

TEORÍA DE CONTROL

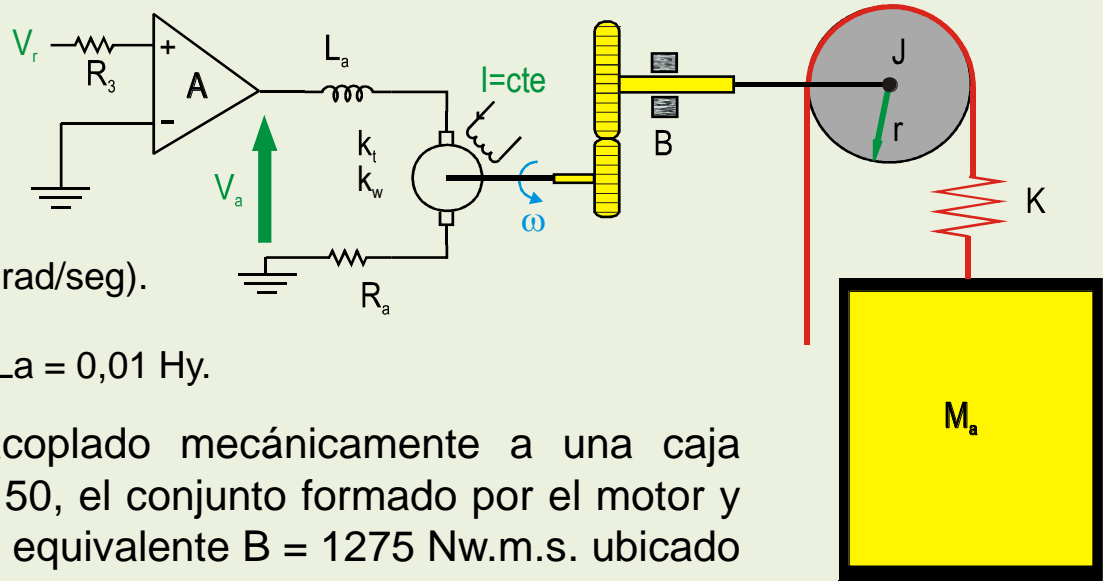
Modelo de Estado

Ejercicio Ascensor

Ejercicio Ascensor

El diagrama representa esquemáticamente el funcionamiento de un control de velocidad de un ascensor. El mismo es accionado por un motor de corriente continua cuyos parámetros asociados son :

- Tensión de alimentación $V_a=440$ V.
- Potencia nominal $P_n = 12.5$ Kw.
- Velocidad nominal $\omega_n = 1500$ rpm.
- Constante de cupla $K_t = 2.5$ Nw.m/Amp.
- Constante de velocidad $K_w = 2.38$ Volt/(rad/seg).
- Resistencia de armadura $R_a = 1,96$ W.
- Inductancia de dispersión de armadura $L_a = 0,01$ Hy.



El eje del motor se encuentra acoplado mecánicamente a una caja reductora cuya relación es $N_2/N_1 = 50$, el conjunto formado por el motor y la reducción presenta un rozamiento equivalente $B = 1275$ Nw.m.s. ubicado a la salida del mismo.

En el eje de salida de la reducción se encuentra colocada la polea de radio $r = 0,3$ m y momento de inercia $J = 5,4$ Nw.m s^2 . Sobre esta polea se aloja, sin deslizamiento el cable de izado de la cabina, este cable se considera elástico con una constante $K=49000$ N/m. . Finalmente en el extremo del cable se ubica la camina del ascensor de masa $M_a = 500$ Kg. . Se considera despreciable el rozamiento de la cabina sobre las guías.

Se desea encontrar un modelo de estado que lo represente con salidas : ω (velocidad del motor), V_m (Velocidad de la cabina) y X (estiramiento del cable).

