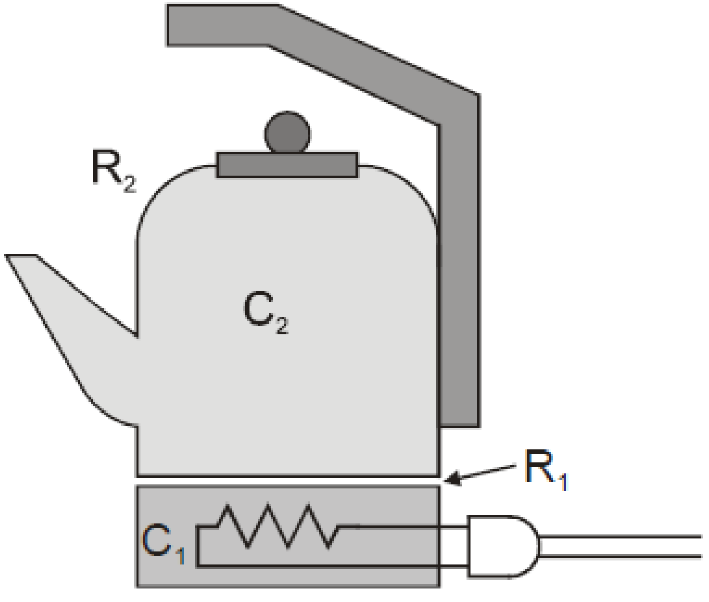
Respuesta Transitoria

Ejercicio 2-2

Enunciado

2-1) La figura muestra en forma esquemática un sistema de calentamiento de líquidos conocido como pava eléctrica. Un resistor de masa despreciable calienta una placa metálica cuya capacidad térmica la suponemos concentrada en C_1 y su valor es de 400 Joule/°C . La caída de temperatura entre el resistor y la placa es prácticamente despreciable por lo que se podría suponer sin cometer demasiado error que la toda la potencia se disipa en la placa.

