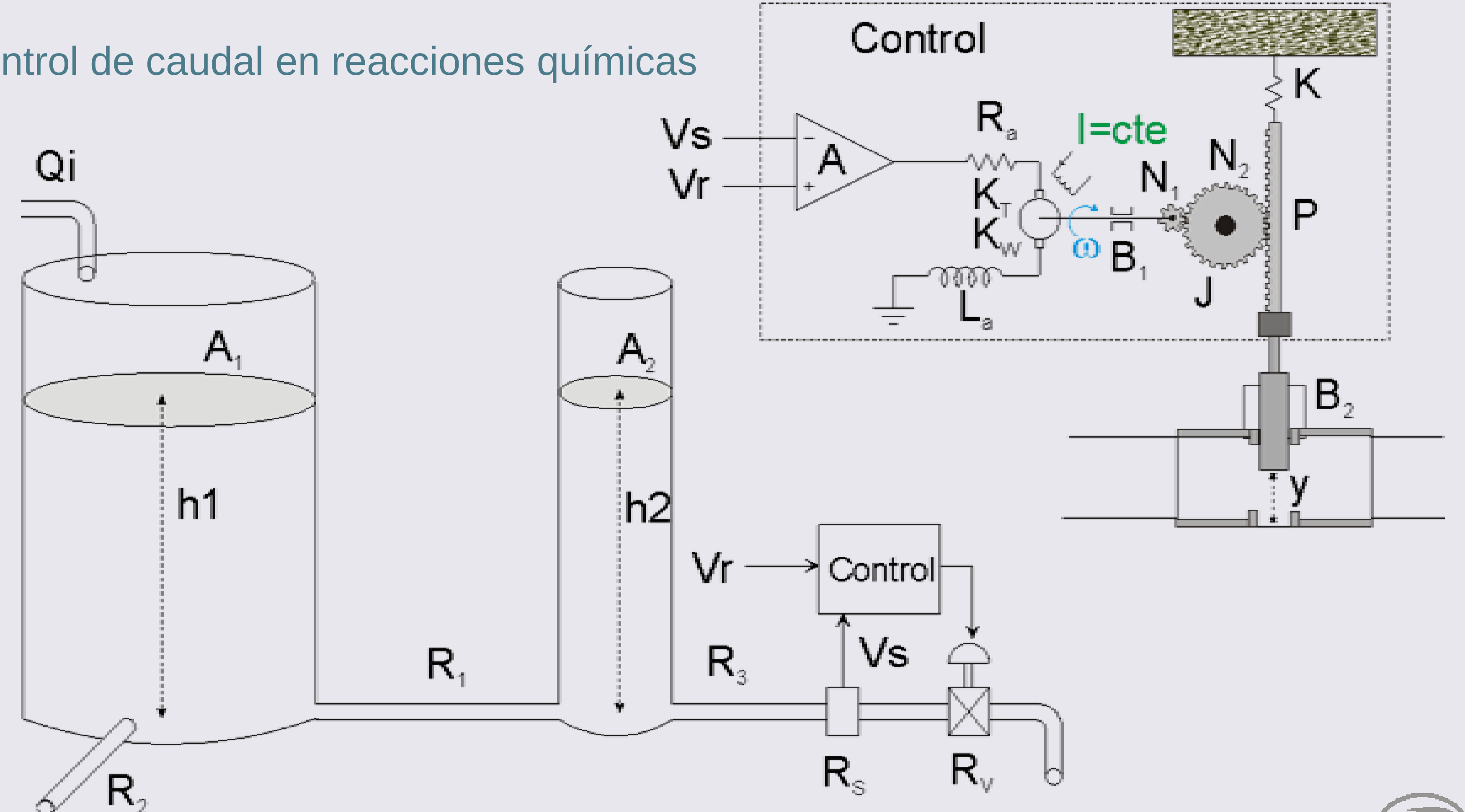
TEORÍA DE CONTROL

Ejercicio Tanques No Lineal

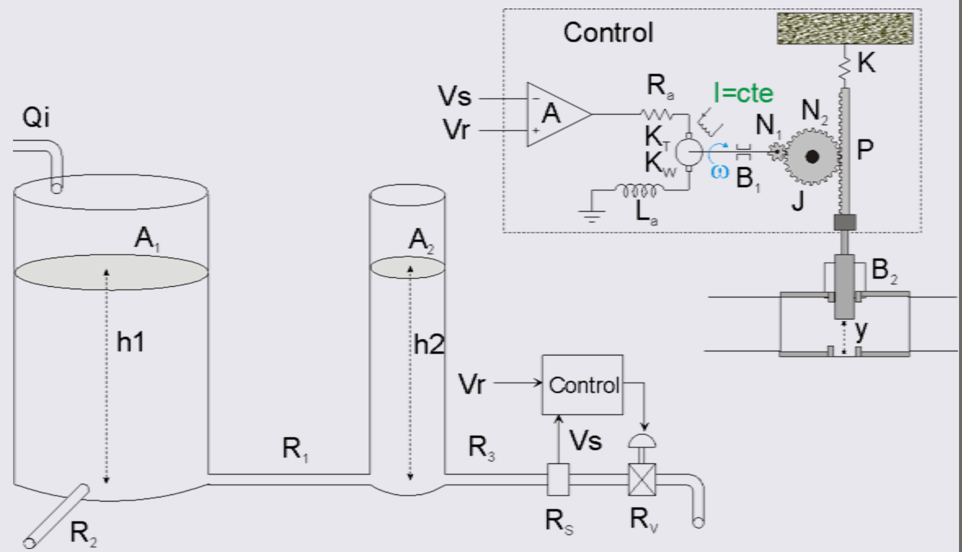
Ejercicio: linealización en el punto de equilibrio

