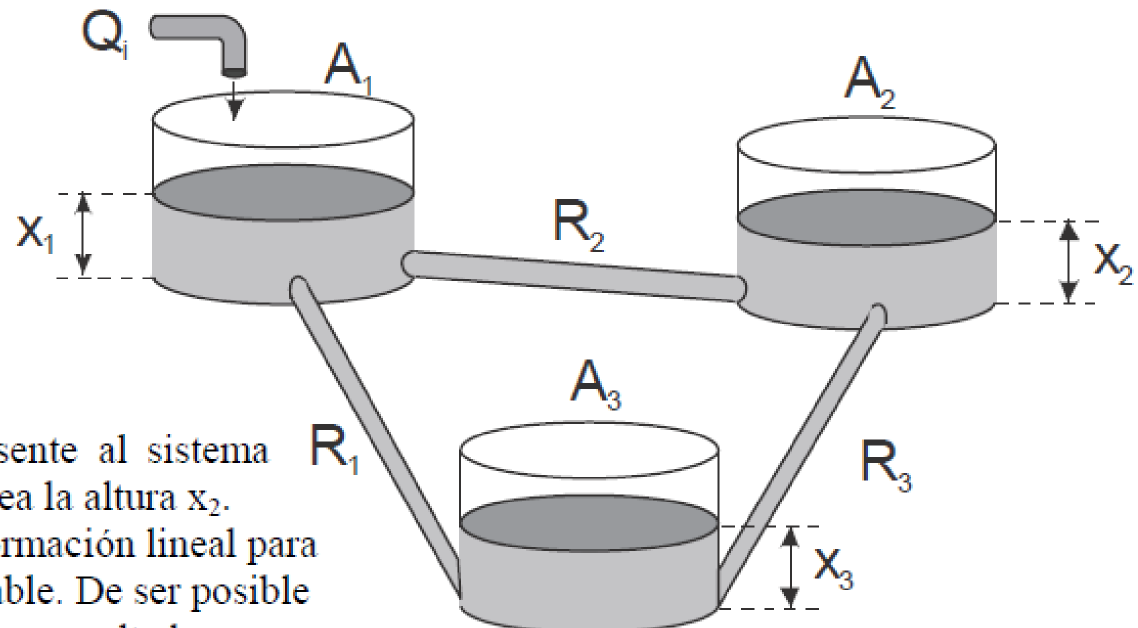
Controlabilidad y Observabilidad. Transformaciones Lineales.

Ejercicio 2-8

Enunciado

2-8) Considere el siguiente sistema hidráulico, el cual se compone de tres tanques cilíndricos interconectados y al que se le ingresa por uno de los tanques un caudal Q_i.

Las áreas transversales de los tanques son A_1, A_2 y A_3 y los tubos de interconexión presentan sendas resistencias dinámicas R_1, R_2 y R_3.