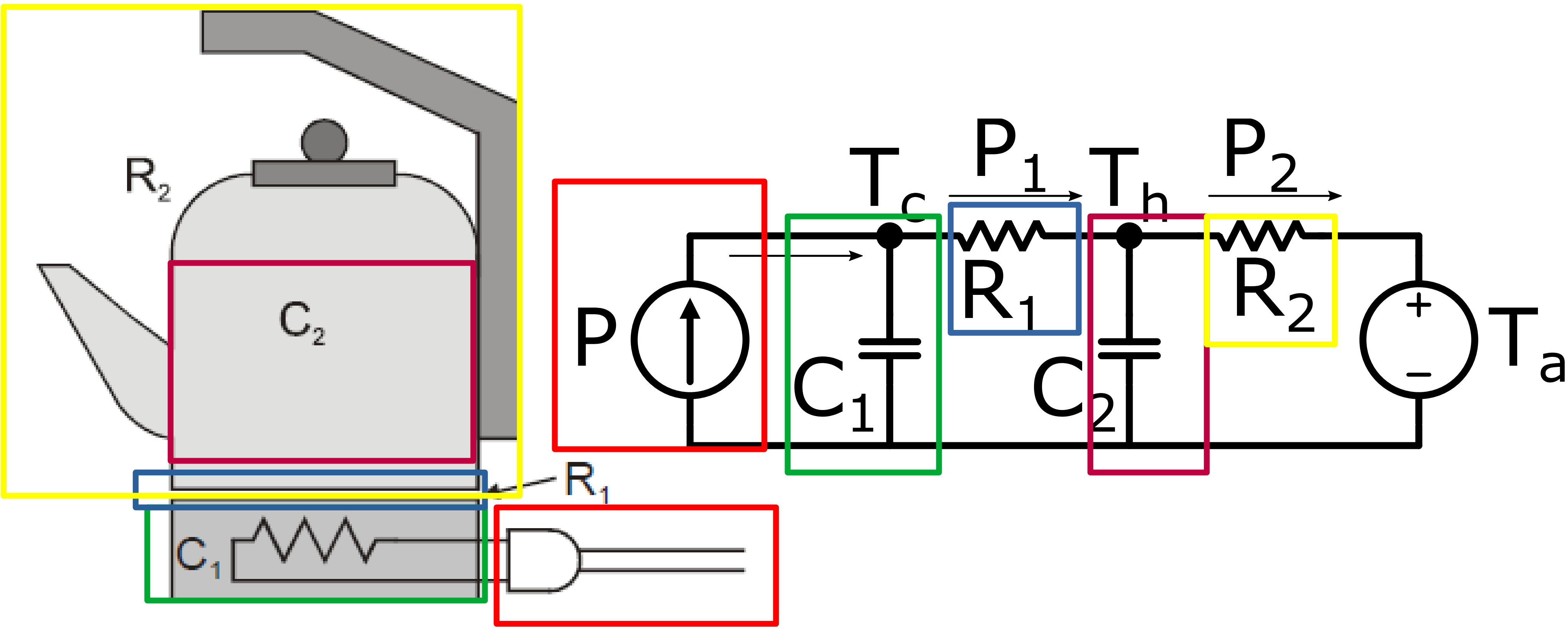


La placa se encuentra en contacto con el elemento liquido , en esta interfase se produce una caída de temperatura que se puede concentrar en una resistencia térmica de valor 0.83333 °C/Watt . El volumen del liquido es de aproximadamente de 1 litro lo que origina que este elemento posea una capacidad térmica de 4000 Joule/°C.

La resistencia de pérdidas al medio exterior se supone concentrada en R_2 de valor 0.3125 °C/Watt y también se supone que la temperatura exterior se mantiene constante durante el tiempo que dura el experimento en un valor de 25 °C.

a) Dibuje un equivalente eléctrico del sistema.
b) Halle un modelo de estado para el sistema considerando como salidas a la temperatura de la placa y a la temperatura del líquido.
c) Suponga que a este sistema se le aplica un pulso de potencia constante de ancho 15 minutos (900 seg.) y de amplitud 500 Watt. Halle para esta entrada cual es la máxima temperatura a la que llega el líquido una vez que es quitada la potencia.

