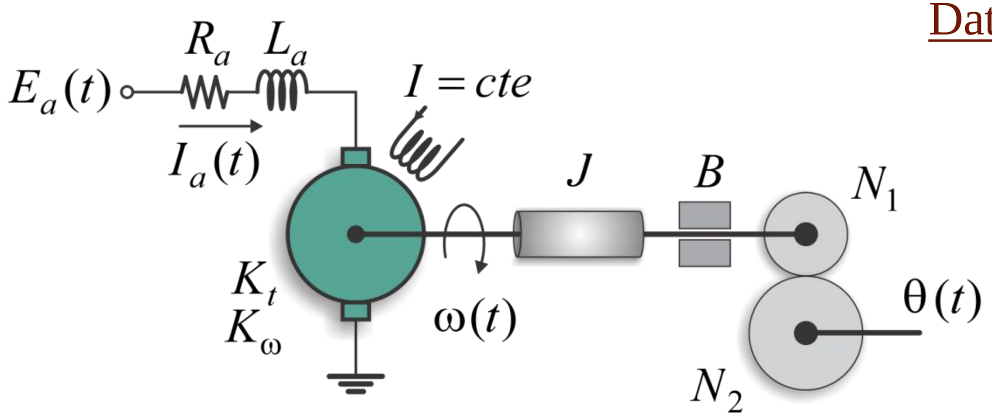
Compensadores por cancelación

Resolución: ejercicio 5_9

Compensadores por cancelación

La figura muestra un sistema compuesto por un motor de corriente continua con reducción, al cual se lo va a utilizar para realizar un control de posición.



Datos

$R_a = 2\Omega$	$K_t = 0.68$ Nm/A
$L_a = 0.02$H	$K_\omega = 0.678$ Vs/r
$J = 0.05$ Nms^2	$N = N_1/N_2 = 0.1$
$B = 0.02$ Nm s/r	

Se desea diseñar un controlador digital que tenga las siguientes características.

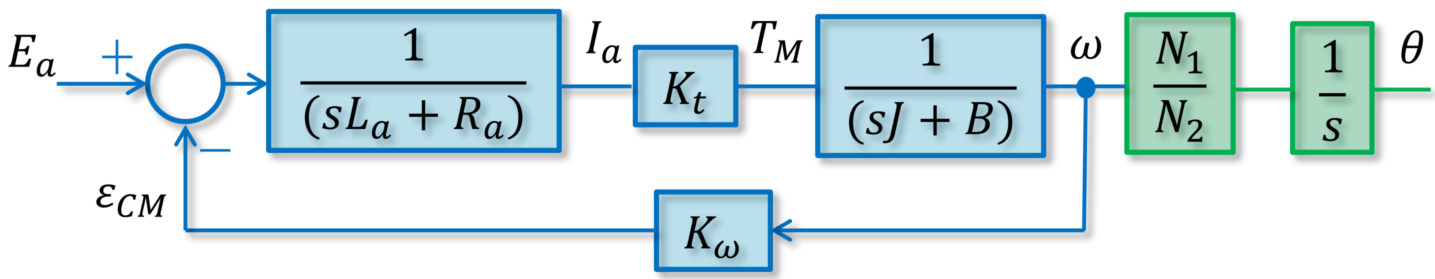
a) Error de régimen permanente nulo para una entrada en forma de rampa unitaria $[r(t) = tu(t)]$.

b) Tiempo de asentamiento mínimo.

Considere que el procesador digital funciona con un periodo de muestreo $T = 0.01s$, y que la salida del controlador posee un conversor D/A con Latch.

Compensadores por cancelación

Planta continua



$$G_p(s) = \frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t N}{s[sJL_a + (JR_a + BL_a)s + K_t K_\omega} = \frac{68}{s(s^2 + 100.4s + 461)}$$

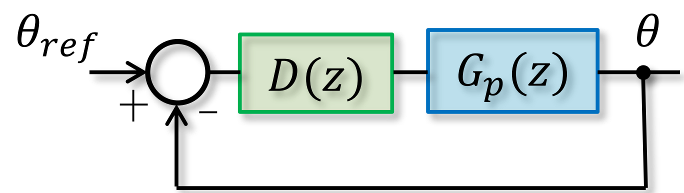
Se discretiza la planta con un periodo de muestreo $T = 0.01\text{s}$.

$$G_p(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{68}{s^2(s^2 + 100.4s + 461)}\right\} = \frac{8.956 \cdot 10^{-6}(z + 0.2047)\boxed{(z + 2.9614)}}{(z - 0.3845)(z - 0.9529)(z - 1)}$$

