TEORÍA DE CONTROL

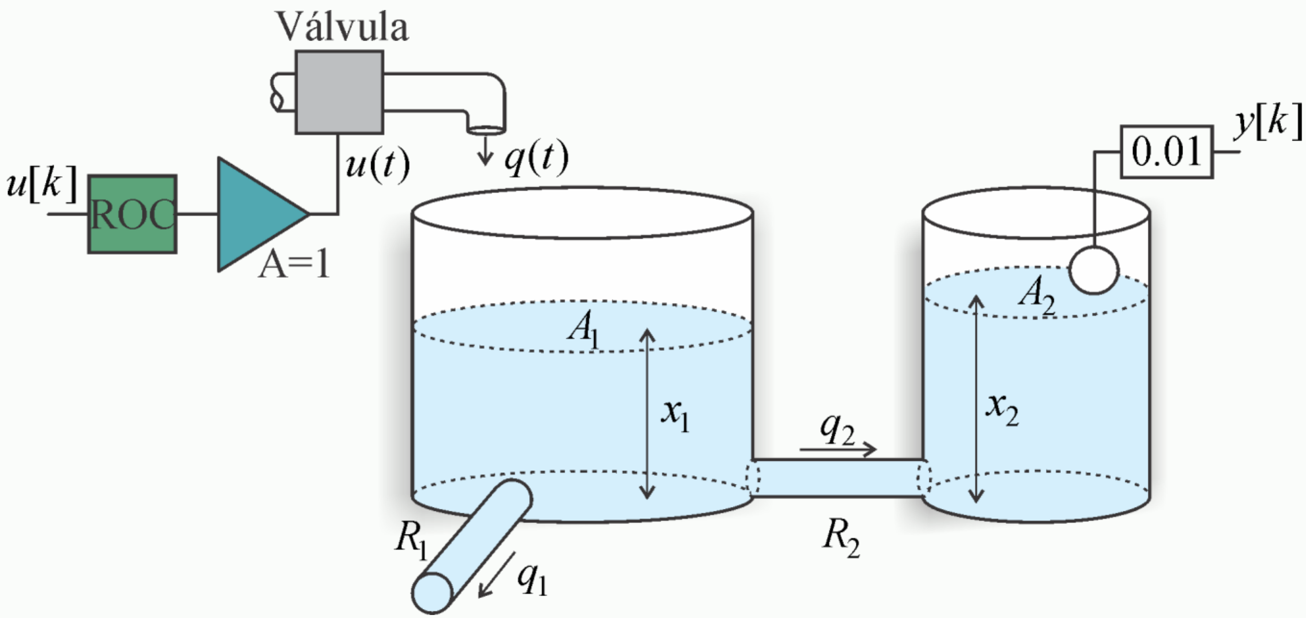
MODELO DE ESTADO DISCRETO

PROBLEMA 6_1

MODELO DE ESTADO DISCRETO

PROBLEMA 6_1

La figura ilustra un sistema consistente en dos tanques cilíndricos, de secciones normales A_1 y A_2, respectivamente.



Al tanque de sección A_1 ingresa un caudal de agua $q(t)$, que es comandado con una válvula motorizada tal que $q(t) = Ku(t)$.

El control $u(t)$ se obtiene de un amplificador de potencia mediante conectado a la salida de un conversor digital-analógico cuya amplitud máxima es de 1Volt.

La frecuencia de conversión es fija y su valor es de 50Hz.

El error de cuantificación se considera despreciable.

PROBLEMA 6_1

Los tanques están interconectados mediante un tubo que ofrece una resistencia R_2 al flujo q_2 de modo que, con la finalidad de simplificar el desarrollo del modelo, se considera simplemente que:

$$q_2 = \frac{x_1 - x_2}{R_2}$$

Análogamente, el drenaje del tanque A_1 encuentra una resistencia R_1, siendo:

$$q_1 = \frac{x_1}{R_1}$$

En este sistema se mide la altura x_2 con un dispositivo cuyas constantes de tiempo se desprecian frente a las del resto de la planta.

Datos: A1=1m^2, A2=0.01m^2, R1=0.5x10^3 s/m^2, R2=10^3 s/m^2 y k=0.1.

$u(t)$: control de la planta;

$y[k] = 0.01x_2[k]$: salida de la planta.

