TEORÍA DE CONTROL

MODELO DE ESTADO DISCRETO

PROBLEMA 6_5

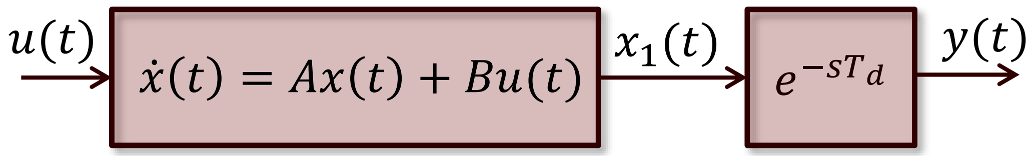
MODELO DE ESTADO DISCRETO

PROBLEMA 6_5

El modelo de estado de un cierto sistema de control se muestra a continuación:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t - T_d); \quad T_d = 0.3s$$

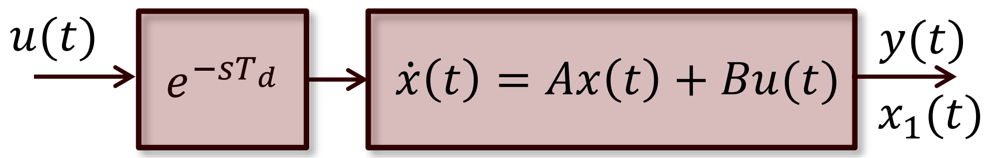


a) Se desea encontrar el modelo de estado discreto que resulta de considerar que la entrada proviene de un sistema digital con retención de orden cero y una frecuencia de muestreo de 10Hz.

b) Considere que el modelo se representa de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t - T_d)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t); \quad T_d = 0.3s$$

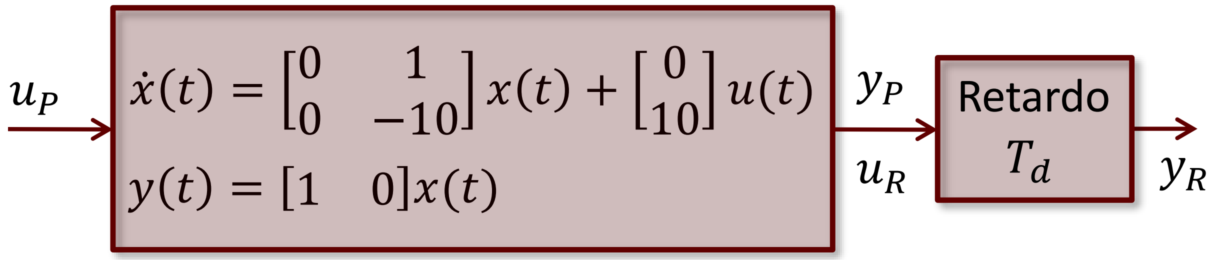


Halle el modelo de estado para este caso.

MODELO DE ESTADO DISCRETO

SOLUCIÓN PARTE A):

El modelo de estado continuo puede ser representado como:



Luego, se plantea el modelo de estado discreto de la planta y del retardo, los cuales están dados por:

$$x_P[k+1] = A_P x_P[k] + B_P u_P[k] \qquad x_R[k+1] = A_R x_R[k] + B_R u_R[k]$$

$$y_P[k] = C_P x_P[k] \qquad y_R[k] = C_R x_R[k]$$

Determinación del modelo de estado discreto de la planta:

$$A_P = e^{AT} = \varphi(T)$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

SOLUCIÓN PARTE A):

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det(sI - A) = s(s+10)$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+10)}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{s}{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+10)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+10)} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados resulta $\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$.

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} u(t) & \dfrac{1}{10}\left[1 - e^{-10t}\right] \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t=T]{} A_P = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{10}\left[1 - e^{-10T}\right] \\ 0 & e^{-10T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0632 \\ 0 & 0.3678 \end{bmatrix}$$

Por otra parte $B_P = \int_0^T e^{A\lambda} B d\lambda$.

$$e^{A\lambda}B = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{10}\left[1 - e^{-10\lambda}\right] \\ 0 & e^{-10\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - e^{-10\lambda}) \\ 10e^{-10\lambda} \end{bmatrix}$$

$$B_P = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^T (1 - e^{-10\lambda}) d\lambda \\ \displaystyle\int_0^T 10e^{-10\lambda} d\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow B_P = \begin{bmatrix} 0.03678 \\ 0.6321 \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