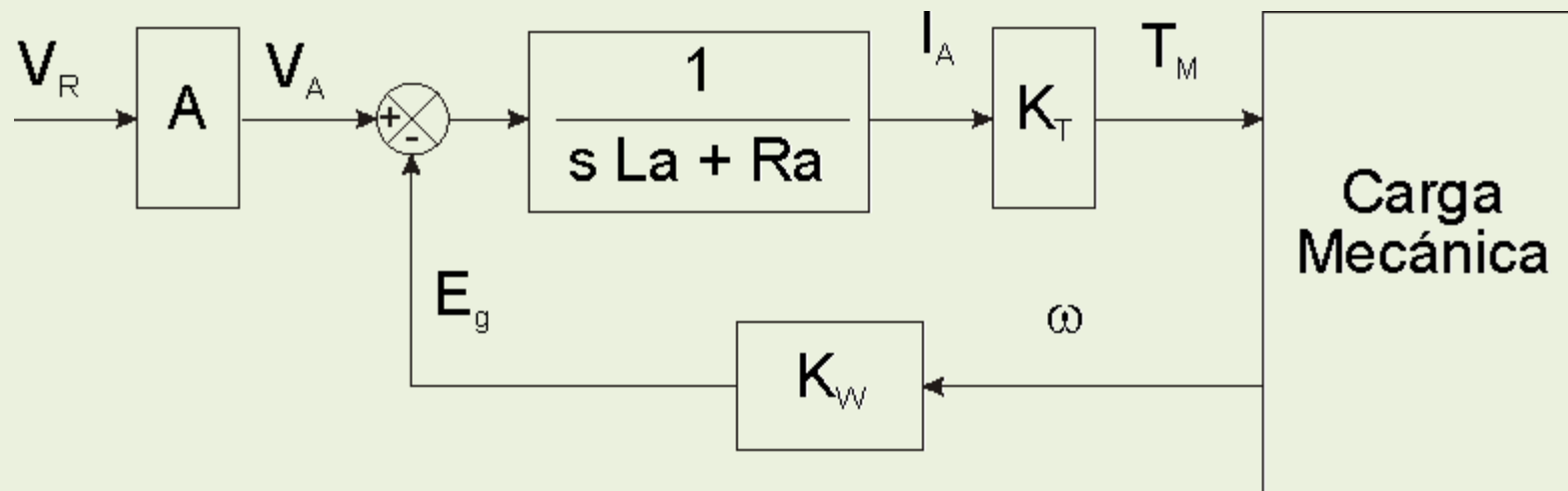


Ejercicio Ascensor

Se desea encontrar un modelo de estado para el sistema planteado. Existen distintas formas de llegar al modelo de estado, en este caso en particular se va a optar por hallar las ecuaciones de estado a partir del diagrama en bloques.

