



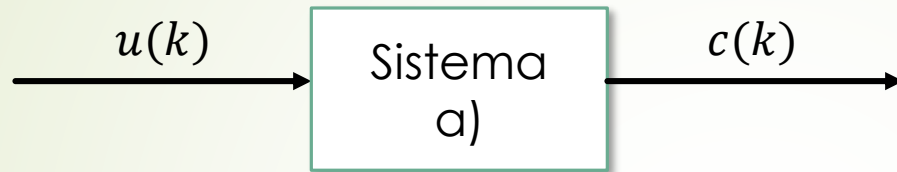
Sistemas Discretos

Ejercicio 4-1

Enunciado

- ▶ Las señales de entrada y salida de distintos sistemas de control están relacionadas por las siguientes ecuaciones en diferencia:
 - ▶ a) $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$
 - ▶ b) $c(k) = u(k - 1) + 0.25u(k - 2) - 0.5c(k - 1) + 0.375c(k - 2)$
- ▶ Halle una expresión que permita calcular la k-ésima salida a partir de los datos dados. En todos los casos:
 - ▶ $c(0) = 1$
 - ▶ $c(k) = 0$ para $k < 0$
 - ▶ $u(k) = 0$ para $k < 0$
 - ▶ $u(k) = 1$ para $k \geq 0$

Modelo discreto



$$c(k) = f(k)$$

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

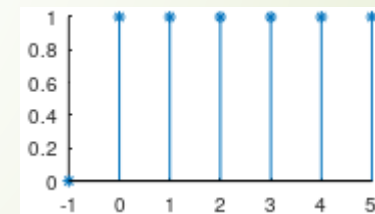
2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 0$

Condiciones iniciales



Escalón

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = 0$

▶ $k = 1$

$k = 2$

$$c(3) + 3c(2) + 2c(1) = u(1)$$

$$c(3) + 3c(2) + 2c(1) = 1$$

$$c(1) = \frac{1 - c(3) - 3c(2)}{2}$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = -1$

▶ $k = 0$

$k = 1$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = -2$

▶ $k = -1$

$k = 0$

$$c(1) + 3c(0) + 2c(-1) = u(-1)$$

$$c(1) + 3 \times 1 + 2 \times 0 = 0$$

$$c(1) = -3$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

$$c(1) = -3$$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = -1$

▶ $k = 0$

$k = 1$

$$c(2) + 3c(1) + 2c(0) = u(0)$$

$$c(2) + 3 \times (-3) + 2 \times 1 = 1$$

$$c(2) = 8$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

$$c(1) = -3$$

2. $c(0) = 1$

$$c(2) = 8$$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = 0$

▶ $k = 1$

$k = 2$

$$c(3) + 3c(2) + 2c(1) = u(1)$$

$$c(3) + 3 \times 8 + 2 \times (-3) = 1$$

$$c(3) = -17$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

$$c(1) = -3$$

2. $c(0) = 1$

$$c(2) = 8$$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

$$c(3) = -17$$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$k = 1$

▶ $k = 2$

$k = 3$

$$c(4) + 3c(3) + 2c(2) = u(2)$$

$$c(4) + 3 \times (-17) + 2 \times 8 = 1$$

$$c(4) = 36$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$$c(1) = -3$$

$$c(2) = 8$$

$$c(3) = -17$$

$$c(4) = 36$$

$k = 2$

▶ $k = 3$

$k = 4$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

$$c(1) = -3$$

$$c(2) = 8$$

$$c(3) = -17$$

$$c(4) = 36$$

$k = 3$

▶ $k = 4$

$k = 5$

$$c(6) + 3c(5) + 2c(4) = u(4)$$

$$c(6) + 3c(5) + 2 \times 36 = 1$$

$$c(6) = -71 - 3c(5) \quad ?$$

$c(k) = f(k)$

Modelo discreto

$$c(k) = f(k)$$

- ▶ Encuentro una serie con índice k directamente a partir de la ecuación.
 - ▶ En general, es difícil
- ▶ Hago la transformada Z de la ecuación, despejo $C(z)$ y calculo la anti transformada Z para obtener una serie con índice k
 - ▶ En general, no es tan difícil

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

6. $c(1) = -3$

Propiedad:

$$\mathcal{Z} \{c(k + m)\} = z^m \left[C(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c(k)z^{-k} \right]$$

Transformada Z

$$\mathcal{Z} \{c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k)\} = \mathcal{Z} \{u(k)\}$$

$$\mathcal{Z} \{c(k + 2)\} + 3\mathcal{Z} \{c(k + 1)\} + 2\mathcal{Z} \{c(k)\} = \mathcal{Z} \{u(k)\}$$

$$1 \mathcal{Z} \{c(k + 2)\} = z^2 \left[C(z) - \sum_{k=0}^1 c(k)z^{-k} \right] = z^2 [C(z) - c(0) - c(1)z^{-1}] = z^2 [C(z) - 1 + 3z^{-1}]$$

$$2 \mathcal{Z} \{c(k + 1)\} = z^1 \left[C(z) - \sum_{k=0}^0 c(k)z^{-k} \right] = z^1 [C(z) - c(0)] = z^1 [C(z) - 1]$$

