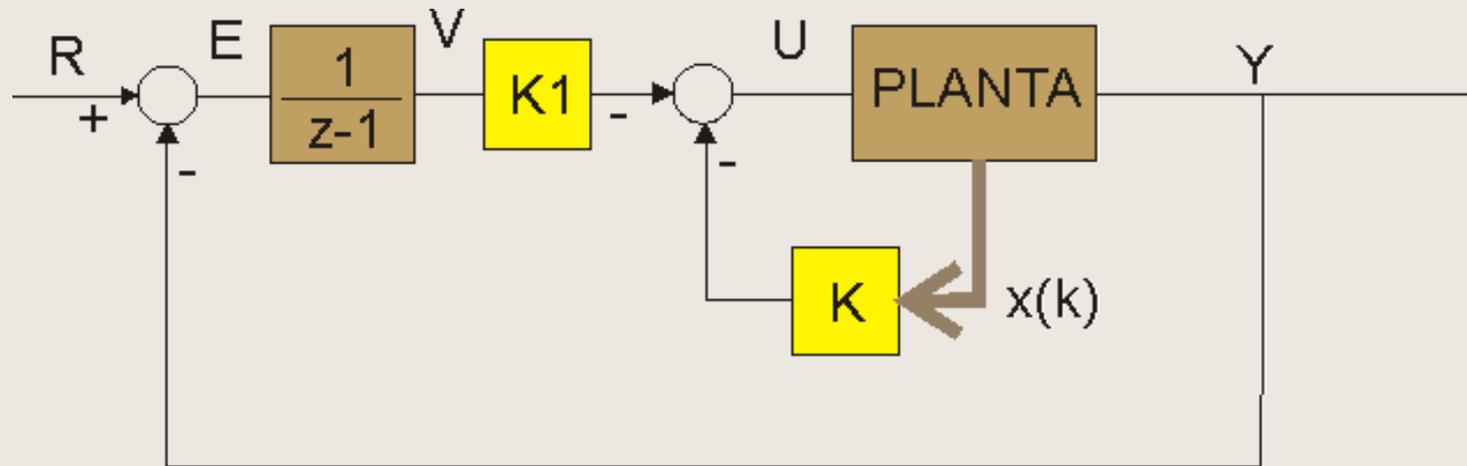
$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO



Al agregar el integrador se incrementa la cantidad de variables de estado .

La ecuación de estado para la nueva variable es:

$$r(k) - y(k) = r(k) - Cx(k) = v(k + 1) - v(k)$$

$$v(k + 1) = v(k) - Cx(k) + r(k)$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

El modelo de estado con la incorporación de la nueva variable resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} (k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A^*} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} (k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B^*} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

La ley de control que se plantea es la siguiente: $u(k) = -K x(k) - K_1 v(k)$

$$u(k) = -\underbrace{\begin{bmatrix} K & K_1 \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*} (k)$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

El modelo realimentado con la ley de control planteada resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} (k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}}_{A^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*} (k) - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B^*} \underbrace{\begin{bmatrix} K & K_1 \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}}_{x^*} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$x^*(k+1) = [A^* - B^* K^*] x^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Los autovalores del modelo realimentado pueden reasignarse a posiciones arbitrarias si el par $[A^*, B^*]$ es controlable y se puede calcular el vector K^* utilizando el método del M.C.C..

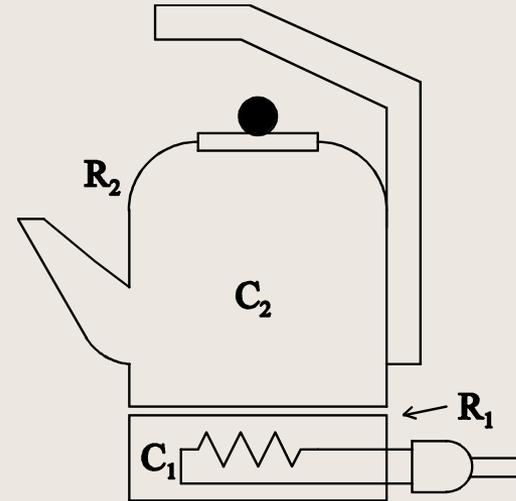


Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

7-9) Se desea controlar el sistema térmico correspondiente al ejercicio 2-2) de modo que la respuesta de lazo cerrado, para una entrada en escalón, tenga:

- Ganancia unitaria para la entrada de potencia.
- Amortiguamiento crítico.
- Tiempo de establecimiento de aproximadamente 600 seg.