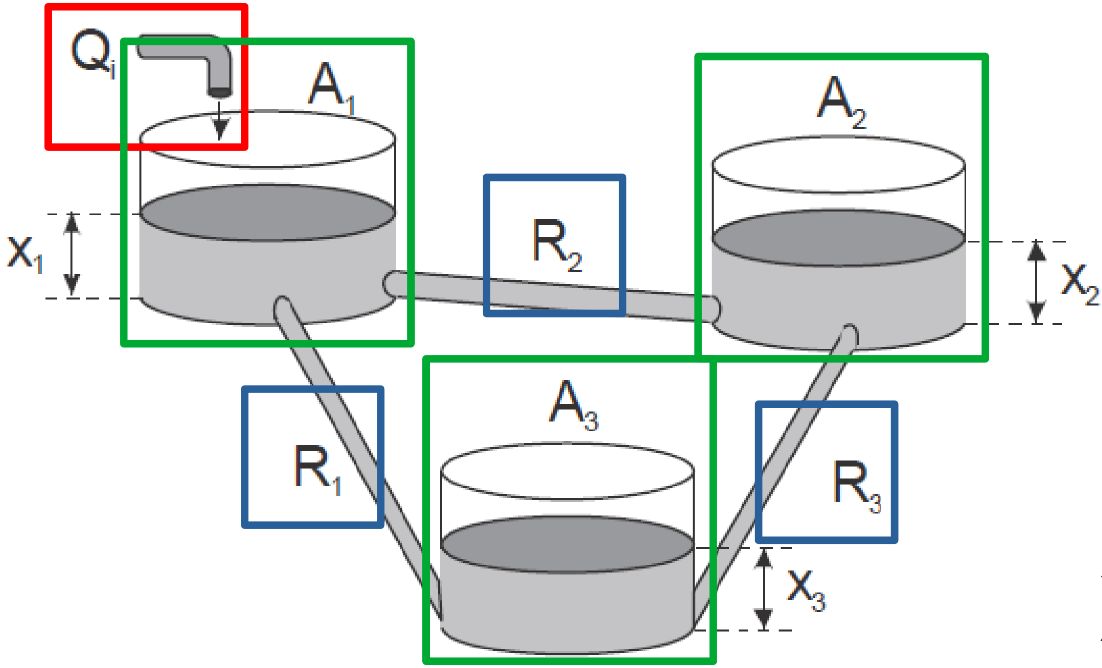


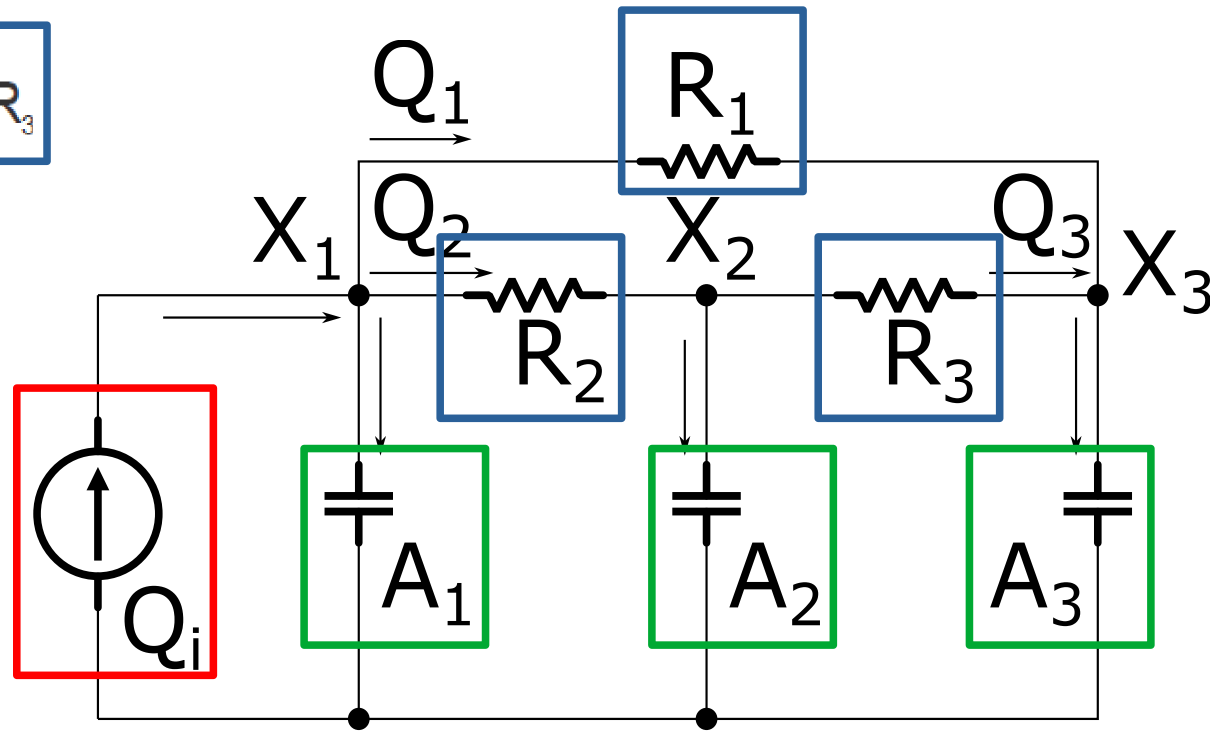
a) Encuentre un modelo de estado que represente al sistema cuya entrada sea el caudal Q_i, y cuya salida sea la altura x_2.
b) Determine si es posible encontrar una transformación lineal para llevar el modelo a la forma canónica controlable. De ser posible halle la matriz de transformación y verifique su resultado.
c) Determine si es posible encontrar una transformación lineal para llevar el modelo a la forma canónica observable. De ser posible halle la matriz de transformación y verifique su resultado.