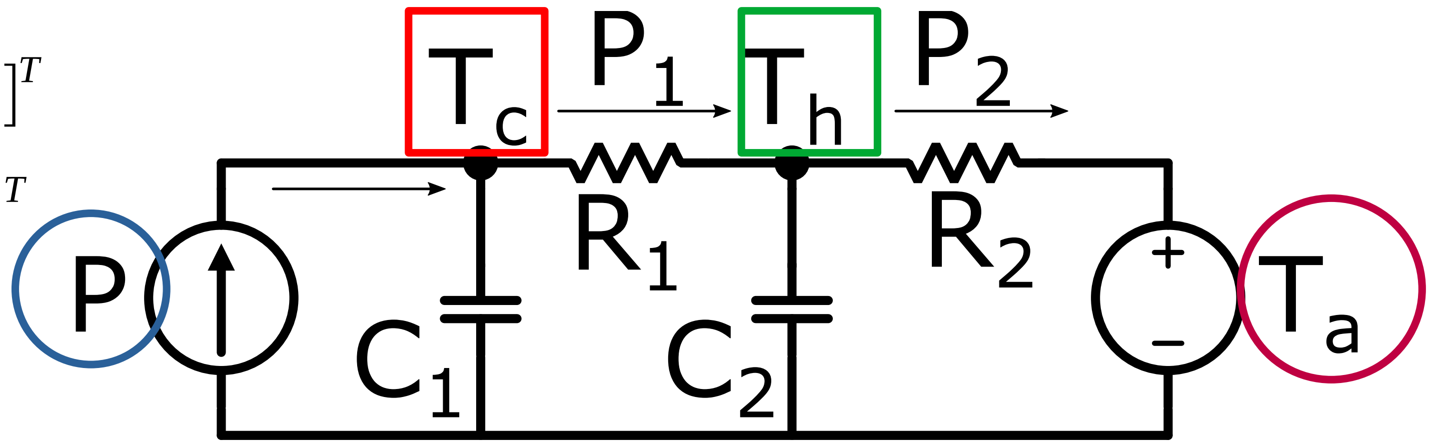
Analogía Eléctrica



Modelo de Estado

$$\boldsymbol{X}=[T_c \quad T_h]^T$$

$$\boldsymbol{U}=[P \quad T_a]^T$$



(1) $C_1\dot{T}_c = P - P_1$

(2) $C_2\dot{T}_h = P_1 - P_2$

(3) $P_1 = \dfrac{T_c - T_h}{R_1}$

(4) $P_2 = \dfrac{T_h - T_a}{R_2}$

(3) y (4) en
(1) y (2)

$$\dot{T}_c = \overbrace{\frac{P}{C_1}}^{\mathbf{U}} \overbrace{- \frac{\boxed{T_c}}{R_1C_1} + \frac{\boxed{T_h}}{R_1C_1}}^{\mathbf{X}} \qquad \text{(I)}$$

$$\dot{T}_h = \overbrace{\frac{\boxed{T_c}}{R_1C_2} - \frac{\boxed{T_h}}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}^{\mathbf{X}} + \overbrace{\frac{T_a}{R_2C_2}}^{\mathbf{U}} \qquad \text{(II)}$$

Modelo de Estado

$$\boldsymbol{X} = [T_c \quad T_h]^T$$

$$\boldsymbol{U} = [P \quad T_a]^T$$

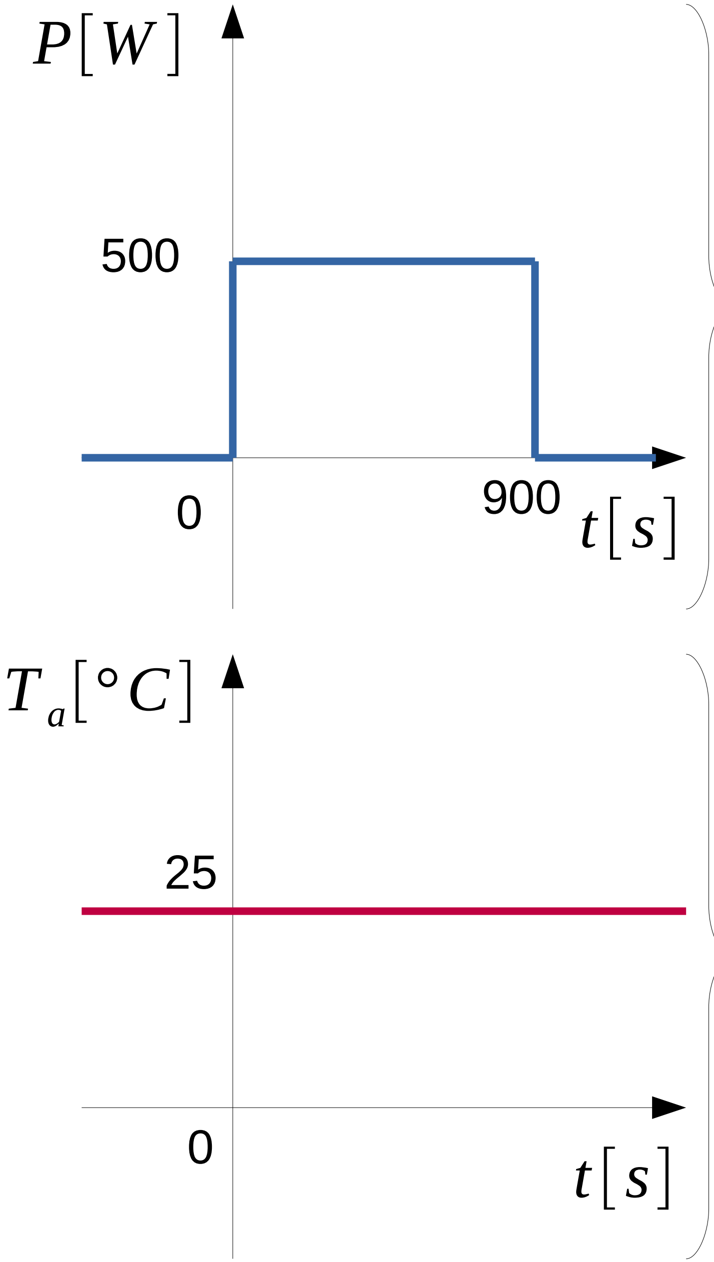
$$\dot{T}_c = \frac{P}{C_1} - \frac{T_c}{R_1 C_1} + \frac{T_h}{R_1 C_1} \qquad \text{(I)}$$