Control de caudal en reacciones químicas



SISTEMAS NO LINEALES

El líquido cuyo caudal se desea controlar se encuentra almacenado en dos tanques con áreas A_1 y A_2 respectivamente alimentados por un caudal Qi, e interconectadas a través de un conducto



Desde el tanque de área A_1 se deriva una tubería de resistencia hidráulica R_1 por donde circula el caudal hacia el otro tanque y una tubería destinada a otro proceso cuyo caudal está determinando por la resistencia R_2 .

Desde el tanque de área A_2 se deriva la tubería a la que se le desea controlar el caudal sobre la cual se encuentra el sensor de caudal y la válvula motorizada de resistencia Rv.

SISTEMAS NO LINEALES

El control del caudal se realiza de la siguiente manera:

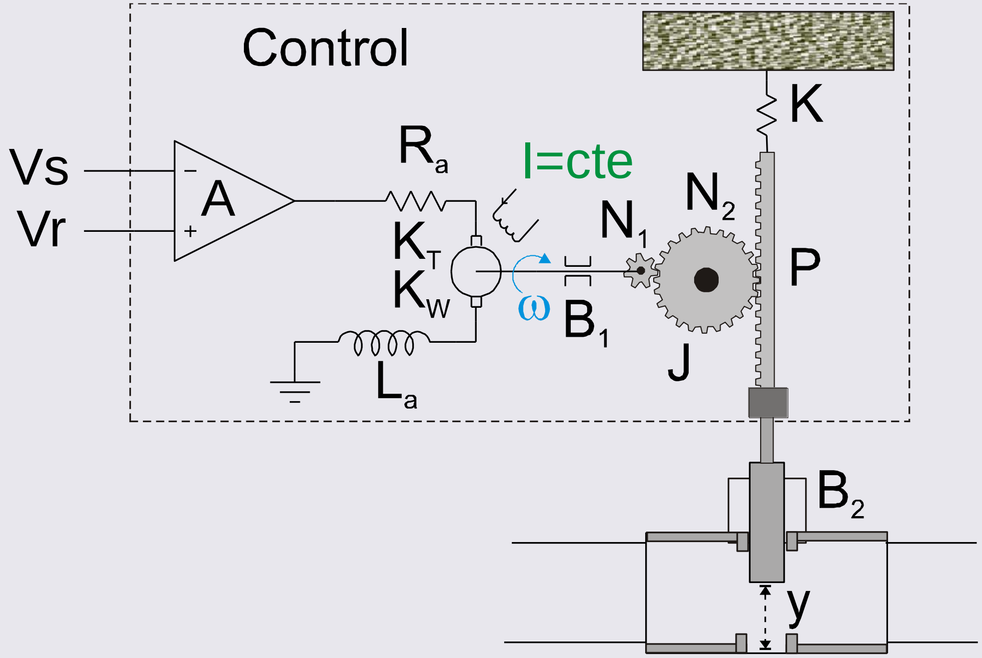
a) El sensor entrega una tensión proporcional al caudal por la tubería, es decir que $V_S=K_S.Q_S$.

b) Esta tensión es comparada con una referencia (Vr) y convenientemente amplificada para alimentar un motor de corriente continua que es el encargado de posicionar la válvula.

c) El posicionamiento del vástago de la válvula se realiza mediante una reducción compuesta por una reducción a engranaje (con relación N_1, N_2) fijo respecto de la referencia mecánica y una cremallera de paso P, móvil respecto del engranaje de la reducción .

d) La carga mecánica del movimiento de rotación está concentrada en los elementos B_1 y J ; y la del movimiento lineal de la válvula y el tornillo, son B_2 y K.

e) La válvula ofrece una resistencia dinámica a la circulación del fluido que sigue la siguiente ley en función de la posición del vástago: $Rv = \frac{R_{0V}}{\sqrt{y}}$ que finalmente se encarga de regular el caudal por la tubería.



