TEORÍA DE CONTROL

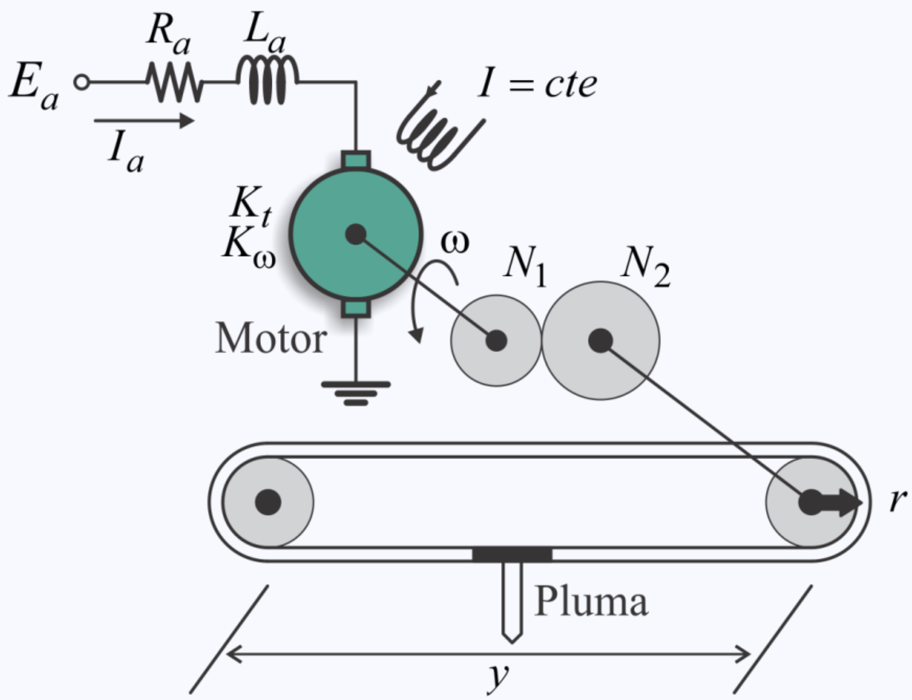
MODELO DE ESTADO DISCRETO

PROBLEMA 6_4

PROBLEMA 6_4

Para el graficador que se ve en la figura se desea encontrar un modelo de estados discreto en donde el vector de estado este compuesto por: la corriente de armadura del motor (I_a), la velocidad del eje del motor (ω) y la posición de la pluma del graficador (y).

El periodo de muestreo es de 0.001s, de modo que las variables de estado del modelo discreto mantengan las características del sistema continuo.



Datos:

$L_a = 3\text{mH}$

$R_a = 0.48\Omega$

$K_t = 0.68\text{Nm/A}$

$K_w = 0.68\text{Vs/r}$

$J = 0.03\text{Nm}s^2$

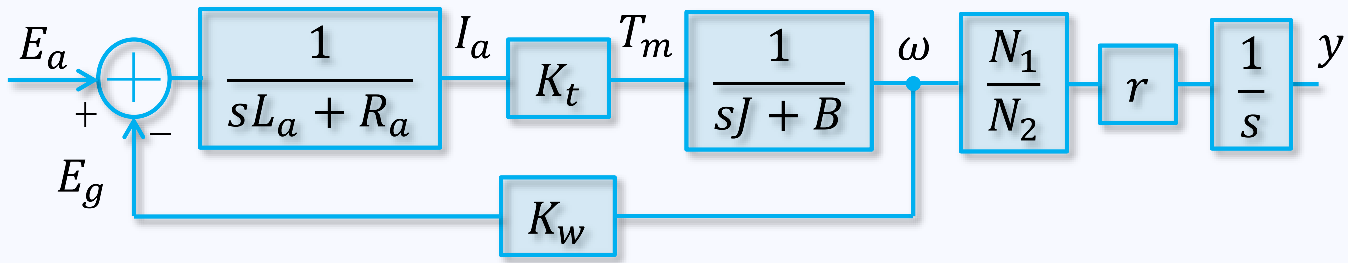
$B = 0.0011\text{Nms}$

$rN_1/N_2 = 0.1\text{m}$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

CALCULO DEL MODELO DE ESTADO CONTINUO

Diagrama de bloques



Ecuaciones de estado

$$
\begin{cases}
\dot{I}_a = -\dfrac{R_a}{L_a} I_a - \dfrac{K_w}{L_a}\omega + \dfrac{1}{L_a} E_a \\
\dot{\omega} = \dfrac{K_t}{J} I_a - \dfrac{B}{J}\omega \\
\dot{y} = r\dfrac{N_1}{N_2}\omega
\end{cases}
$$