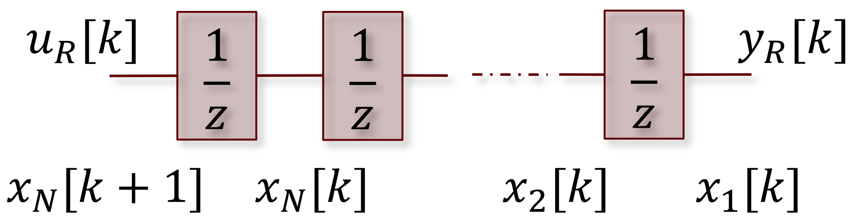
SOLUCIÓN PARTE A):

Finalmente, el modelo discreto de la planta resulta:

$$x_P[k+1]=\begin{bmatrix}1 & 0.0632\\ 0 & 0.3678\end{bmatrix}x_P[k]+\begin{bmatrix}0.03678\\ 0.6321\end{bmatrix}u_P[k]$$

$$y_P[k]=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x_P[k]$$

Por otro lado, el modelo discreto del retardo resulta: $z^{-Td/T}=z^{-3}$



Luego, se tiene que:

$$x_1[k+1]=x_2[k]$$
$$x_2[k+1]=x_3[k]$$
$$\vdots$$
$$x_{N-1}[k+1]=x_N[k]$$
$$u_R[k]=x_N[k+1]$$
$$y[k]=x_1[k]$$

SOLUCIÓN PARTE A):

Finalmente, para el caso analizado el modelo del retardo resulta:

$$x_R[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_R[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R[k]$$

$$y_R[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_R[k]$$

Modelo del sistema completo

Se plantean las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} u[k] &= u_P[k] \\ y_P[k] &= u_R[k] \\ y[k] &= u_R[k] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_P[k+1] &= A_P x_P[k] + B_P u[k] \\ x_R[k+1] &= A_R x_R[k] + B_R C_P u_P[k] \\ y[k] &= y_R[k] = C_R x_R[k] \end{aligned}$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_P[k+1] \\ x_R[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ B_R C_P & A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P[k] \\ x_R[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_P \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & C_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P[k] \\ x_R[k] \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN PARTE A):

Para el caso del sistema analizado, se tiene:

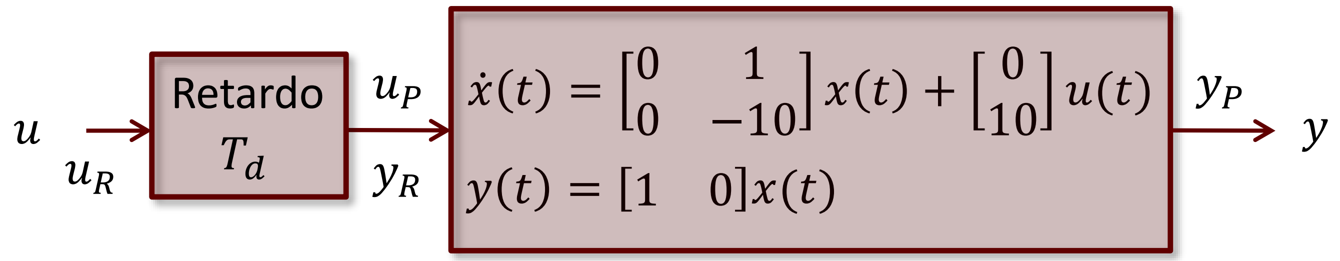
$$\begin{bmatrix} x_{P1}[k+1] \\ x_{P2}[k+1] \\ x_{R1}[k+1] \\ x_{R2}[k+1] \\ x_{R3}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0632 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3678 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P1}[k] \\ x_{P2}[k] \\ x_{R1}[k] \\ x_{R2}[k] \\ x_{R3}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.03678 \\ 0.6321 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P1}[k] \\ x_{P2}[k] \\ x_{R1}[k] \\ x_{R2}[k] \\ x_{R3}[k] \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO DISCRETO

SOLUCIÓN PARTE B):

En este caso el sistema puede ser representado con el retardo en la entrada.



Teniendo en cuenta las relaciones planteadas en la figura se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_P[k+1] \\ x_R[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_P & B_P C_R \\ 0 & A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P[k] \\ x_R[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_R \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P[k] \\ x_R[k] \end{bmatrix}$$

Finalmente, para el caso del sistema analizado resulta:

MODELO DE ESTADO DISCRETO

SOLUCIÓN PARTE B):

$$\begin{bmatrix} x_{P1}[k+1] \\ x_{P2}[k+1] \\ x_{R1}[k+1] \\ x_{R2}[k+1] \\ x_{R3}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0632 & 0.03678 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3678 & 0.6321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P1}[k] \\ x_{P2}[k] \\ x_{R1}[k] \\ x_{R2}[k] \\ x_{R3}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P1}[k] \\ x_{P2}[k] \\ x_{R1}[k] \\ x_{R2}[k] \\ x_{R3}[k] \end{bmatrix}$$