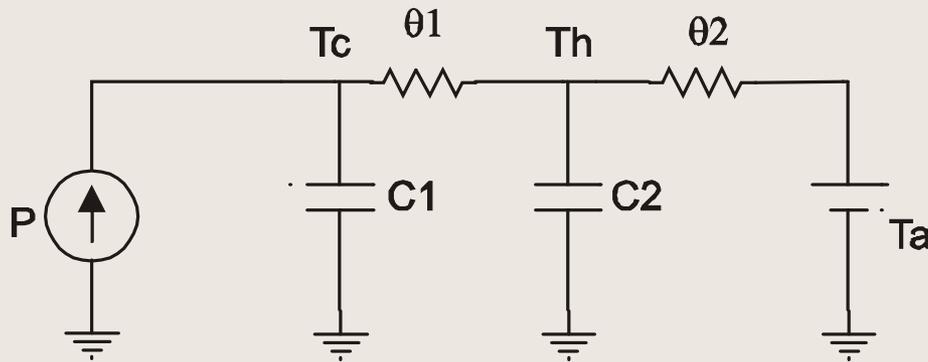
- Diseñe un controlador por realimentación de estado que cumpla con las especificaciones.
- Analice el comportamiento del sistema ante variaciones en la ganancia.
- Considere el caso en el que a las especificaciones anteriores se le suma la de poseer error nulo, en régimen permanente, para una entrada en escalón. Plantee un controlador por realimentación de estado que tenga en cuenta esta posibilidad.
- Analice, para esta nueva alternativa, el comportamiento ante variaciones de ganancia.



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Aplicando nodos sobre el circuito equivalente



$$P = \dot{T}_c C_1 + \frac{T_c - T_h}{\theta_1}$$
$$\frac{T_c - T_h}{\theta_1} = \dot{T}_h C_2 + \frac{T_h - T_a}{\theta_2}$$

Agrupando las ecuaciones

$$\dot{T}_c = \frac{P}{C_1} - \frac{T_c}{\theta_1 C_1} + \frac{T_h}{\theta_1 C_1}$$

$$\dot{T}_h = \frac{T_c}{\theta_2 C_2} - \frac{T_h}{C_2} \left(\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right) + \frac{T_a}{\theta_2 C_2}$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Modelo de Estado Continuo

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_c \\ \dot{T}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.003 & 0.003 \\ 0.0003 & -0.0011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.0008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ T_a \end{bmatrix}$$

Modelo de Estado Discreto (T=1 seg)

$$\begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.997 & 0.002994 \\ 0.0002994 & 0.9989 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} 0.002496 & 1.198e-6 \\ 3.745e-7 & 0.0007996 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ T_a \end{bmatrix}(k)$$

Autovalores de lazo cerrado

$$\xi = 1 \quad \frac{4}{\xi \omega_n} = 600 \text{seg}$$

$$\omega_n = 6.67e-3$$

$$p_{1,2} = 6.67e-3 \quad \text{Autovalores continuos}$$

$$z_{1,2} = 0.9933 \quad \text{Autovalores discretos}$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Vector de Realimentación

$$K = [3.7215 \quad 43.1304]$$

La transferencia a lazo cerrado para la entrada de potencia queda:

$$G(z) = \frac{3.745e-7 z + 3.74e-7}{z^2 - 1.987 z + 0.9866} \quad \text{La ganancia } 1/A_0 = 0.0167$$

El nuevo Vector de Realimentación queda:

$$K = [0.0621 \quad 0.7191]$$



Realimentación de Variables de Estado

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

Control Integral

Modelo Ampliado

$$\begin{bmatrix} T_c \\ T_h \\ v \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 0.9970 & 0.0030 & 0 \\ 0.0003 & 0.9989 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c \\ T_h \\ v \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 2.496e-3 \\ 3.744e-7 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

Autovalores deseados:

$$z_{1,2} = 0.9933$$

$$z_3 = 0.93$$

Vector de Realimentación

$$K^* = [31.6 \quad 1192.1 \quad 4.2]$$