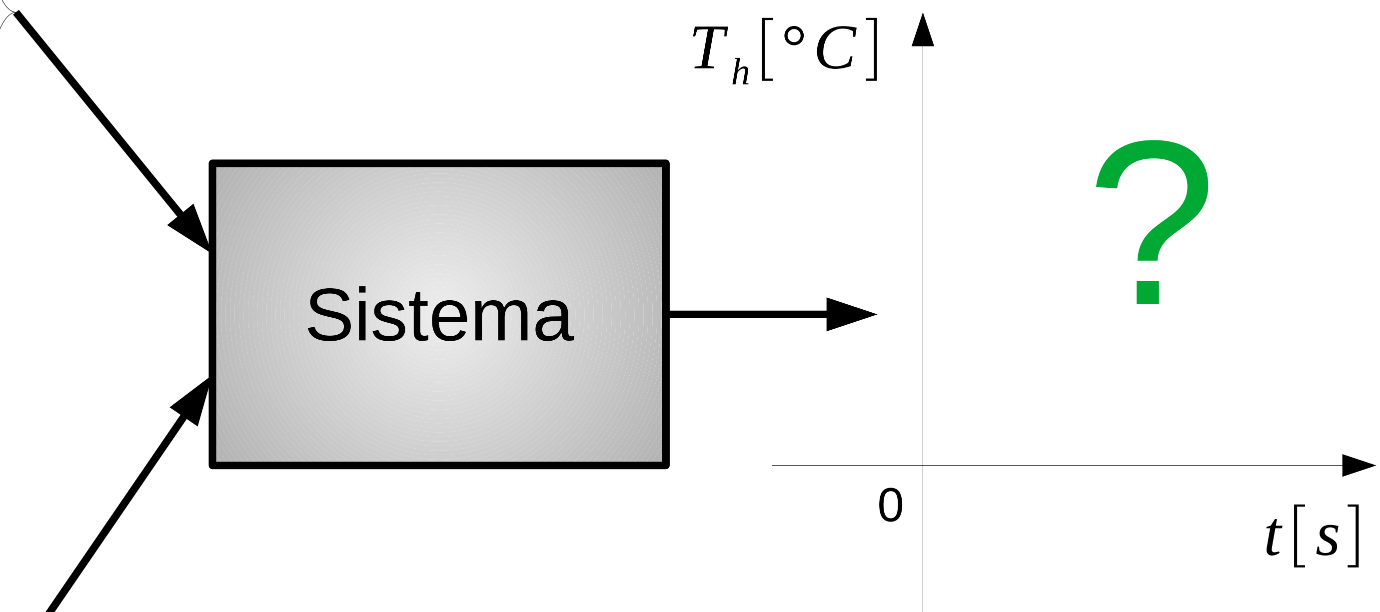
$$\dot{T}_h = \frac{T_c}{R_1 C_2} - \frac{T_h}{C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{T_a}{R_2 C_2} \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \begin{bmatrix} \dot{T}_c \\ \dot{T}_h \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{R_1 C_1} & \dfrac{1}{R_1 C_1} \\ \dfrac{1}{R_1 C_2} & \dfrac{-1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix}}^{\textbf{A}} \begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}}^{\textbf{B}} \begin{bmatrix} P \\ T_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\textbf{C}} \begin{bmatrix} T_c \\ T_h \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\textbf{D}} \begin{bmatrix} P \\ T_a \end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria





$$\boldsymbol{X}(s)=\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X_0}}_{\substack{\text{Rta. Homogénea}\\ \boldsymbol{X_h}(s)}}+\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)}_{\substack{\text{Rta. Forzada}\\ \boldsymbol{X_f}(s)}}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

Respuesta Transitoria

$$\boldsymbol{X}(s)=\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boxed{\boldsymbol{X}(0)}}_{\text{Rta. Homogénea }+\ \boldsymbol{X_h}(s)}+\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)}_{\text{Rta. Forzada }\ \boldsymbol{X_f}(s)}$$

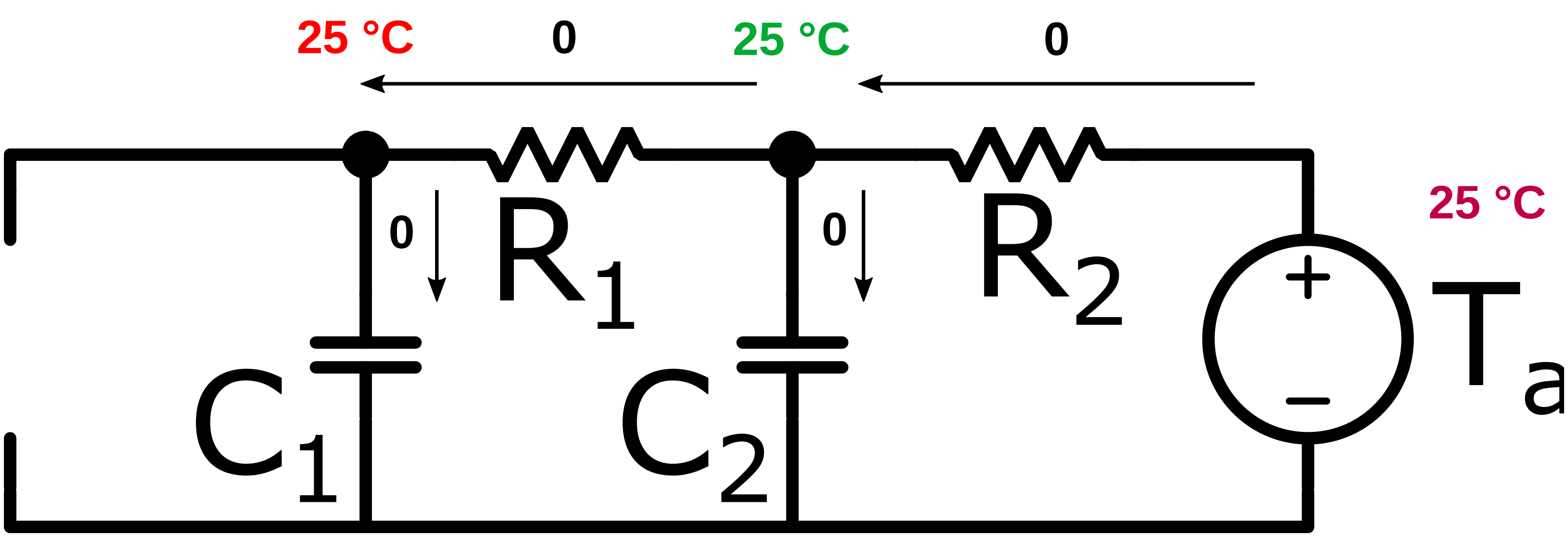
Rta. Total =

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix} T_c(0) \\ T_h(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Condiciones Iniciales