SOLUCIÓN

1) Determinar las distintas secciones que componen el sistema separándolas por su naturaleza (mecánica, eléctrica, hidráulica) y determinar sus interfaces.
2) Analizar las secciones por separado y hallar las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento:

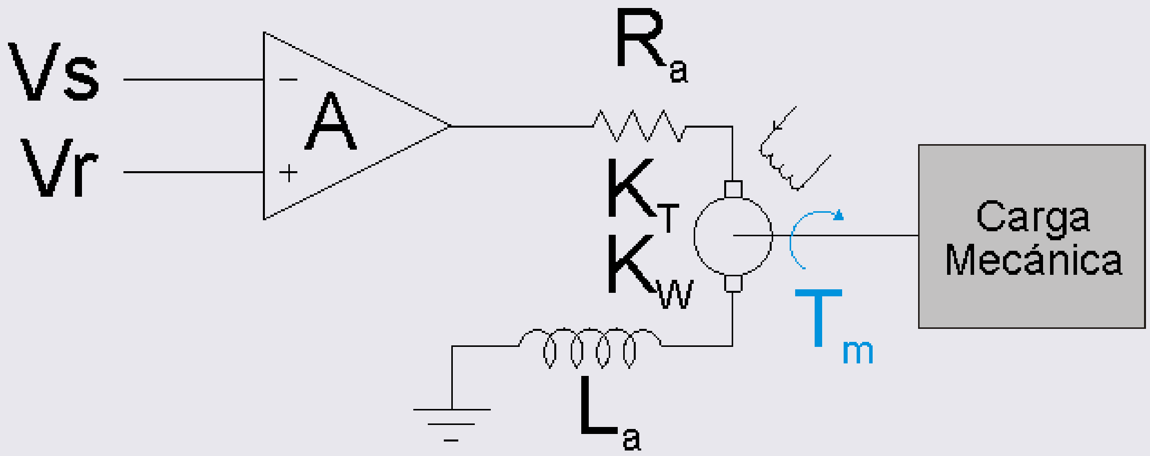
Ecuaciones diferenciales.

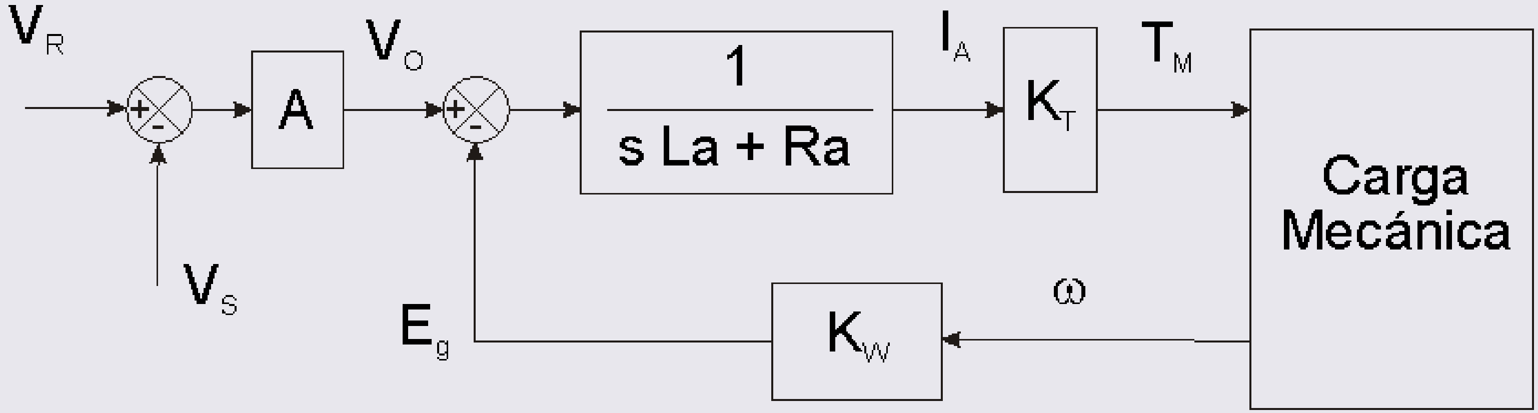
Funciones transferencia.

Diagrama en bloques.