Modelo de estado

$$
\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{K_w}{L_a} & 0 \\ \dfrac{K_t}{J} & -\dfrac{B}{J} & 0 \\ 0 & r\dfrac{N_1}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E_a
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ y \end{bmatrix}
$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

TRANSFORMACIÓN EXPONENCIAL

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$
$$y[k] = C_d x[k]$$

con:

$$A_d = e^{AT_s}$$
$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\lambda} B d\lambda$$
$$C_d = C$$

A partir de la transformada de Laplace se determina la matriz de transición de estados

$$\varphi(t) = e^{At} = L^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}$$

Donde:

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \frac{K_w}{L_a} & 0 \\ -\frac{K_t}{J} & \left(s + \frac{B}{J}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{N_1}{N_2} r & s \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{L_a(sJ+B)}{\Delta_1} & -\dfrac{K_wJ}{\Delta_1} & 0 \\ \dfrac{K_tL_a}{\Delta_1} & \dfrac{J(sL_a+R_a)}{\Delta_1} & 0 \\ \dfrac{K_t\,N_1/N_2\cdot r\cdot L_a}{s\Delta_1} & \dfrac{N_1/N_2\cdot r\cdot J(sL_a+R_a)}{s\Delta_1} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=s^2L_aJ+(L_aB+R_aJ)s+K_tK_w+R_aB$$

Reemplazando numéricamente y descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1.6269}{(s+115.5)}-\dfrac{0.62693}{(s+44.53)}\right) & \left(\dfrac{3.1939}{(s+115.5)}-\dfrac{3.1939}{(s+44.53)}\right) & 0 \\ \left(\dfrac{0.31939}{(s+44.53)}-\dfrac{0.31939}{(s+115.5)}\right) & \left(\dfrac{1.627}{(s+44.53)}-\dfrac{0.62703}{(s+115.5)}\right) & 0 \\ \left(\dfrac{4.4\times10^{-4}}{s}+\dfrac{2.76\times10^{-4}}{(s+115.5)}-\dfrac{7.17\times10^{-4}}{(s+44.53)}\right) & \left(\dfrac{3.11\times10^{-3}}{s}+\dfrac{5.42\times10^{-4}}{(s+115.5)}-\dfrac{3.65\times10^{-3}}{(s+44.53)}\right) & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Anti transformando se tiene:

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} (1.6269e^{-115.5t}-0.62693e^{-44.53t}) & (3.1939e^{-115.5t}-3.1939e^{-44.53t}) & 0 \\ (0.31939e^{-44.53t}-0.31939e^{-115.5t}) & (1.627e^{-44.53t}-0.62703e^{-115.5t}) & 0 \\ (4.4\times10^{-4}+2.76\times10^{-4}e^{-115.5t}-7.17\times10^{-4}e^{-44.53t}) & (3.11\times10^{-3}+5.42\times10^{-4}e^{-115.5t}-3.65\times10^{-3}e^{-44.53t}) & u(t) \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz en $t = T_s$ se tiene:

$$A_d=\begin{bmatrix} 0.8498 & -0.2093 & 0 \\ 0.02093 & 0.9975 & 0 \\ 1.084\times10^{-6} & 9.98\times10^{-5} & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte se tiene que:

$$B_d=\int_0^{T_s} e^{A\lambda}B\,d\lambda$$

$$e^{At}B=\begin{bmatrix} (542.29e^{-115.5t}-208.97e^{-44.53t}) \\ (106.46e^{-44.53t}-106.46e^{-115.5t}) \\ (0.14691+9.217\times10^{-2}e^{-115.5t}-0.23908e^{-44.53t}) \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

Luego:

$$B_d = \begin{bmatrix} \left.(4.6927e^{-44.53t} - 4.6951e^{-115.5t})\right|_0^{T_s} \\ \left.(-2.39e^{-44.53t} + 0.9217e^{-115.5t})\right|_0^{T_s} \\ \left.(0.14691 \cdot t - 7.98\times10^{-4} e^{-115.5t} + 5.369\times10^{-3} e^{-44.53t})\right|_0^{T_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3078 \\ 0.0036 \\ 1.231\times10^{-7} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el modelo de estado discreto resulta:

$$\begin{bmatrix} i_a[k+1] \\ w[k+1] \\ y[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8498 & -0.2093 & 0 \\ 0.02093 & 0.9975 & 0 \\ 1.084\times10^{-6} & 9.98\times10^{-5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a[k] \\ w[k] \\ y[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3078 \\ 0.0036 \\ 1.231\times10^{-7} \end{bmatrix} E_a[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a[k] \\ w[k] \\ y[k] \end{bmatrix}$$