Modo 1



Respuesta Transitoria

$$\mathbf{X}(s)=\underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boxed{\mathbf{X}(0)}}_{}+\underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$\mathbf{X}_h(s)$ $\mathbf{X}_f(s)$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}$$

$$\mathbf{X}(0)=\begin{bmatrix}T_c(0)\\T_h(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\25\end{bmatrix}$$

Condiciones Iniciales

Modo 2

$$\dot{T}_c=\dot{T}_h=0$$

(I)
(II)
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1}\\ \frac{1}{R_1C_2} & \frac{-1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_c\\T_h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\T_a\end{bmatrix}$$

(I) $T_c=T_h=T_{RP}$

(II) $\left[\cancel{\frac{1}{R_1C_2}}-\cancel{\frac{1}{R_1C_2}}-\frac{1}{R_2C_2}\right]T_{RP}=\frac{-1}{R_2C_2}T_a \longrightarrow T_{RP}=T_a=25$

Respuesta Transitoria

$$\boldsymbol{X}(s)=\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X}(0)}+\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boxed{\boldsymbol{U}(s)}}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{h}}(s)$ $\quad$ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}(s)$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix}T_c(0)\\T_h(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\25\end{bmatrix}$$

Vector de Entradas

$$\boldsymbol{U}(s)=\begin{bmatrix}\boxed{P(s)}\\\boxed{T_a(s)}\end{bmatrix}$$

Opción 1:

$$P(s)=L\left[\prod(t)\right]=500\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-900s}}{s}\right)$$

$$T_a(s)=\frac{25}{s}$$

Opción 2: Divido el problema en 2 partes.

1) Considero P(t) como un escalón y calculo **X**(t) hasta t = 900 s.

2) Utilizo **X**(900) como condiciones iniciales y calculo **X**(t) con P = 0

Respuesta Transitoria

$$\boldsymbol{X}(s) = \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X}(0)}_{\text{Rta. Homogénea}} + \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boxed{\boldsymbol{U}(s)}}_{\text{Rta. Forzada}}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$\boxed{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{h}}(s)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}(s)$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$$\boldsymbol{X}(0) = \begin{bmatrix} T_c(0) \\ T_h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

<u>Parte 1:</u>

Considero P(t) como un escalón y calculo **X**(t) hasta t = 900 s.

$$T_a(s) = \frac{25}{s} \qquad P(s) = \frac{500}{s}$$

$$\boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ T_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{500}{s} \\ \frac{25}{s} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{h}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{31.59}{s+7.074\cdot 10^{-4}} - \frac{6.586}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \\ \frac{24.14}{s+7.074\cdot 10^{-4}} - \frac{0.8619}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{h}}(t) = \begin{bmatrix} 31.59\, e^{-7.074\cdot 10^{-4} t} - 6.586\, e^{-3.393\cdot 10^{-3} t} \\ 24.14\, e^{-7.074\cdot 10^{-4} t} - 0.8619\, e^{-3.393\cdot 10^{-3} t} \end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria

$$X(s)=\underbrace{(s\,I-A)^{-1}X(0)}_{}+\underbrace{(s\,I-A)^{-1}B\,U(s)}_{}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$$X_h(s) \qquad \boxed{X_f(s)}$$

$$(s\,I-A)^{-1}=\frac{adj(s\,I-A)}{|s\,I-A|}$$

$$X(0)=\begin{bmatrix} T_c(0) \\ T_h(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Parte 1:

Considero P(t) como un escalón y calculo **X**(t) hasta t = 900 s.

$$T_a(s)=\frac{25}{s} \qquad P(s)=\frac{500}{s}$$

$$X_f(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{597.9}{s}-\dfrac{289.9}{s+7.074\cdot 10^{-4}}-\dfrac{308}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \\ \dfrac{181.25}{s}-\dfrac{221.6}{s+7.074\cdot 10^{-4}}+\dfrac{40.3}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \end{bmatrix}$$

$$U(s)=\begin{bmatrix} P(s) \\ T_a(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{500}{s} \\ \dfrac{25}{s} \end{bmatrix}$$

$$X_f(t)=\begin{bmatrix} 597.9-289.9\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}-308\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \\ 181.25-221.6\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}+40.3\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria

$$\boxed{\mathbf{X}(s)} = \underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{} + \underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$\mathbf{X}_h(s)$ $\mathbf{X}_f(s)$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}$$