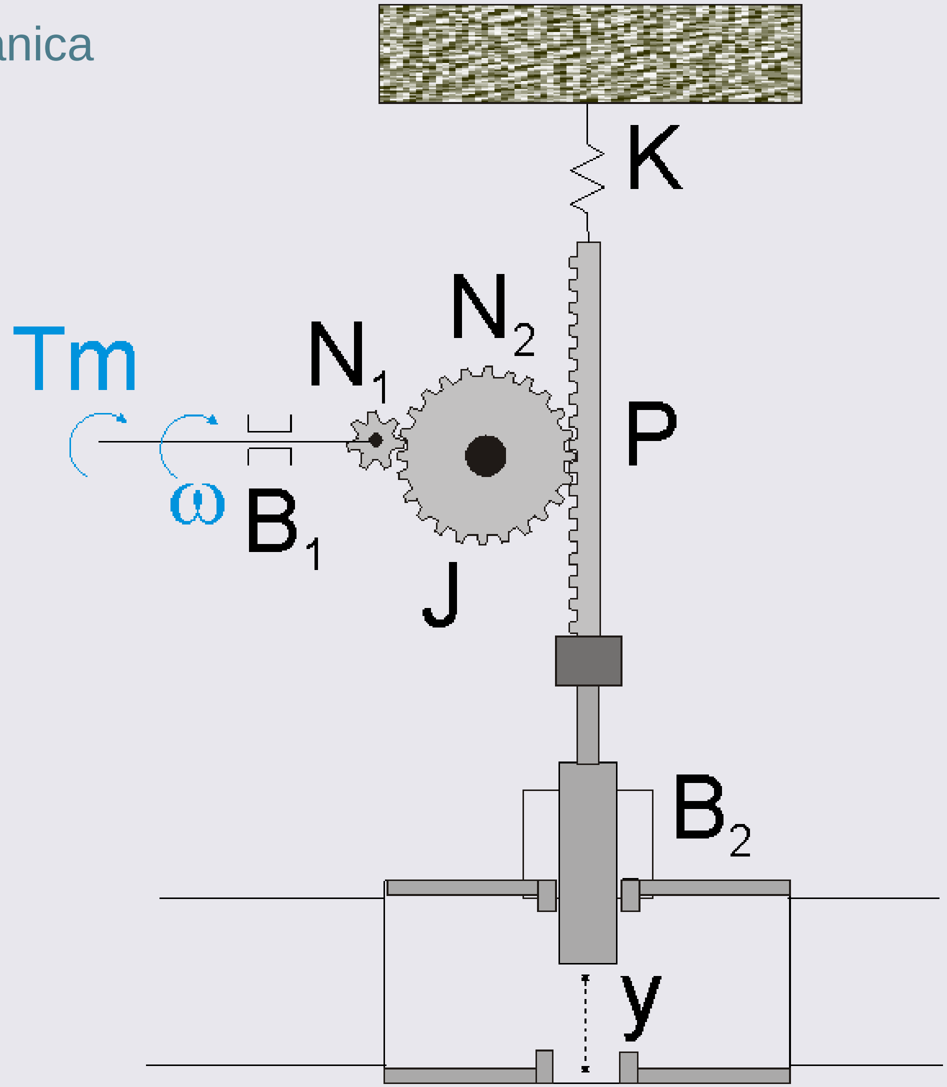
Circuitos equivalentes.