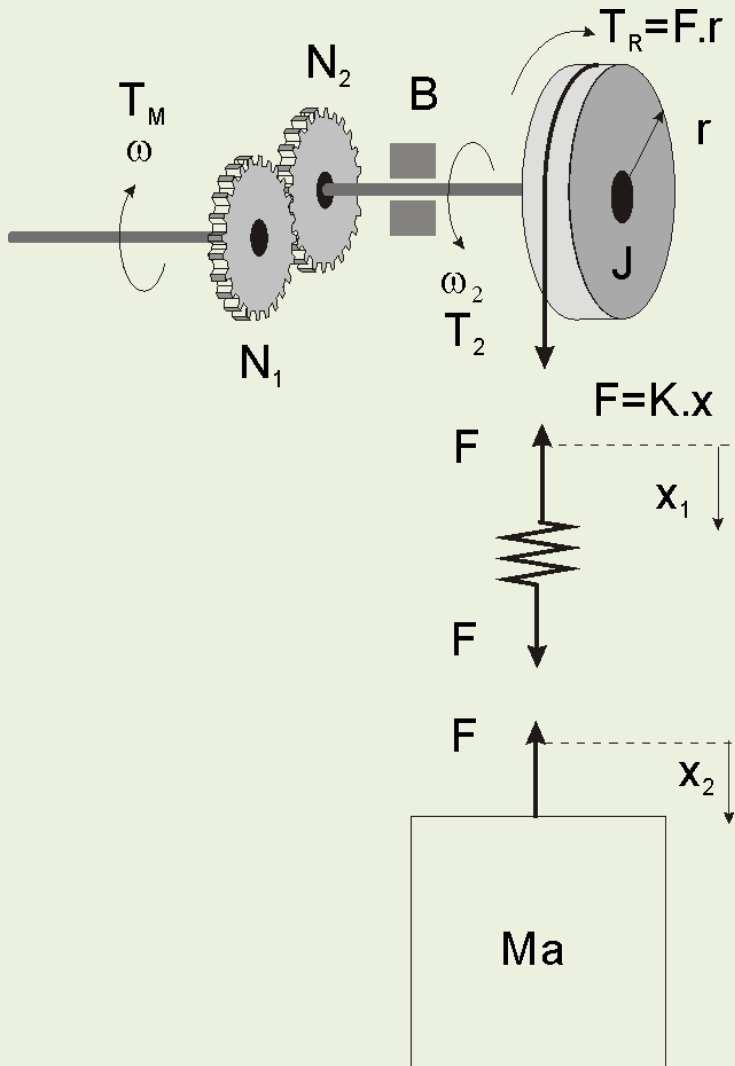
PARTE ELÉCTRICA

El diagrama de la parte eléctrica, tiene en cuenta al amplificador de potencia que alimenta el motor, la impedancia eléctrica propia del motor y la realimentación de la FEM inducida debido al movimiento del eje. Además, se considera el par en el eje del motor generado a partir de la corriente de armadura.



Ejercicio Ascensor

PARTE MECÁNICA



La parte mecánica de rotación esta compuesta por la reducción a engranajes, la polea de inercia J y el rozamiento B .

$$T_2 = \frac{N_2}{N_1} T_M \quad \omega_2 = \frac{N_1}{N_2} \omega$$

Sobre la polea aparece un torque resistente debido al cable y la cabina

$$T_R = F \cdot r$$

La velocidad angular de la polea se puede determina a partir de la siguiente ecuación:

$$T_2 - T_R = \omega_2 (sJ + B)$$

La fuerza lineal ejercida sobre la polea es:

$$F = K(x_1 - x_2) = K \cdot x$$

Esta misma fuerza se aplica a la masa de la cabina:

$$F = M \cdot a_2 = M \cdot s \cdot V_2$$



Ejercicio Ascensor

PARTE MECÁNICA

Se puede construir un circuito eléctrico equivalente de la carga mecánica.

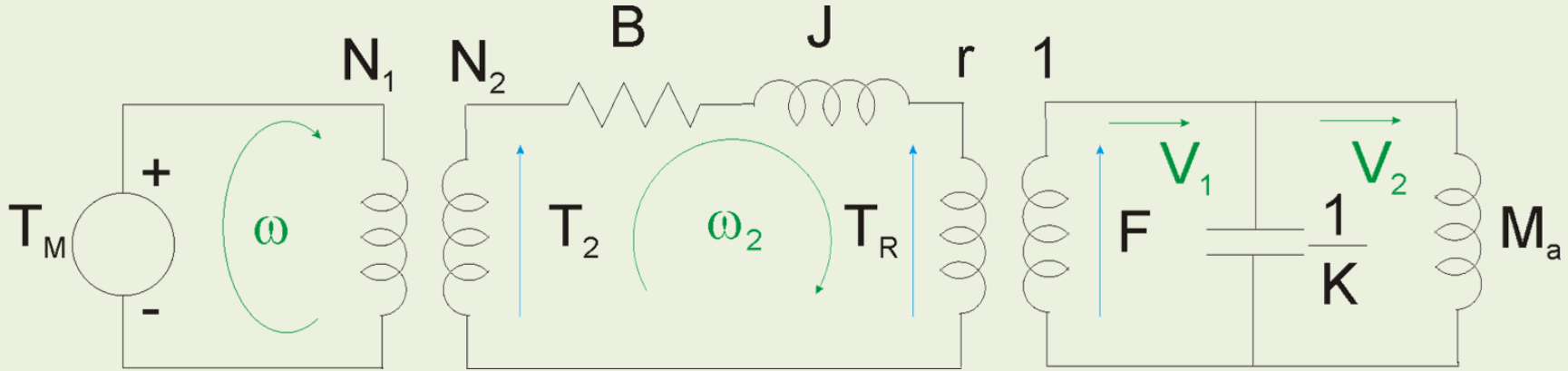
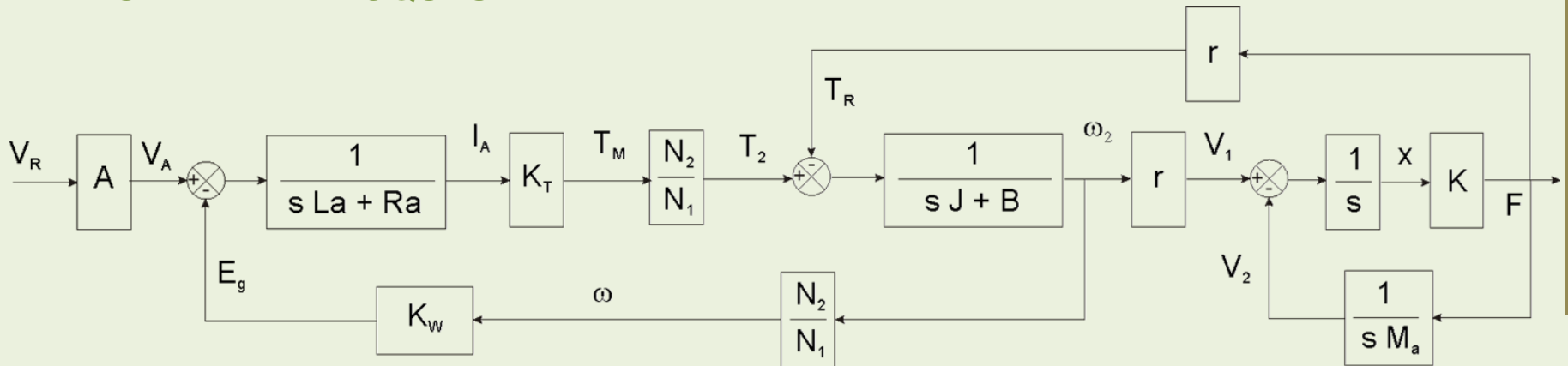