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} T_c(0) \\ T_h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Parte 1:

Considero P(t) como un escalón y calculo **X**(t) hasta t = 900 s.

$$\mathbf{X}_h(t) = \begin{bmatrix} 31.59\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} - 6.586\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \\ 24.14\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} - 0.8619\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_f(t) = \begin{bmatrix} 597.9 - 289.9\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} - 308\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \\ 181.25 - 221.6\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} + 40.3\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t(t) = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_f(t) = \begin{bmatrix} 597.9 - 258.3\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} - 314.6\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \\ 181.25 - 197.4\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t} + 41.17\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria

$$\boldsymbol{X}(s)=\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boxed{\boldsymbol{X}(0)}}+\underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boxed{\boldsymbol{U}(s)}}$$

Rta. Total = Rta. Homogénea + Rta. Forzada

$\boldsymbol{X_h}(s)$ $\boldsymbol{X_f}(s)$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix}T_c(900)\\T_h(900)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}446.4\\78.76\end{bmatrix}$$

<u>Parte 2:</u>

Utilizo **X**(900) como condiciones iniciales y calculo **X**(t) con P = 0.

$$\boldsymbol{X_t}(t)=\begin{bmatrix}597.9-258.3\,e^{-7.074\cdot10^{-4}t}-314.6\,e^{-3.393\cdot10^{-3}t}\\181.25-197.4\,e^{-7.074\cdot10^{-4}t}+41.17\,e^{-3.393\cdot10^{-3}t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_t}(900)=\begin{bmatrix}T_c(900)\\T_h(900)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}446.4\\78.76\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}(s)=\begin{bmatrix}P(s)\\T_a(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{25}{s}\end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria

$$\boxed{\boldsymbol{X}(s)} = \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X}(0)}_{\text{Rta. Homogénea} + \; \boldsymbol{X}_h(s)} + \underbrace{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)}_{\text{Rta. Forzada} \; \boldsymbol{X}_f(s)}$$

Rta. Total =

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

$$\boldsymbol{X}(0) = \begin{bmatrix} T_c(900) \\ T_h(900) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 446.4 \\ 78.76 \end{bmatrix}$$

<u>Parte 2:</u>

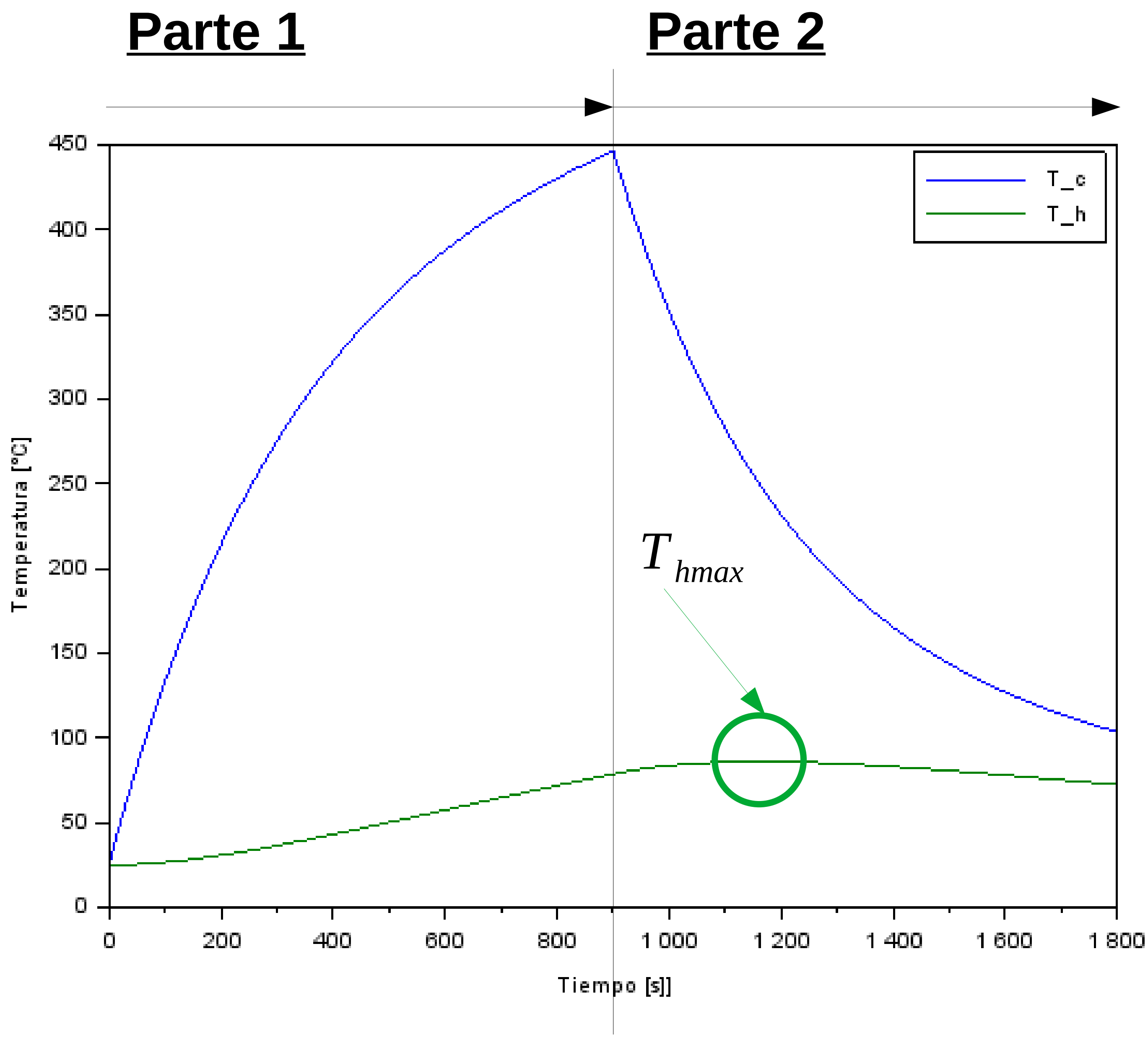
Utilizo **X**(900) como condiciones iniciales y calculo **X**(t) con P = 0.

$$\boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ T_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{25}{s} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_t(s) = \begin{bmatrix} \frac{25}{s} + \frac{121.7}{s+7.074\cdot 10^{-4}} + \frac{299.7}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \\ \frac{25}{s} + \frac{92.98}{s+7.074\cdot 10^{-4}} - \frac{39.22}{s+3.393\cdot 10^{-3}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_t(t) = \begin{bmatrix} 25+121.7\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}+299.7\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \\ 25+92.98\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}-39.22\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t} \end{bmatrix}$$

Respuesta Transitoria



Máxima Temperatura del Agua

Como el máximo ocurre en la Parte 2:

$$\boldsymbol{X_t}(t)=\begin{bmatrix}25+121.7\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}+299.7\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t}\\ \boxed{25+92.98\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}-39.22\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t}}\end{bmatrix}T_h(t)$$

$$\frac{d\,T_h(t)}{d\,t}=-7.074\cdot 10^{-4}\times 92.98\,e^{-7.074\cdot 10^{-4}t}+3.393\cdot 10^{-3}\times 39.22\,e^{-3.393\cdot 10^{-3}t}=0$$

$$t=262.3905$$

$$\boxed{T_{hmax}=T_h(262.3905)=86.13\,°C}$$