Parte Eléctrica

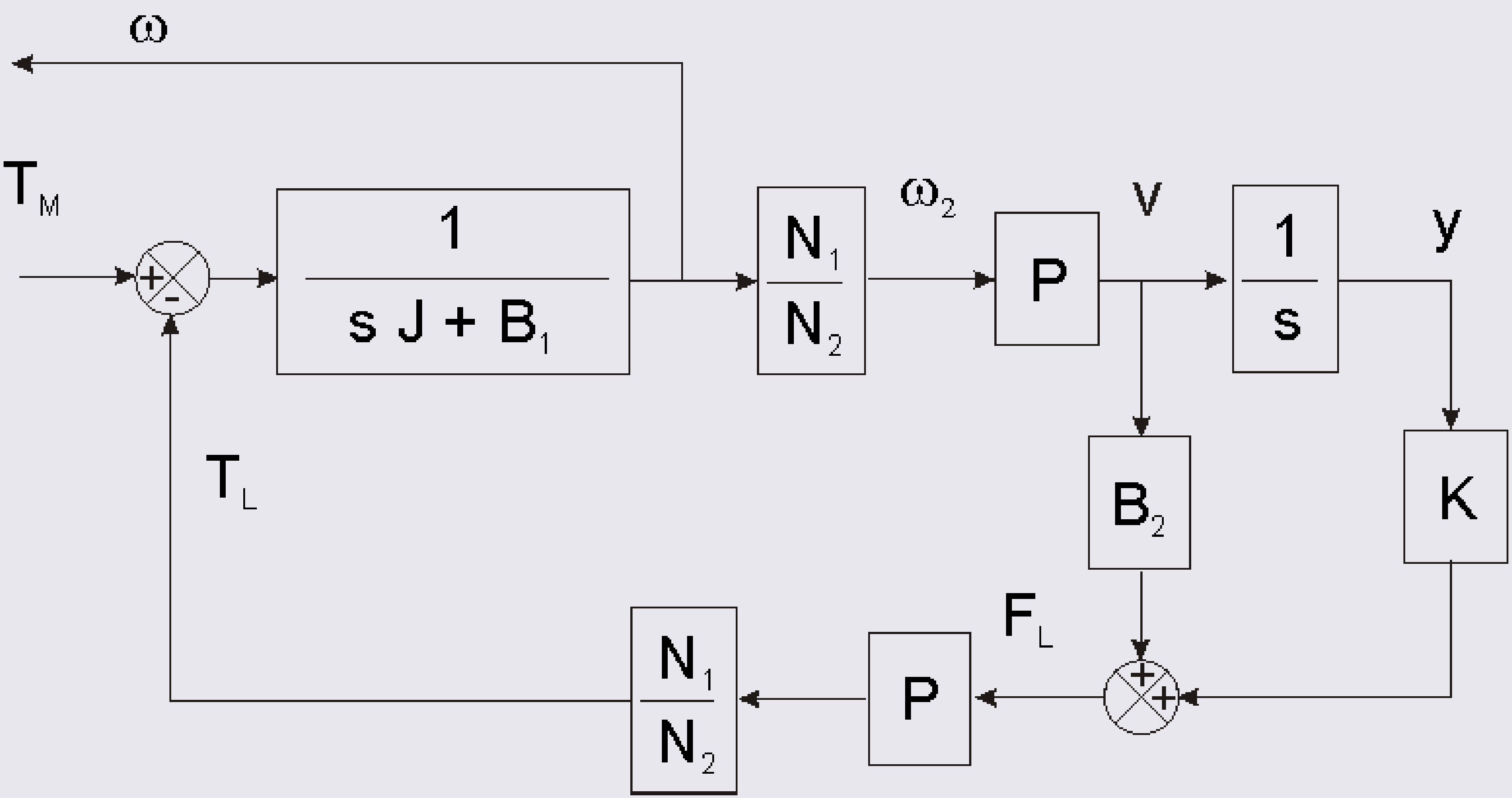




Parte Mecánica



Parte Mecánica



Parte Electro-mecánica : Ecuaciones (se consideran condiciones iniciales nulas)

$$(V_R - V_S) - K_W \omega = (sL_a + R_a) I_A$$

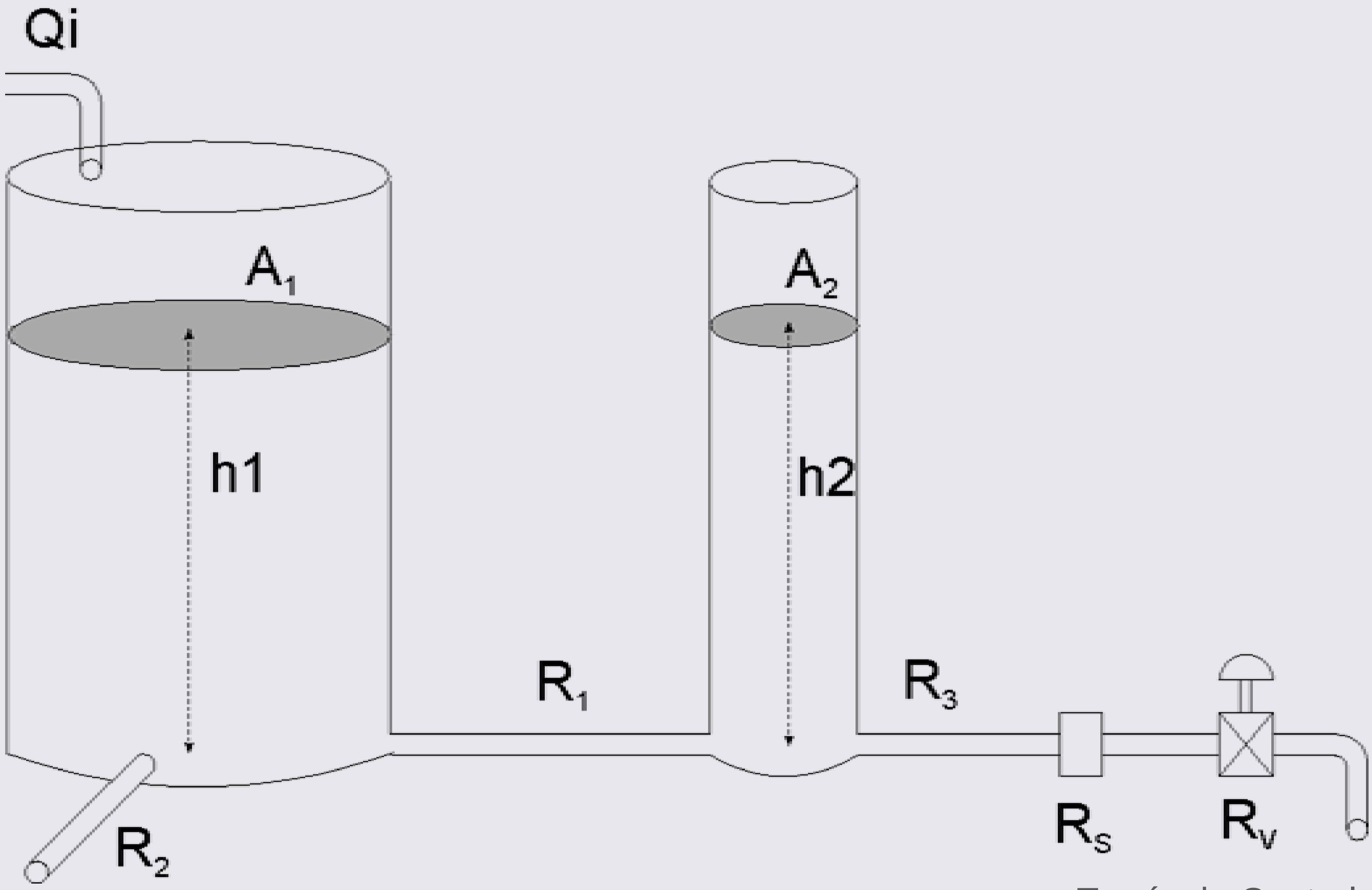
$$I_A K_T - \frac{N_1}{N_2} P \left(B_2 \frac{N_1}{N_2} P\omega + K\ Y \right) = (sJ + B_1)\omega$$