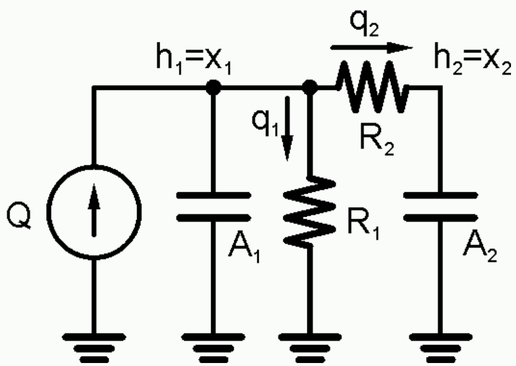
a) Halle el modelo de estados discreto que resulta del modelo continuo con x_1 y x_2 como variables de estado.

b) Halle la respuesta de las variables de estado cuando se le aplica al sistema una señal de entrada en forma de escalón.

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Modelo de estados continuo.

Modelo circuital equivalente



Ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{A_1 R_e} x_1 + \frac{1}{A_1 R_2} x_2 + \frac{k}{A_1} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{A_2 R_2} x_1 - \frac{1}{A_2 R_2} x_2$$

donde: $R_e = \left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right]$

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 R_e} & \frac{1}{A_1 R_2} \\ \frac{1}{A_2 R_2} & -\frac{1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución parte a): modelo de estados discreto

Transformación exponencial: permite conservar las variables del modelo continuo.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$
$$y(k) = C_d x(k)$$

Donde: $A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = \int_0^{T_s} e^{A\lambda} B d\lambda, \quad C_d = C$

Siendo T_s el periodo de muestreo

A partir de la transformada de Laplace se determina la matriz de transición de estados

$$\varphi(t) = e^{At} = L^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}$$

Para el caso analizado se tiene:

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} s + \dfrac{1}{A_1 R_e} & -\dfrac{1}{A_1 R_2} \\ -\dfrac{1}{A_2 R_2} & s + \dfrac{1}{A_1 R_2} \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Luego:

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1/A_2R_2}{\Delta} & \dfrac{1/A_1R_2}{\Delta}\\ \dfrac{1/A_2R_2}{\Delta} & \dfrac{s+1/A_1R_e}{\Delta}\end{bmatrix}$$

$$\Delta = s^2+\left[\frac{1}{A_1R_e}+\frac{1}{A_2R_2}\right]s+\frac{1}{A_1A_2R_1R_2}$$

Reemplazando numéricamente:

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+0.1)}{(s+P_1)(s+P_2)} & \dfrac{0.001}{(s+P_1)(s+P_2)}\\ \dfrac{0.1}{(s+P_1)(s+P_2)} & \dfrac{(s+0.003)}{(s+P_1)(s+P_2)}\end{bmatrix}$$

$$P_1=-0.1010201978\ \mathrm{r/s}$$
$$P_2=-0.0019798021\ \mathrm{r/s}$$

Descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$\boxed{(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{0.0103}{(s+P_1)}+\dfrac{0.9897}{(s+P_2)} & -\dfrac{0.0100968}{(s+P_1)}+\dfrac{0.0100968}{(s+P_2)}\\ -\dfrac{1.00968}{(s+P_1)}+\dfrac{1.00968}{(s+P_2)} & \dfrac{0.9897}{(s+P_1)}+\dfrac{0.0103}{(s+P_2)}\end{bmatrix}}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Anti transformando se tiene:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} (0.0103e^{P_1 t} + 0.9897e^{P_2 t}) & (-0.0100968e^{P_1 t} + 0.0100968e^{P_2 t}) \\ (-1.00968e^{P_1 t} + 1.00968e^{P_2 t}) & (0.9897e^{P_1 t} + 0.0103e^{P_2 t}) \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz en $t = T_s$ se tiene:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.999940021 & 1.9979\times 10^{-5} \\ 1.9979\times 10^{-3} & 0.998002 \end{bmatrix}$$

Por otra parte se tiene que:

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\lambda} B d\lambda$$

$$e^{At}B = \frac{k}{A_1}\begin{bmatrix} (0.0103e^{P_1 t} + 0.9897e^{P_2 t}) \\ (-1.00968e^{P_1 t} + 1.00968e^{P_2 t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.00103e^{P_1 t} + 0.09897e^{P_2 t}) \\ (-0.100968e^{P_1 t} + 0.100968e^{P_2 t}) \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \int_0^{Ts} (0.00103e^{P_1 \lambda} + 0.09897e^{P_2 \lambda}) d\lambda \\ \int_0^{Ts} (-0.100968e^{P_1 \lambda} + 0.100968e^{P_2 \lambda}) d\lambda \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Luego:

$$B_d = \begin{bmatrix} \left(\frac{0.00103}{P_1} e^{P_1 t} + \frac{0.09897}{P_2} e^{P_2 t}\right)\Big|_0^{T_s} \\ \left(-\frac{0.100968}{P_1} e^{P_1 t} + \frac{0.100968}{P_2} e^{P_2 t}\right)\Big|_0^{T_s} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B_d = \begin{bmatrix} 1.99994 \times 10^{-3} \\ 1.998627 \times 10^{-6} \end{bmatrix}}$$