Considere los siguientes valores para los parámetros: $A_1 = A_2 = A_3 = 1\ [m^2]$

$R_1 = 2\ [s/m]$; $R_2 = R_3 = 1\ [s/m]$.

Analogía Eléctrica



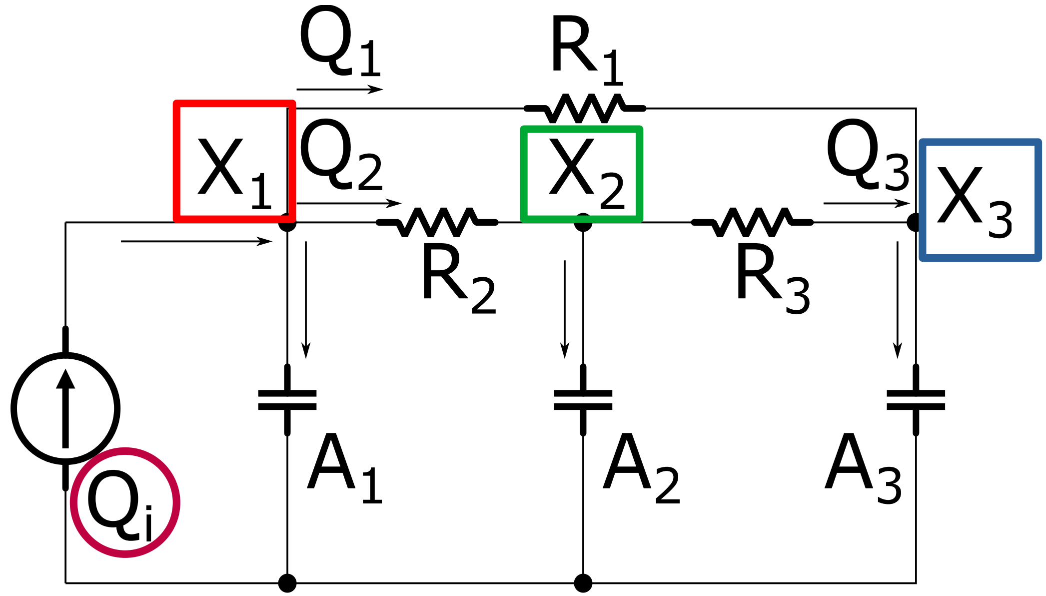


Modelo de Estado

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$u=Q_i$$

$$y=x_2$$



(1) $A_1 \dot{x}_1 = Q_i - Q_1 - Q_2$

(2) $A_2 \dot{x}_2 = Q_2 - Q_3$

(3) $A_3 \dot{x}_3 = Q_3 + Q_1$

(4) $Q_1 = \dfrac{x_1 - x_3}{R_1}$

(5) $Q_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{R_2}$

(6) $Q_3 = \dfrac{x_2 - x_3}{R_3}$

(4), (5) y (6)
en
(1), (2) y (3)

(I) $\dot{x}_1 = \dfrac{Q_i}{A_1} - \dfrac{\boxed{x_1}}{A_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) + \dfrac{\boxed{x_2}}{R_2 A_1} + \dfrac{\boxed{x_3}}{R_1 A_1}$

(II) $\dot{x}_2 = \dfrac{\boxed{x_1}}{R_2 A_2} - \dfrac{\boxed{x_2}}{A_2}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) + \dfrac{\boxed{x_3}}{R_3 A_2}$

(III) $\dot{x}_3 = \dfrac{\boxed{x_1}}{R_1 A_3} + \dfrac{\boxed{x_2}}{R_3 A_3} - \dfrac{\boxed{x_3}}{A_3}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}\right)$

Modelo de Estado

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$u=Q_i$$

$$y=x_2$$

(I) $$\dot{x}_1=\frac{Q_i}{A_1}-\frac{x_1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{x_2}{R_2 A_1}+\frac{x_3}{R_1 A_1}$$