$$sY = V = \left(\frac{N_1}{N_2} P \right) \omega$$

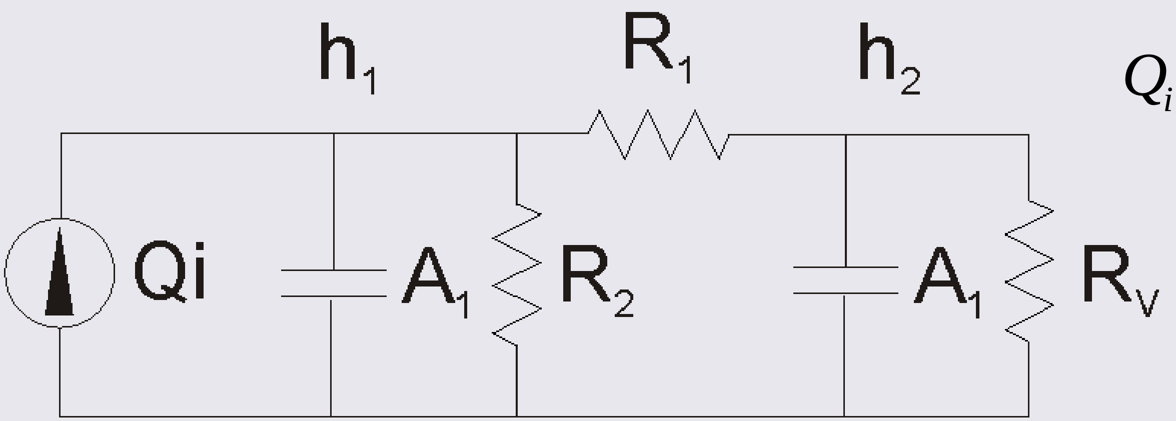
$$\begin{cases} sI_A = \dfrac{A}{L_a} Vr - \dfrac{AK_s}{L_a} q_s - I_A \dfrac{R_a}{L_a} - \dfrac{K_W}{L_a} \omega \\ s\omega = \dfrac{K_T}{J} I_A - \left(\dfrac{N_1}{N_2} P \dfrac{K}{J} \right) Y - \dfrac{1}{J} \left[B_2 \left(\dfrac{N_1}{N_2} P \right)^2 + B_1 \right] \omega \\ sY = V = \left(\dfrac{N_1}{N_2} P \right) \omega \end{cases}$$

SISTEMAS NO LINEALES

Parte Hidráulica



Parte Hidráulica : Circuito Análogo



$$Q_i(s) = sh_1A_1 + \frac{h_1 - h_2}{R_1} + \frac{h_1}{R_2}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = sh_2A_2 + \frac{h_2}{R_V}$$

$$\begin{cases} sh_1 = \dfrac{Q_i}{A_1} - \dfrac{1}{A_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)h_1 + \dfrac{h_2}{R_1A_1} \\[2ex] sh_2 = \dfrac{h_1}{R_1A_2} - \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_V}\right)h_2 = \dfrac{h_1}{R_1A_2} - \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\sqrt{Y}}{R_{0V}}\right)h_2 \end{cases}$$

SISTEMAS NO LINEALES

Ecuaciones Diferenciales

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= -\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)h_1 + \frac{1}{R_1 A_1}h_2 + \frac{1}{A_1}Q_i \\
\dot{h}_2 &= \frac{1}{R_1 A_2}h_1 - \frac{1}{A_2 R_1}h_2 - \frac{1}{A_2 R_{0V}}\sqrt{y}h_2 \\
\dot{I}_A &= -\frac{R_a}{L_a}I_A - \frac{K_W}{L_a}\omega - \frac{AK_s}{R_{OV}L_a}h_2\sqrt{y} + \frac{A}{L_a}V_R \\
\dot{\omega} &= \frac{K_T}{J}I_A - \frac{1}{J}\left[B_2\left(\frac{N_1}{N_2}P\right)^2 + B_1\right]\omega - \left(\frac{N_1}{N_2}P\frac{K}{J}\right)y \\
\dot{y} &= \left(\frac{N_1}{N_2}P\right)\omega
\end{aligned}\right.$$