Cero fuera del circulo unitario

Compensadores por cancelación

Diseño del controlador D(z)



$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)}\left[\frac{T(z)}{1 - T(z)}\right]$$

$$G_p(z) = \frac{8.956 \cdot 10^{-6}(z + 0.2047)(z + 2.9614)}{(z - 0.3845)(z - 0.9529)(z - 1)}$$

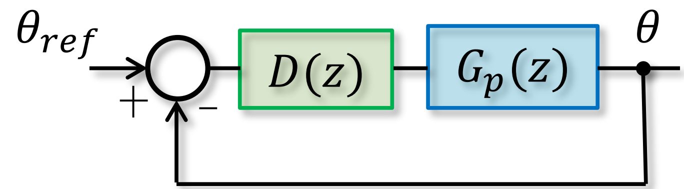
$$T(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_M z^{-M}) \prod_i (1 - c_i z^{-1})$$

$$1 - T(z) = (1 - z^{-1})^P (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \cdots) \prod_j (1 - p_j z^{-1})$$

Características

- La planta es de orden 3. ➡ Tiempo de asentamiento mín: 3 muestras.
- 1 cero fuera del circulo unitario. ➡ Tiempo de asentamiento mín: 4 muestras.

Compensadores por cancelación



$$G_p(z) = \frac{8.956 \cdot 10^{-6}(z + 0.2047)(z + 2.9614)}{(z - 0.3845)(z - 0.9529)(z - 1)}$$

$$T(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_M z^{-M}) \prod_i (1 - c_i z^{-1})$$

$$1 - T(z) = (1 - z^{-1})^P (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \cdots) \prod_j (1 - p_j z^{-1})$$

Características

- Diferencia entre polos y ceros: 3-2=1 ➡ $T(z)$ comienza en z^{-1}
- Se pretende error nulo a la rampa. ➡ $[1 - T(z)]$ debe contener el término $(1 - z^{-1})^2$

Luego:

$$\boxed{T(z) = (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3})(1 + 2.9614 z^{-1})}$$

$$\boxed{[1 - T(z)] = (1 - z^{-1})^2 (1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2})}$$

Compensadores por cancelación

Diseño del controlador

$$T(z) = (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3})(1 + 2.9614z^{-1}) \quad \boxed{\text{Ec. (I)}}$$

$$[1 - T(z)] = (1 - z^{-1})^2(1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}) \quad \boxed{\text{Ec. (II)}}$$

Operando con (I) y (II) se obtiene la siguiente igualdad:

$$1 - (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3})(1 + 2.9614z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2(1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2})$$

La resolución involucra resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 - \beta_1 \\ \alpha_2 + 2.9614\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2 - 1 \\ \alpha_3 + 2.9614\alpha_2 = 2\beta_2 - \beta_1 \\ 2.9614\alpha_3 = -\beta_2 \end{cases}$$

Sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas.

¿Se tiene un grado de libertad?

¿Puedo por ejemplo hacer $\beta_2 = 0$?

Compensadores por cancelación

Diseño del controlador

Si se adopta $\beta_2 = 1$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2.9614 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2.9614 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2.9614 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2.9614 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2.9614 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2.9614 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.3559018 \\ \alpha_2 &= 0.2341958 \\ \alpha_3 &= -0.3376675 \\ \beta_1 &= 1.6440982 \end{aligned}}$$

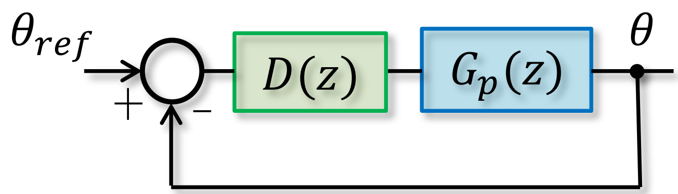
Finalmente:

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \left[\frac{T(z)}{1 - T(z)} \right]$$

$$\boxed{D(z) = 39732.3 \frac{(z - 0.3845)(z - 0.9529)(z + 1.357)(z - 0.699)}{(z - 1)(z + 0.2047)\,(z^2 + 1.644z + 1)}}$$

Compensadores por cancelación

Análisis de lazo de control



$$D(z) = 39732.3\frac{\boxed{(z-0.3845)}\boxed{(z-0.9529)}(z+1.357)(z-0.699)}{(z-1)\boxed{(z+0.2047)}\,(z^2+1.644z+1)}$$

$$G_p(z) = \frac{8.956\cdot 10^{-6}\boxed{(z+0.2047)}(z+2.9614)}{\boxed{(z-0.3845)}\boxed{(z-0.9529)}(z-1)}$$

$$GH(z) = D(z)G_p(z) = \frac{0.355\,(z+1.357)(z-0.699)\boxed{(z+2.9614)}}{\boxed{(z-1)^2}(z^2+1.644z+1)}$$

La singularidad fuera del circulo unitario sigue en GH

GH tiene dos polos en el origen, para seguimiento de una rampa!

$$T(z) = 0.355\frac{(z+2.9614)(z+1.357)(z-0.699)}{z^4}$$

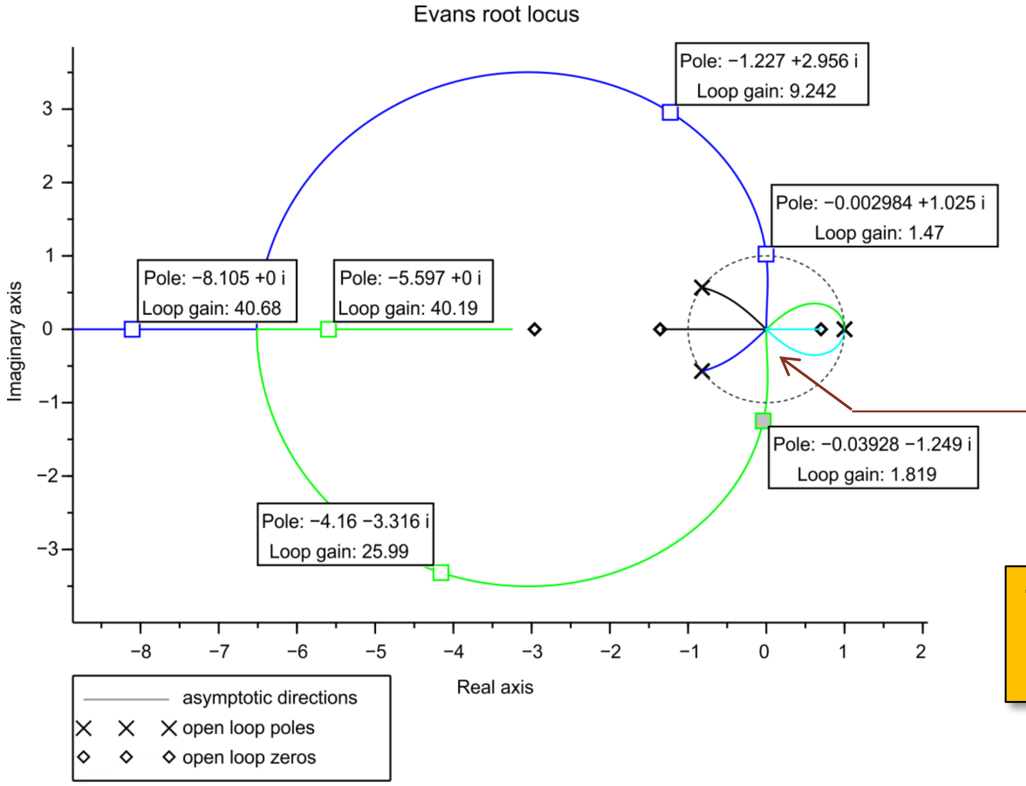
Los ceros de GH no se mueven

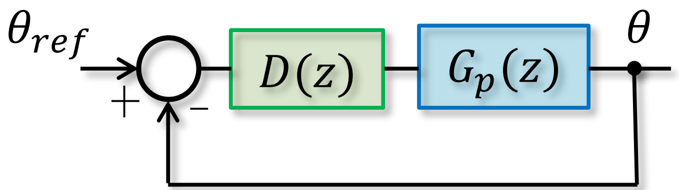
Todos los polos en cero

Compensadores por cancelación

Análisis del lugar de raíces de GH(z)

$$GH(z) = D(z)G_p(z) = 0.355\frac{(z+2.9614)(z+1.357)(z-0.699)}{(z-1)^2\,(z^2+1.644z+1)}$$



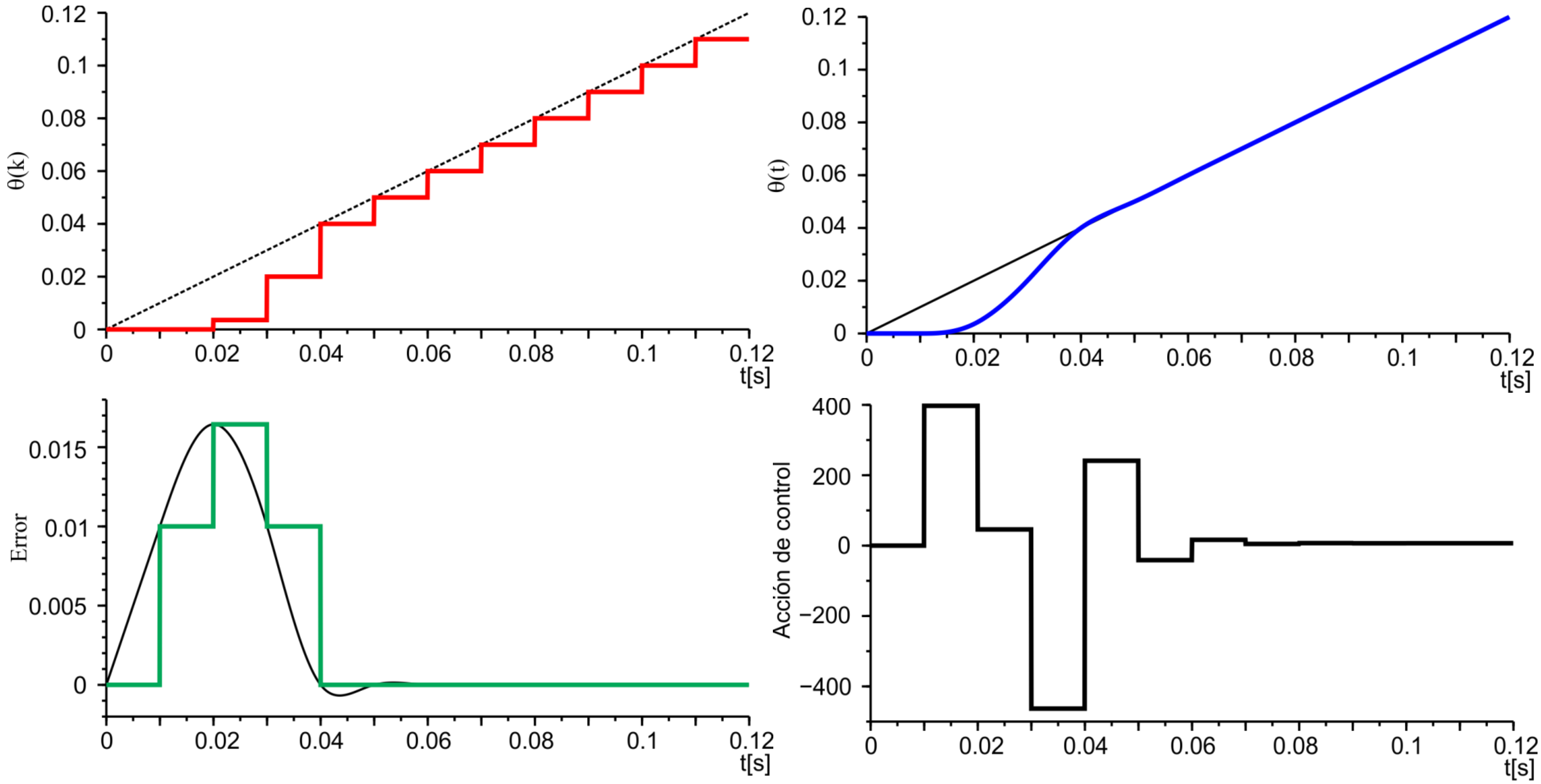


Todos los polos pasan por origen para ganancia unitaria

Compensadores por cancelación

Simulaciones

¿Qué pasa si cambio el grado de libertad en la solución? i.e. $b_2 = 2$



Compensadores por cancelación

Diseño del controlador

Si se adopta $\beta_2 = 2$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2.9614 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2.9614 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2.9614 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.0182343 \\ \alpha_2 &= 0.9095307 \\ \alpha_3 &= -0.6753349 \\ \beta_1 &= 1.9817657 \end{aligned}}$$

Nuevo

$$D(z) = 2035.65 \frac{(z + 50.612)(z - 0.953)(z - 0.731)(z - 0.384)}{(z - 1)(z + 0.2047)\,(z^2 + 1.9817z + 2)}$$

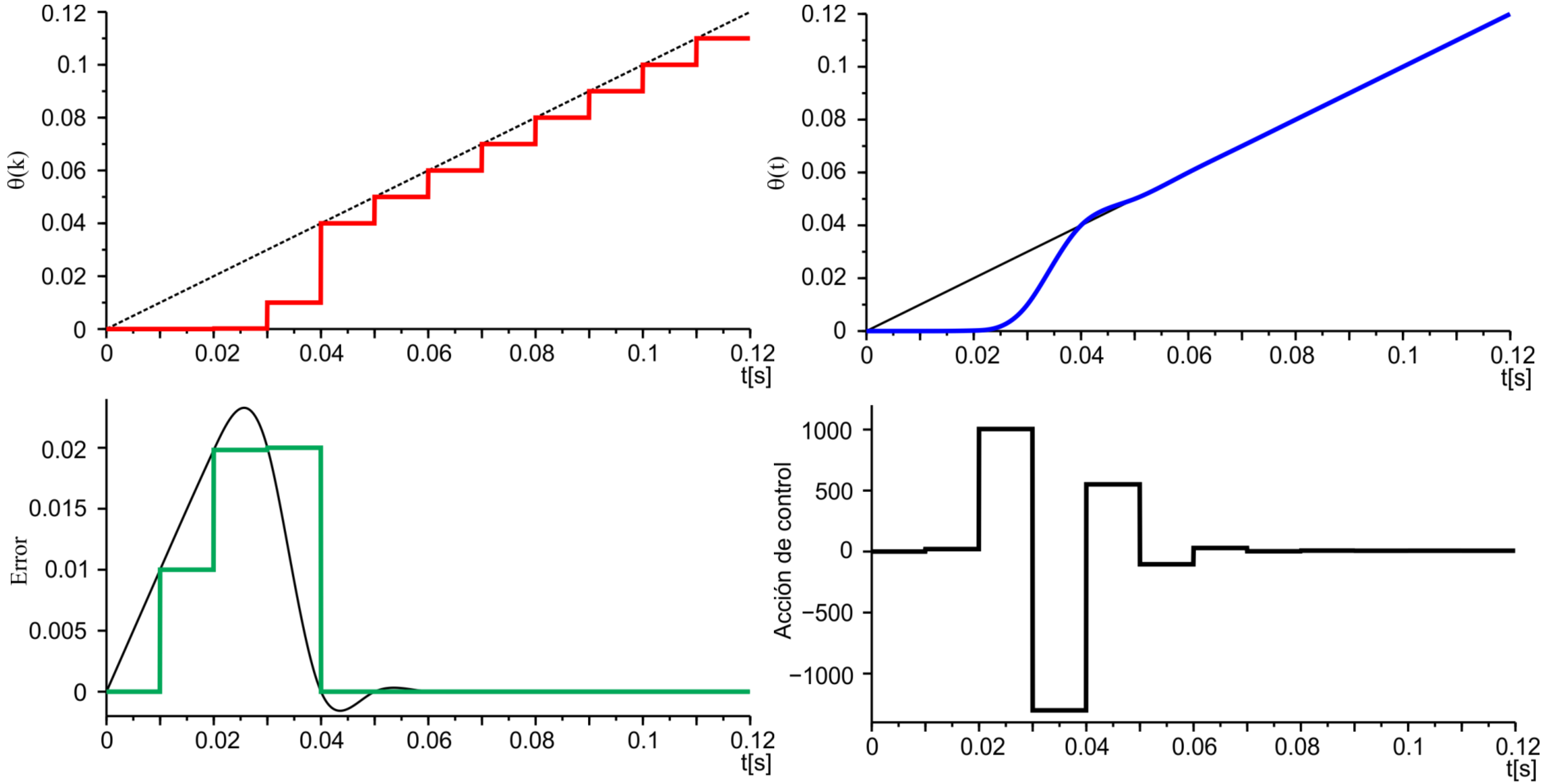
Anterior

$$D(z) = 39732.3 \frac{(z - 0.3845)(z - 0.9529)(z + 1.357)(z - 0.699)}{(z - 1)(z + 0.2047)\,(z^2 + 1.644z + 1)}$$

Compensadores por cancelación

Simulaciones

La acción de control aumenta considerablemente!



Compensadores por cancelación

Simulaciones

Se evalúa el caso de implementar un controlador con coeficientes redondeados

Sin redondear

$$D(z) = 39732.3\,\frac{(z-0.3845)(z-0.9529)(z+1.357)(z-0.699)}{(z-1)(z+0.2047)\,(z^2+1.644z+1)}$$

Redondeado

$$D(z) = 39732\,\frac{(z-0.4)(z-0.95)(z+1.36)(z-0.7)}{(z-1)(z+0.2)\,(z^2+1.644z+1)}$$

¿Qué otras razones pueden llevar a esto?