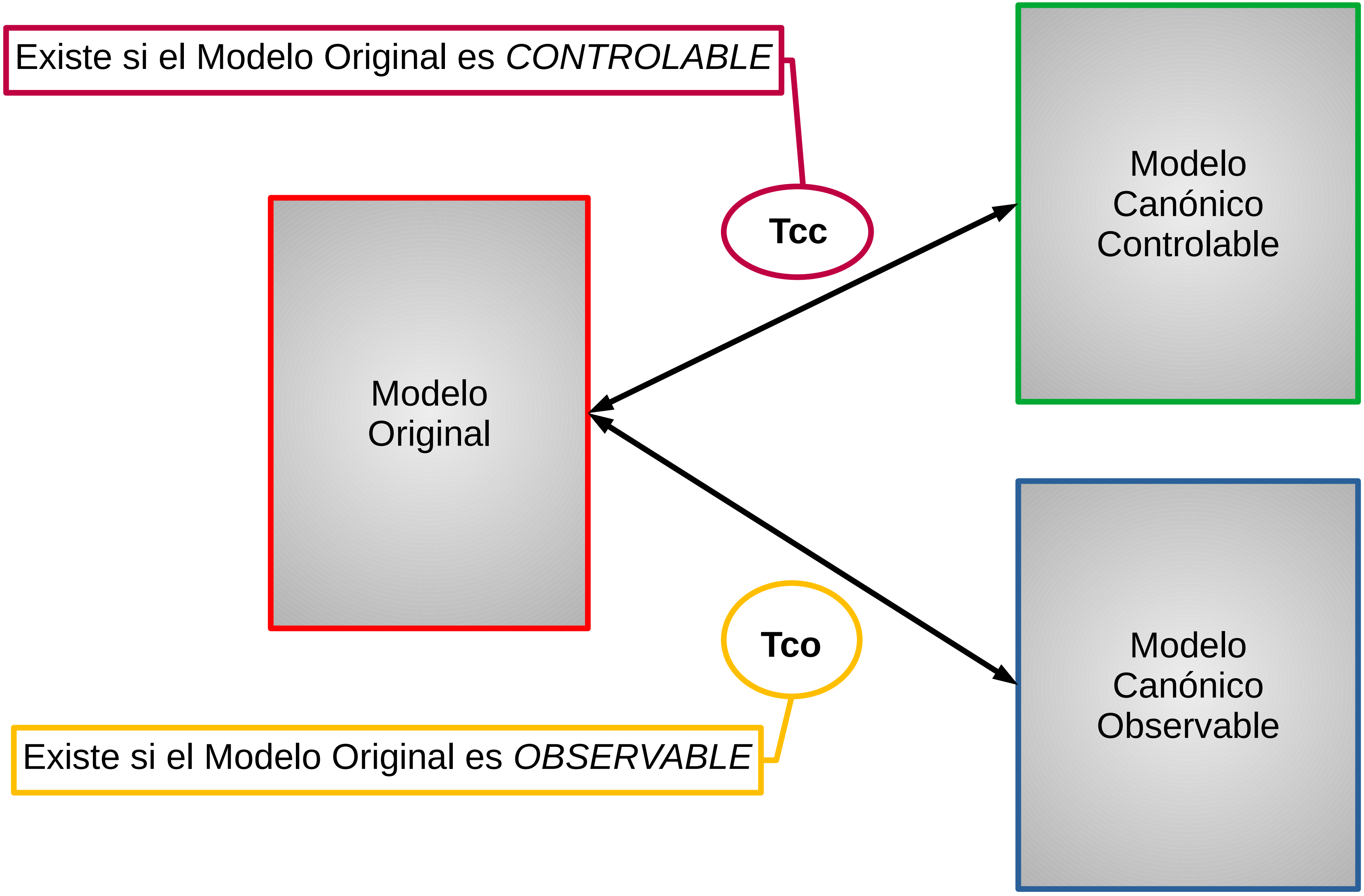
(II) $$\dot{x}_2=\frac{x_1}{R_2 A_2}-\frac{x_2}{A_2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\frac{x_3}{R_3 A_2}$$

(III) $$\dot{x}_3=\frac{x_1}{R_1 A_3}+\frac{x_2}{R_3 A_3}-\frac{x_3}{A_3}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_2 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_2 A_2} & \frac{-1}{A_2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{R_3 A_2} \\ \frac{1}{R_1 A_3} & \frac{1}{R_3 A_3} & \frac{-1}{A_3}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix}}^{\textbf{A}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\textbf{B}} Q_i$$

$$y=\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\textbf{C}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\overbrace{0}^{\textbf{D}} Q_i$$

Transformaciones Lineales



Modelo Original

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Q_i \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0\, Q_i$$

<u>**Controlabilidad:**</u>

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \ldots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \\ &n = 3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$rango(\boldsymbol{U}) = n \longrightarrow$ El sistema es CONTROLABLE

Si **U** es cuadrada $\longrightarrow$ $rango(\boldsymbol{U}) = n$ si $|\boldsymbol{U}| \neq 0$

$|\boldsymbol{U}| = 1 \longrightarrow rango(\boldsymbol{U}) = n \longrightarrow$ **El sistema es CONTROLABLE**

Existe *Tcc* que transforma el Modelo Original al Modelo Canónico Controlable

Modelo Original

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & 1 & 0.5\\ 1 & -2 & 1\\ 0.5 & 1 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}Q_i \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+0\,Q_i$$

Observabilidad:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C\,A} & \boldsymbol{C\,A}^{2} & \ldots & \boldsymbol{C\,A}^{\boldsymbol{n-1}}\end{bmatrix}^{T}\\ &n=3\end{aligned}\right\}\longrightarrow \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{C\,A} & \boldsymbol{C\,A}^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$rango(\boldsymbol{V})=n$ $\longrightarrow$ El sistema es OBSERVABLE

Si **V** es cuadrada $\longrightarrow$ $rango(\boldsymbol{V})=n$ si $|\boldsymbol{V}|\neq 0$

$|\boldsymbol{V}|=0$ $\longrightarrow$ $rango(\boldsymbol{V})\neq n$ $\longrightarrow$ **El sistema es NO OBSERVABLE**

NO Existe *Tco* que transforma el Modelo Original al Modelo Canónico Observable

Modelo Original

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & 1 & 0.5\\ 1 & -2 & 1\\ 0.5 & 1 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}Q_i \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+0\,Q_i$$

Observabilidad:

NO Existe *Tco* que transforma el Modelo Original al Modelo Canónico Observable

$$G(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\frac{1}{s(s+3)} \longrightarrow$$ **2° Orden**

Si elijo otra variable de estado como salida:

$x_1 \longrightarrow \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow G(s)=\dfrac{2+3.5s+s^2}{6s+5s^2+s^3} \longrightarrow$ **3° Orden**

$x_3 \longrightarrow \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow G(s)=\dfrac{2+0.5s}{6s+5s^2+s^3} \longrightarrow$ **3° Orden**

Modelo Canónico Controlable

$$\dot{X}=\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{-a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n} \end{bmatrix}}^{\text{Acc}} X+\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{Bcc}} u$$

$$y=\overbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{\text{Ccc}} X+du$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{c_m s^{m-1}+c_{m-1}s^{m-2}+\dots+c_2 s+c_1}{s^n+\boxed{a_n s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\dots+a_2 s+a_1}}+d$$

$$D(s)=|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

$$D(s)=\begin{bmatrix} s+1.5 & -1 & -0.5 \\ -1 & s+2 & -1 \\ -0.5 & -1 & s+1.5 \end{bmatrix}=s^3+5s^2+6s$$

$$a_1=0$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{cc}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{cc}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{cc}=\boldsymbol{C}\boxed{\boldsymbol{T}_{cc}}$$

Transformación Lineal

$$\boxed{\begin{aligned} A_{cc} &= T_{cc}^{-1} A T_{cc} \\ B_{cc} &= T_{cc}^{-1} B \end{aligned}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{cc} = U\, U_{cc}^{-1}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C_{cc} = C\, T_{cc}}$$

$$\boxed{T_{cc} = \begin{bmatrix} 2 & 3.5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$U_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{cc} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$T_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 1 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(s) = s^3 + 5s^2 + 6s$$

$$T_{cc}^{-1} = U_{cc} U^{-1}$$

No existe si el Modelo Original no es Controlable

$$U_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B_{cc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$