Ecuaciones No Lineales

Linealización

$$\dot{x}\,(t) = f(x,u)$$

Punto de equilibrio $f(x_0,u_0)=0$

Desarrollando en series de Taylor :

$$f(x,u) = \underbrace{\cancel{f(x_0,u_0)}}_{0} + \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (x-x_0) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \cdot (u-u_0) + \ldots$$

Definiendo $x^* = x - x_0$ $\quad u^* = u - u_0$

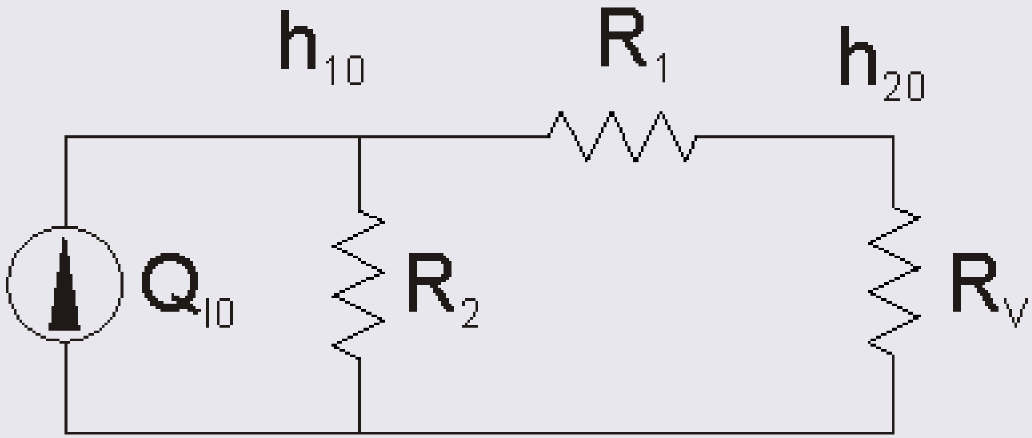
$$\dot{x}^* = \underbrace{\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} \cdot x^* + \underbrace{\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}}_{CTE} \cdot u^*$$

$$A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} \qquad B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$

Punto de Equilibrio

Datos: $Q_{I0}=2.7x10^{-3}m^3/seg$; $V_{R0}=0.5V$; $y_0=0.01m$

$$Rv_{(o)} = \frac{R_{0V}}{\sqrt{y_{(o)}}} = \frac{600}{\sqrt{0.01}} = 6000 seg/m^2$$