DIAGRAMA EN BLOQUES

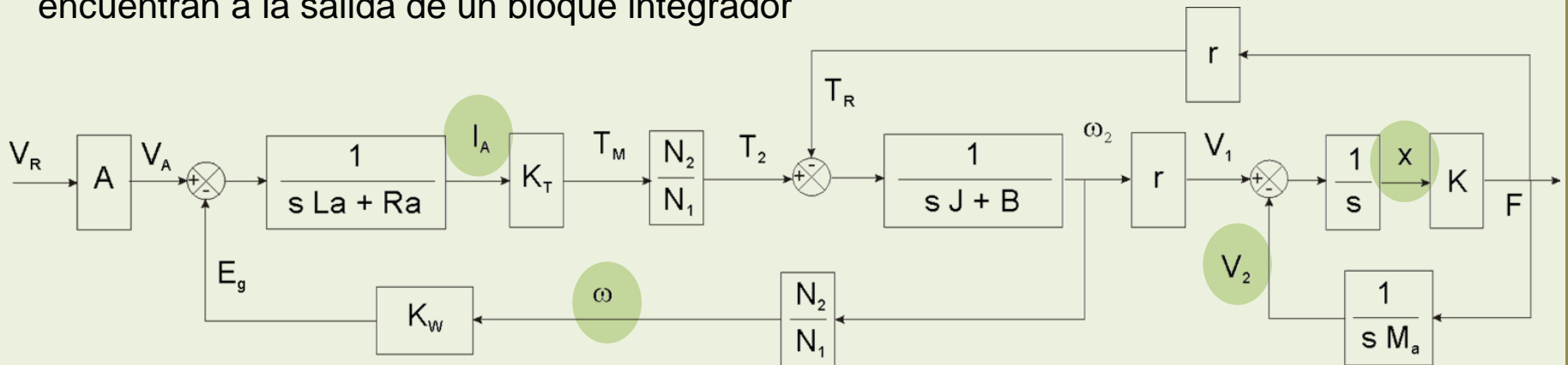


Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

ELECCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO

En el diagrama en bloques se pueden definir variables de estado a las señales que se encuentran a la salida de un bloque integrador



Cada uno de los bloques representa una función de transferencia, por lo tanto se suponen condiciones iniciales nulas para las variables representadas.

En consecuencia, se va a asumir que:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \mathcal{L}\{\dot{x}\} = s \cdot X(s)$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

Se elijen como variables de estado I_A , ω , V_2 y x . La entrada del modelo es V_R .

$$I_A(s) = \frac{AV_R(s) - K_W \omega(s)}{sLa + Ra} \rightarrow sI_A(s) = -\frac{Ra}{La} I_A(s) - \frac{K_W}{La} \omega(s) + \frac{A}{La} V_R(s)$$

$$\omega(s) = \frac{N_2}{N_1} \frac{\left(\frac{N_2}{N_1}\right) K_T I_A(s) - K r x(s)}{sJ + B} \rightarrow s\omega(s) = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{K_T}{J} I_A(s) - \frac{B}{J} \omega(s) - \left(\frac{N_2}{N_1}\right) \frac{K r}{J} x(s)$$

$$X(s) = \frac{r \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \omega(s) - V_2(s)}{s} \rightarrow sX(s) = r \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \omega(s) - V_2(s)$$

$$V_2(s) = \frac{K X(s)}{s M_a} \rightarrow sV_2(s) = \frac{K}{M_a} X(s)$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

Pasando las ecuaciones transformadas al dominio temporal, considerando condiciones iniciales nulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_A(t) = -\frac{Ra}{La} I_A(t) - \frac{K_W}{La} \omega(t) + \frac{A}{La} V_R(t) \\ \dot{\omega}(t) = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{K_T}{J} I_A(t) - \frac{B}{J} \omega(t) - \left(\frac{N_2}{N_1}\right) \frac{K r}{J} x(t) \\ \dot{x}(t) = r \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \omega(t) - V_2(t) \\ \dot{V}_2(t) = \frac{K}{M_a} x(t) \end{array} \right.$$

Se plantean como salidas : la velocidad de la cabina V_2 , La velocidad angular ω y el estiramiento del cable x .



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

Representando las variables en forma vectorial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{K_W}{La} & 0 & 0 \\ \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} & -\left(\frac{N_2}{N_1}\right) \frac{K r}{J} & 0 \\ 0 & r\left(\frac{N_1}{N_2}\right) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{K}{M_a} & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} I_A(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{A}{La} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot V_R(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} I_A(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_D \cdot V_R(t)$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

Reemplazando las constantes por su valor numérico queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -196 & -238 & 0 & 0 \\ 1157.4 & -236.11 & -1.361 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0.006 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 98 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} I_A(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot V_R(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} I_A(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix}$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Se va calcular la matriz de transferencia a partir del modelo de estado

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B$$

Los resultados parciales se muestran a continuación:

$$(s \cdot I - A) = \begin{bmatrix} s + 196 & 238 & 0 & 0 \\ -1157.4 & s + 236.11 & 1.361 \times 10^5 & 0 \\ 0 & -0.006 & s & 1 \\ 0 & 0 & -98 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(s \cdot I - A) = s^4 + 432.11111 \cdot s^3 + 322655.41 \cdot s^2 + 202413.56 \cdot s + 31530593$$

Los autovalores del sistema son:

$$\begin{aligned} & -215.80707 + j 525.13846 \\ & -215.80707 - j 525.13846 \\ & -0.2484843 + j 9.8871192 \\ & -0.2484843 - j 9.8871192 \end{aligned}$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

MATRIZ DE TRANSFERENCIA

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 680555.56 \\ 1.134 \times 10^8 + 1157407.4s^2 \\ 0.0000186 + 6944.44s \end{bmatrix}}{s^4 + 432.11111 \cdot s^3 + 322655.41 \cdot s^2 + 202413.56 \cdot s + 31530593}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 680556 \\ 1.15741 \times 10^6 (s^2 + 98) \\ 6944.44s \end{bmatrix}}{(s^2 + 431614s + 322343)(s^2 + 0496969s + 978169)}$$



Ejercicio Ascensor

VARIABLES DE ESTADO

CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Para determinar si el sistema es controlable se debe calcular la matriz controlabilidad:

$$U = \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-2}B \mid A^{n-1}B \right]$$

Si el rango de esta matriz es igual al número de variables de estado el sistema resulta controlable.

En este caso como el modelo tiene una sola entrada resulta una matriz cuadrada por lo tanto para que resulte de rango completo se debe cumplir que $\det(U) \neq 0$.

$$U = \begin{bmatrix} 1000 & -196000 & -2.37 \times 10^8 & 1.655 \times 10^{11} \\ 0 & 1.157 \times 10^6 & -5.001 \times 10^8 & -1.572 \times 10^{11} \\ 0 & 0 & 6944.44 & -3.001 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 6.806 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\det[U] = 5.47 \times 10^{18}$$

El sistema es **CONTROLABLE** desde la entrada V_R



Ejercicio Ascensor

Para determinar si el sistema es observable se debe calcular la matriz observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si el rango de esta matriz es igual al número de variables de estado el sistema resulta controlable.

En este caso el modelo tiene tres salidas por lo tanto resulta una matriz no cuadrada entonces se debe analizar el rango aplicando el método de Gauss-Jordan (Matriz triangular o diagonal).

Otro método puede ser encontrar el determinante de mayor orden no nulo.



Ejercicio Ascensor

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 98 & 0 \\ 1157.4 & -236.11 & -1.361 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 6 \times 10^{-3} & 0 & -1 \\ 0 & 0.588 & 0 & -98 \\ -5.0013 \times 10^5 & -2.2053 \times 10^5 & 3.2137 \times 10^7 & 1.361 \times 10^5 \\ 6.9444 & -1.41667 & -914.66667 & 0 \\ 680.556 & -138.833 & -8.9637 \times 10^4 & 0 \\ 1.5722 \times 10^8 & 1.7129 \times 10^8 & 3.003 \times 10^{10} & -3.2137 \times 10^7 \\ -3000.77 & -1323.7750 & 1.9282 \times 10^5 & 914.667 \end{bmatrix}$$

Se puede armar un determinante no nulo con las filas resaltadas

El sistema es **OBSERVABLE** desde el conjunto de salidas.



Ejercicio Ascensor

Se puede analizar la observabilidad individual para cada una de las salidas.

Para la salida V_2 , velocidad de la cabina, la ecuación de salida tiene la siguiente forma:

$$\dot{V}_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} I_A(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix}$$

La matriz observabilidad para esta salida es:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 98 & 0 \\ 0 & 0.588 & 0 & -98 \\ 680.556 & -138,833 & -8.963733 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[V] = 3.921633 \times 10^4$$

El sistema es **OBSERVABLE** desde la SALIDA V_2 , por lo tanto cualquier conjunto de salidas que incluya a esta, dará como resultado un sistema observable.