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k) = u(k)$

2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

6. $c(1) = -3$

$$\mathcal{Z}\{c(k + 2)\} = z^2[C(z) - 1 + 3z^{-1}]$$

$$\mathcal{Z}\{c(k + 1)\} = z^1[C(z) - 1]$$

Transformada Z

$$\mathcal{Z}\{c(k + 2) + 3c(k + 1) + 2c(k)\} = \mathcal{Z}\{u(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{c(k + 2)\} + 3\mathcal{Z}\{c(k + 1)\} + 2\mathcal{Z}\{c(k)\} = \mathcal{Z}\{u(k)\}$$

$$z^2[C(z) - 1 + 3z^{-1}] + 3z^1[C(z) - 1] + 2C(z) = U(z)$$

Despejo C(z)

$$C(z) = \frac{U(z) + z^2}{z^2 + 3z + 2}$$

$$U(z) = \frac{z}{z - 1} \quad \leftarrow \text{Escalón}$$

$$C(z) = \frac{z^3 - z^2 + z}{(z - 1)(z + 1)(z + 2)}$$

Modelo discreto

Datos:

$$C(z) = \frac{z^3 - z^2 + z}{(z - 1)(z + 1)(z + 2)}$$

$$c(k) = f(k)$$

Anti Transformada Z

$$C(z) = \sum_i \frac{k_i z}{z - a_i} \longrightarrow c(k) = \sum_i k_i a_i^k$$

1. Aplico EFP:

$$z \times EFP \left(\frac{C(z)}{z} \right) \longrightarrow C(z) = \frac{1}{6} \frac{z}{z - 1} - \frac{3}{2} \frac{z}{z + 1} + \frac{7}{3} \frac{z}{z + 2}$$

2. Uso tabla de Transformada Z:

$$c(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} 1^k - \frac{3}{2} (-1)^k + \frac{7}{3} (-2)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Modelo discreto

Datos:

$$c(k) = \begin{cases} \frac{1}{6}1^k - \frac{3}{2}(-1)^k + \frac{7}{3}(-2)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c(0) &= 1 \\ c(1) &= -3 \\ c(2) &= 8 \\ c(3) &= -17 \\ c(4) &= 36 \end{aligned}$$

Verifico el modelo:

$$c(0) = \frac{1}{6}1^0 - \frac{3}{2}(-1)^0 + \frac{7}{3}(-2)^0 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{7}{3} = 1 \quad \checkmark$$

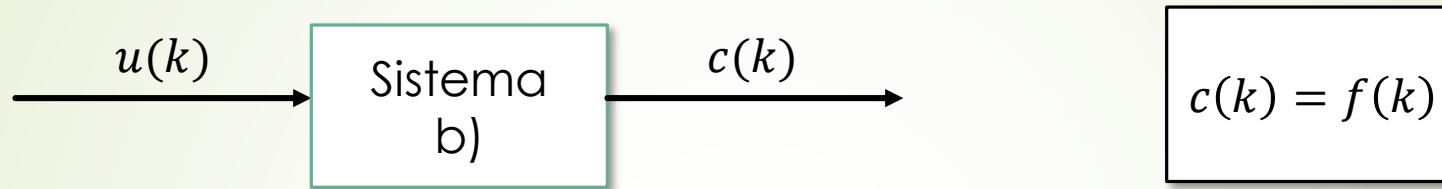
$$c(1) = \frac{1}{6}1^1 - \frac{3}{2}(-1)^1 + \frac{7}{3}(-2)^1 = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{14}{3} = -3 \quad \checkmark$$

$$c(2) = \frac{1}{6}1^2 - \frac{3}{2}(-1)^2 + \frac{7}{3}(-2)^2 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{28}{3} = 8 \quad \checkmark$$

$$c(3) = \frac{1}{6}1^3 - \frac{3}{2}(-1)^3 + \frac{7}{3}(-2)^3 = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{56}{3} = -17 \quad \checkmark$$

$$c(4) = \frac{1}{6}1^4 - \frac{3}{2}(-1)^4 + \frac{7}{3}(-2)^4 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{112}{3} = 36 \quad \checkmark$$

Modelo discreto



Datos:

1. $c(k) = u(k - 1) + 0,25u(k - 2) - 0,5c(k - 1) + 0,375c(k - 2)$

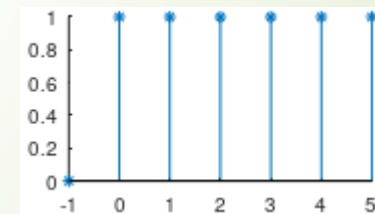
2. $c(0) = 1$

3. $c(k) = 0$ para $k < 0$

4. $u(k) = 0$ para $k < 0$

5. $u(k) = 1$ para $k \geq 0$

Condiciones iniciales



Escalón

Modelo discreto

Datos:

1. $c(k) = u(k - 1) + 0,25u(k - 2) - 0,5c(k - 1) + 0,375c(k - 2)$
2. $c(0) = 1$
3. $c(k) = 0$ para $k < 0$
4. $u(k) = 0$ para $k < 0$
5. $u(k) = 1$ para $k \geq 1$

Propiedad:

$$\mathcal{Z}\{c(k - m)\} = z^{-m}C(z)$$

Transformada Z

$$\mathcal{Z}\{c(k)\} = \mathcal{Z}\{u(k - 1)\} + 0,25 \mathcal{Z}\{u(k - 2)\} - 0,5 \mathcal{Z}\{c(k - 1)\} + 0,375 \mathcal{Z}\{c(k - 2)\}$$

$$C(z) = z^{-1}U(z) + 0,25z^{-2}U(z) - 0,5z^{-1}C(z) + 0,375z^{-2}C(z)$$

Despejo C(z)

$$C(z) = \frac{U(z)(z + 0,25)}{z^2 + 0,5z - 0,375} \xrightarrow{U(z) = \frac{z}{z - 1} \leftarrow \text{Escalón}} C(z) = \frac{z^2 + 0,25z}{(z - 1)(z - 0,41)(z + 0,91)}$$

Modelo discreto

Datos:

$$C(z) = \frac{z^2 + 0,25z}{(z - 1)(z - 0,41)(z + 0,91)}$$

$$c(0) = 1$$

$$c(k) = f(k)$$

Anti Transformada Z

1. Aplico EFP:

$$z \times EFP \left(\frac{C(z)}{z} \right) \longrightarrow C(z) = \frac{1,1092z}{z - 1} - \frac{0,8475z}{z - 0,41} - \frac{0,2618z}{z + 0,91}$$

2. Uso tabla de Transformada Z:

$$c(k) = \begin{cases} 1,1092 \times 1^k - 0,8475 \times 0,41^k - 0,2618(-0,91)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Verifico el modelo:

$$c(0) = 1,1092 \times 1^0 - 0,8475 \times 0,41^0 - 0,2618(-0,91)^0 = 1,1092 - 0,8475 - 0,2618 = 0$$

X

No se usó en la TF Z

Modifico la ecuación en diferencias

Modelo discreto

Datos:

$$1. c(k) = u(k - 1) + 0,25u(k - 2) - 0,5c(k - 1) + 0,375c(k - 2)$$

$$2. c(0) = 1$$

Propiedad:

$$\mathcal{Z} \{c(k + m)\} = z^m \left[C(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c(k)z^{-k} \right]$$

**Esta propiedad me permite
agregar las condiciones
iniciales al modelo**

Con $m=1$:

$$\mathcal{Z}\{c(k + 1)\} = z^1[C(z) - c(0)]$$

$$c(k + 1) = u(k) + 0,25u(k - 1) - 0,5c(k) + 0,375c(k - 1)$$

**Para incluir $c(0)$, debo
calcular $c(k+1)$**

Transformada Z

$$z[C(z) - \textcircled{1}] = U(z) + 0,25z^{-1}U(z) - 0,5C(z) + 0,375z^{-1}C(z)$$

Despejo C(z)

$$C(z) = \frac{U(z)(z + 0,25) + z^2}{z^2 + 0,5z - 0,375} \quad U(z) = \frac{z}{z - 1} \quad \leftarrow \text{Escalón}$$

$$C(z) = \frac{z^3 + 0,25z}{(z - 1)(z - 0,41)(z + 0,91)}$$

Modelo discreto

Datos:

$$C(z) = \frac{z^3 + 0,25z}{(z-1)(z-0,41)(z+0,91)} \quad c(0) = 1 \quad \boxed{c(k) = f(k)}$$

Anti Transformada Z

1. Aplico EFP:

$$z \times EFP \left(\frac{C(z)}{z} \right) \longrightarrow C(z) = \frac{1,1092z}{z-1} - \frac{0,5369z}{z-0,41} + \frac{0,4276z}{z+0,91}$$

2. Uso tabla de Transformada Z:

$$c(k) = \begin{cases} 1,1092 \times 1^k - 0,5369 \times 0,41^k + 0,4276(-0,91)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Verifico el modelo:

$$c(0) = 1,1092 \times 1^0 - 0,5369 \times 0,41^0 + 0,4276(-0,91)^0 = 1,1092 - 0,5369 + 0,4276 = 1$$