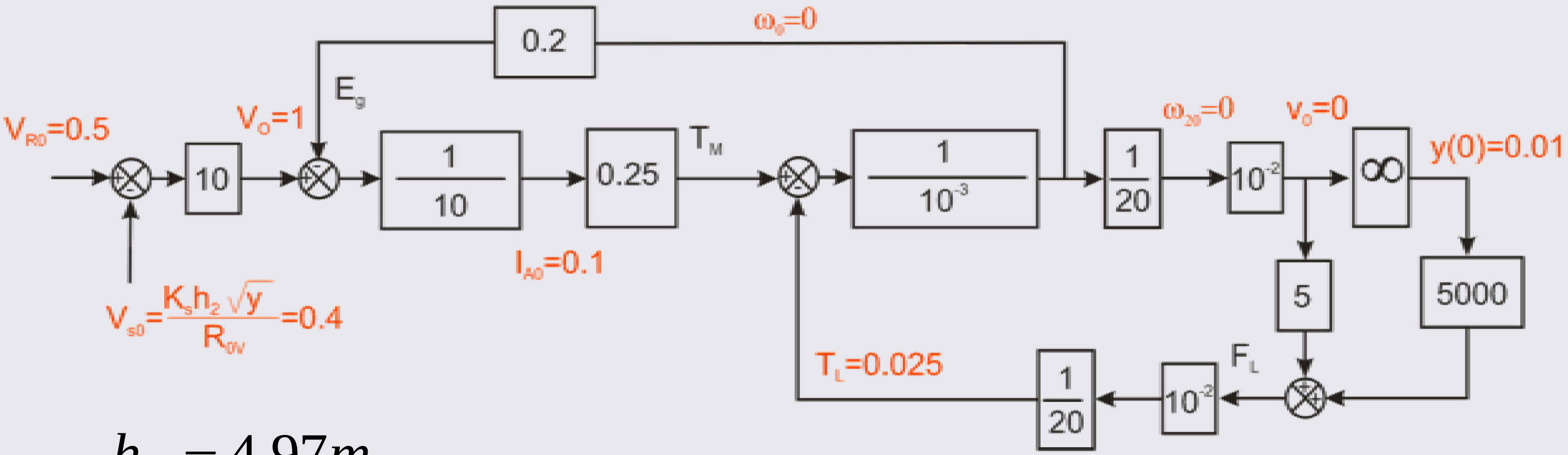


$$h_{10} = Q_{I0}\left[R_2//(R_1+Rv_{(o)})\right] = 4.97m$$

$$h_{20} = h_{10}\left[Rv_{(o)}/(R_1+Rv_{(o)})\right] = 4.26m$$

Punto de Equilibrio

Datos: Q_{I0}=2.7x$10^{-3}$$m^3$/seg; V_{R0}=0.5V; y_0=0.01m



$$h_{10} = 4.97m$$

$$h_{20} = 4.26m \qquad V_{R0} = 0.5V$$

$$I_{A0} = 0.1A \qquad Q_{I0} = 2.7\times10^{-3}\, m^3/s$$

$$\omega_0 = 0\, r/s$$

$$y_0 = 0.01m$$

Modelo linealizado

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{h}_1^* &= -\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)h_1^* + \frac{1}{R_1A_1}h_2^* + \frac{1}{A_1}Q_i^* \\
\dot{h}_2^* &= \frac{1}{R_1A_2}h_1^* - \frac{1}{A_2R_1}h_2^* - \frac{1}{A_2R_{0V}}\left.\frac{\partial\left(\sqrt{y}h_2\right)}{\partial y}\right|_{\substack{X_0\\U_0}} y^* - \frac{1}{A_2R_{0V}}\left.\frac{\partial\left(\sqrt{y}h_2\right)}{\partial h_2}\right|_{\substack{X_0\\U_0}} h_2^* \\
\dot{I}_A^* &= -\frac{AK_s}{R_{0V}La}\left.\frac{\partial\left(\sqrt{y}h_2\right)}{\partial h_2}\right|_{\substack{X_0\\U_0}} h_2^* - \frac{Ra}{La}I_A^* - \frac{K_W}{La}\omega^* - \frac{AK_s}{R_{0V}La}\left.\frac{\partial\left(\sqrt{y}h_2\right)}{\partial y}\right|_{\substack{X_0\\U_0}} y^* + \frac{A}{La}V_R^* \\
\dot{\omega}^* &= \frac{K_T}{J}I_A^* - \frac{1}{J}\left[B_2\left(\frac{N_1}{N_2}P\right)^2 + B_1\right]\omega^* - \left(\frac{N_1}{N_2}P\frac{K}{J}\right)y^* \\
\dot{y}^* &= \left(\frac{N_1}{N_2}P\right)\omega^*
\end{aligned}
\right.
$$

SISTEMAS NO LINEALES

Modelo linealizado

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{h}_1^{*} &= -\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)h_1^{*}+\frac{1}{R_1A_1}h_2^{*}+\frac{1}{A_1}Q_i^{*}\\
\dot{h}_2^{*} &= \frac{1}{R_1A_2}h_1^{*}-\frac{(R_{0V}+R_1\sqrt{y_0})}{A_2R_1R_{0V}}h_2^{*}-\frac{h_{20}}{A_2R_{0V}\,2\sqrt{y_0}}y^{*}\\
\dot{I}_A^{*} &= -\frac{AK_s}{R_{0V}La}\sqrt{y_0}\,h_2^{*}-\frac{Ra}{La}I_A^{*}-\frac{K_W}{La}\omega^{*}-\frac{AK_sh_{20}}{R_{0V}La2\sqrt{y_0}}y^{*}+\frac{A}{La}V_R^{*}\\
\dot{\omega}^{*} &= \frac{K_T}{J}I_A^{*}-\frac{1}{J}\left[B_2\left(\frac{N_1}{N_2}P\right)^2+B_1\right]\omega^{*}-\left(\frac{N_1}{N_2}P\frac{K}{J}\right)y^{*}\\
\dot{y}^{*} &= \left(\frac{N_1}{N_2}P\right)\omega^{*}
\end{aligned}\right.$$

SISTEMAS NO LINEALES

Modelo linealizado

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{h}_1^* &= -1.16x10^{-4}h_1^* + 8.33x10^{-5}h_2^* + 0.083Q_i^* \\
\dot{h}_2^* &= 3.33x10^{-5}h_1^* - 9.72x10^{-4}h_2^* - 0.0296y^* \\
\dot{I}_A^* &= -9.38h_2^* - 100I_A^* - 2\omega^* - 2000y^* + 100V_R^* \\
\dot{\omega}^* &= 125I_A^* - 0.506\omega^* - 1250y^* \\
\dot{y}^* &= 5x10^{-4}\omega^*
\end{aligned}
\right.
$$