Finalmente, el modelo de estado discreto resulta:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999940021 & 1.9979 \times 10^{-5} \\ 1.9979 \times 10^{-3} & 0.998002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.99994 \times 10^{-3} \\ 1.998627 \times 10^{-6} \end{bmatrix} u(k)}$$

$$\boxed{y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Solución parte b): respuesta del sistema ante entrada en escalón

Sea el siguiente modelo:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

Aplicando transformada Z:

$$zX(z) - zx(0) = A_d X(z) + B_d U(z)$$

Despejando se tiene:

$$X(z) = \underbrace{\boxed{z(zI - A_d)^{-1} x(0)}}_{\text{Solución homogénea}} + \underbrace{\boxed{(zI - A_d)^{-1} B_d U(z)}}_{\text{Solución particular}}$$

Si se consideran nulas las condiciones iniciales, se tiene:

$$X(z) = (zI - A_d)^{-1} B_d U(z)$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Se calcula $\phi(z) = (zI - A_d)^{-1}$

$$(zI - A_d) = \begin{bmatrix} z - 0.999940021 & -1.9979\times 10^{-5} \\ -1.9979\times 10^{-3} & z - 0.998002 \end{bmatrix}$$

$$\phi(z) = (zI - A_d)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z - 0.998002}{(z-0.99996)(z-0.9979)} & \dfrac{1.9979\times 10^{-5}}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \\ \dfrac{1.9979\times 10^{-3}}{(z-0.99996)(z-0.9979)} & \dfrac{z - 0.999940021}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene $\phi(z)B_d$

$$\phi(z)B_d = \begin{bmatrix} \dfrac{1.99994\times 10^{-3} z - 1.99594\times 10^{-3}}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \\ \dfrac{1.99862\times 10^{-6} z + 1.99725\times 10^{-6}}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1.99994\times 10^{-3}(z - 0.998002)}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \\ \dfrac{1.99862\times 10^{-6}(z + 0.999314)}{(z-0.99996)(z-0.9979)} \end{bmatrix}$$

Si se considera un escalón de amplitud 0.1, U(z)=0.1z/(z-1)

$$\boxed{X(z) = \phi(z)B_d U(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1.99994\times 10^{-4}(z - 0.998002)z}{(z-0.99996)(z-0.9979)(z-1)} \\ \dfrac{1.99862\times 10^{-7}(z + 0.999314)z}{(z-0.99996)(z-0.9979)(z-1)} \end{bmatrix}}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Para calcular la transformada inversa de X(z) se plantea X(z)/z:

$$\frac{X(z)}{z}=\begin{bmatrix}\dfrac{1.99994\times 10^{-4}(z-0.998002)}{(z-0.99996)(z-0.9979)(z-1)}\\ \dfrac{1.99862\times 10^{-7}(z+0.999314)}{(z-0.99996)(z-0.9979)(z-1)}\end{bmatrix}$$

Realizando descomposición en fracciones simples, se tiene:

$$\frac{X(z)}{z}=\begin{bmatrix}-\dfrac{4.9889923}{(z-0.99996)}-\dfrac{1.0176\times 10^{-3}}{(z-0.9979)}+\dfrac{4.99001}{(z-1)}\\ -\dfrac{5.0964485}{(z-0.99996)}-\dfrac{9.988\times 10^{-2}}{(z-0.9979)}+\dfrac{4.9965}{(z-1)}\end{bmatrix}$$

Luego:

$$\boxed{X(z)=\begin{bmatrix}-\dfrac{4.9889923z}{(z-0.99996)}-\dfrac{1.0176\times 10^{-3}z}{(z-0.9979)}+\dfrac{4.99001z}{(z-1)}\\ -\dfrac{5.0964485z}{(z-0.99996)}+\dfrac{9.988\times 10^{-2}z}{(z-0.9979)}+\dfrac{4.9965z}{(z-1)}\end{bmatrix}}$$

Antitransformando:

$$\boxed{\begin{aligned}x_1(k)&=-4.9889923(0.99996)^k-1.0176\times 10^{-3}(0.9979)^k+4.99001u(k)\\ x_2(k)&=-5.0964485(0.99996)^k+9.988\times 10^{-2}(0.9979)^k+4.9965u(k)\end{aligned}}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Simulaciones.