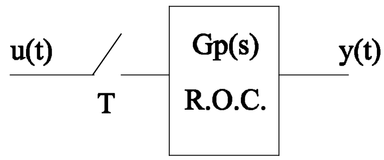
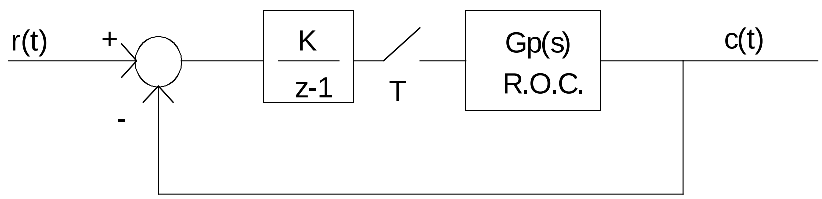
4-3) La planta de un sistema con retención de orden cero está caracterizada por la respuesta a una entrada en escalón indicada junto a la figura:



y(0) = 0
y(1) = 0.5
y(2) = y(3) = ... = 1

El algoritmo de control esta dado por D(z) = k/(z-1). Determine las condiciones de estabilidad en términos de k.



Para analizar la estabilidad se determinar la transferencia de la planta.
Por definición de transformada Z se puede hallar la expresión a partir de las muestras:

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\cdot z^{-k}=0.5\cdot z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\ldots$$

Se puede reescribir la serie de la siguiente forma:

$$Y(z)=0.5\cdot z^{-1}+z^{-2}\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\right)=0.5\cdot z^{-1}+z^{-2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

Desarrollando se llega a:

$$Y(z)=\frac{0.5\cdot z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)+z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{0.5\cdot z^{-1}-0.5\cdot z^{-2}+z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{0.5\cdot z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

Ahora se puede hallar la función de transferencia dividiendo por la transformada de la entrada (escalón):

$$Gp(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{0.5\cdot z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}\cdot\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{z}=\frac{0.5\cdot\left(1+z^{-1}\right)}{z}$$

La transferencia de lazo abierto es:

$$GH(z)=D(z)\cdot Gp(z)=\frac{0.5\cdot K\cdot\left(z+1\right)}{z^{2}(z-1)}$$

Para analizar los valores de K que dan como resultado una respuesta estable se van a aplicar técnicas de análisis de sistemas de tiempo continuo, para lo cual es necesario aplicar la transformación bilineal: $w=\frac{2}{T}\frac{\left(z-1\right)}{\left(z+1\right)}$.

Entonces la transferencia del modelo transformado queda: $GH(w)=\frac{0.5\left(w-1\right)^{2}}{w\left(w+1\right)^{2}}$

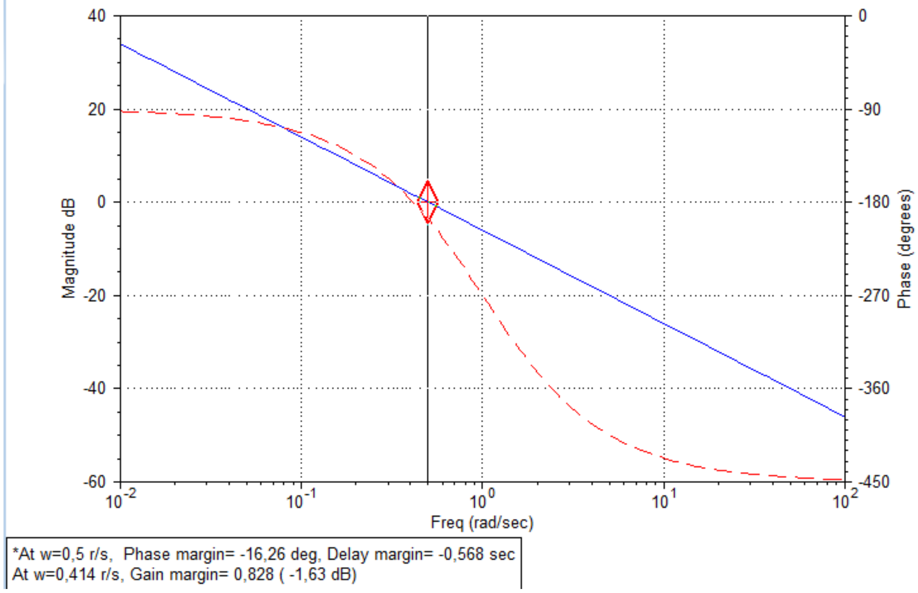
Una posibilidad es aplicar el método de Routh-Hurwitz.

$$1+GH(w)=1+\frac{0.5\cdot K\cdot\left(w-1\right)^{2}}{w\left(w+1\right)^{2}}=\frac{w\left(w+1\right)^{2}+0.5\cdot K\cdot\left(w-1\right)^{2}}{w\left(w+1\right)^{2}}=\frac{w^{3}+\left(2+0.5K\right)w^{2}+\left(1-K\right)w+0.5K}{w^{3}+2w^{2}+w}$$

$$\begin{array}{cccc}
w^3 & 1 & (1-K) \\
w^2 & (2+0.5K) & 0.5K \\
w & (2-2K-0.5K^2) & 0 \\
1 & 0.5K & 0
\end{array}$$

Las condiciones son $K \geq -4$; $K \leq -4.828$, $K \leq 0.828$ y $K \geq 0$. Por lo tanto resulta $0 \leq K \leq 0.828$

Si se aplica diagrama de Bode:



Analizando los márgenes de estabilidad se ve que es estable para valores de $0 \leq K \leq 0.828$.

La respuesta simulada para la ganancia crítica es: