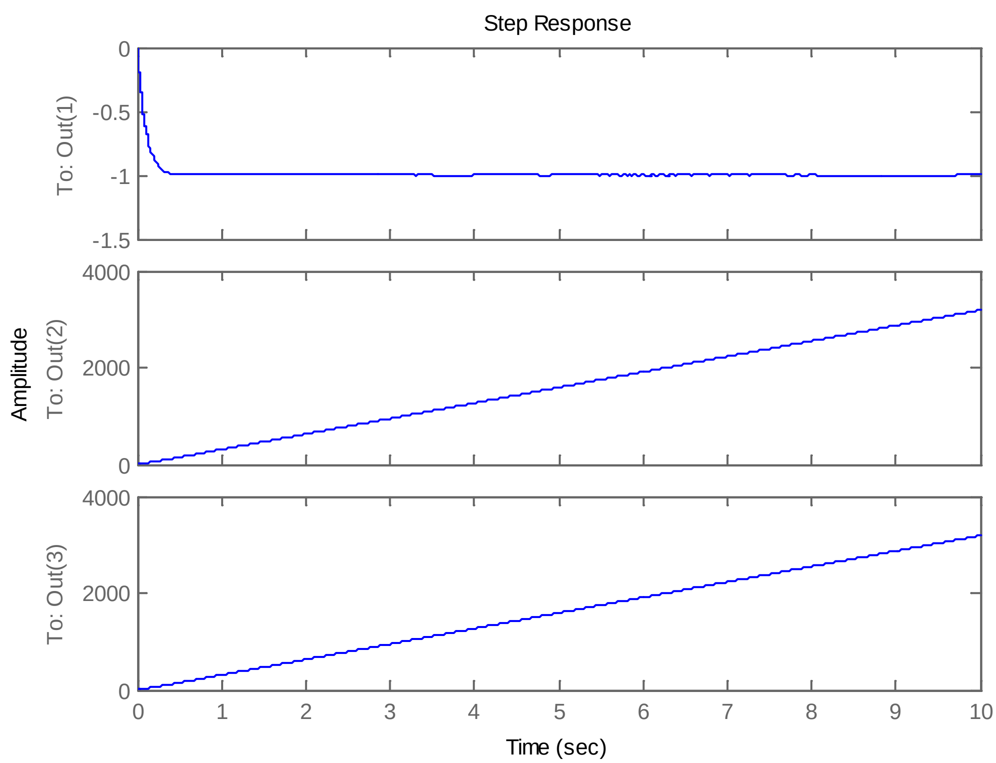
Ejercicio 7_5

7-5) Para el siguiente modelo de estado correspondiente a la planta de un sistema de control muestreado a una frecuencia de 0.01 seg.

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & 0.2 \\ -1.2 & 2.4 & -1.4 \\ -1.2 & 1.7 & -0.7 \end{bmatrix} x(k)+\begin{bmatrix} -0.1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Halle un controlador por realimentación de estados para que la salida posea una respuesta críticamente amortiguada con una constante de tiempo de 0.2 seg para una entrada en forma de escalón.

Respuesta del modelo de estado



Realizo el cálculo de la matriz controlabilidad para determinar cuantos autovalores puedo reasignar.

$$U=\begin{pmatrix} -0.1 & -0.09 & -0.081 \\ 2 & 2.12 & 2.228 \\ 2 & 2.12 & 2.228 \end{pmatrix}$$ El rango de la matriz U es rg(U)=2 ya que tiene las dos últimas filas iguales a cero.

Hallo el polinomio característico y los autovalores.

$$\det(ZI-A)=z^3-2.6z^2+2.23z-0.6300$$ autovalores z1=1 z2=0.9 z3=0.7

Debo determinar si el sistema es estabilizable para lo cual hallo la matriz de transformación Q

$$Q = \begin{pmatrix} b & Ab & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.09 & 0 \\ 2 & 2.12 & 1 \\ 2 & 2.12 & 0 \end{pmatrix}$$ el rango de Q rg(Q)=3

Aplico la transformación al modelo: $\overline{A} = Q^{-1}AQ \quad \overline{b} = Q^{-1}b \quad \overline{c} = cQ$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & -0.9 & -18.03 \\ 1 & 1.9 & 17.81 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 2.12 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

El autovalor no controlable es 0.7 , por lo tanto el sistema es estabilizable.

Saco el sub-modelo controlable.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & -0.9 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 2.12 \end{pmatrix} x(k)$$

Determino la ubicación de los autovalores: Amortiguamiento crítico ζ=1; Constante de tiempo= 0,2 =$\zeta\omega_n$ ω_n= 5

Los autovalores serán s1= -5 s2= -5

Los autovalores discretos z1=0.9512 y z2=0.9512

Hallo el vector de realimentación Kt

Polinomio característico deseado = $(z-0.95)^2$ = $z^2 - 1.9025z + 0.9048$

Polinomio característico del modelo controlable = $z^2 - 1.9z + 0.9$

Vector de realimentación del modelo canónico controlable Kcc = (0.0048 -0.0025)

Las matrices del modelo canónico son:

$$Acc = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.9 & 1.9 \end{pmatrix} \quad ; \quad Bcc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Controlabilidad de MCC $Ucc = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix}$ controlabilidad del modelo controlable $Uc = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz de transformación $Qc^{-1} = U_{cc}U_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix}$

El vector de realimentación resulta Kc = (-0.0025 0.0002)

Agrego ceros para completar el orden K1 = (-0.0025 0.0002 0)

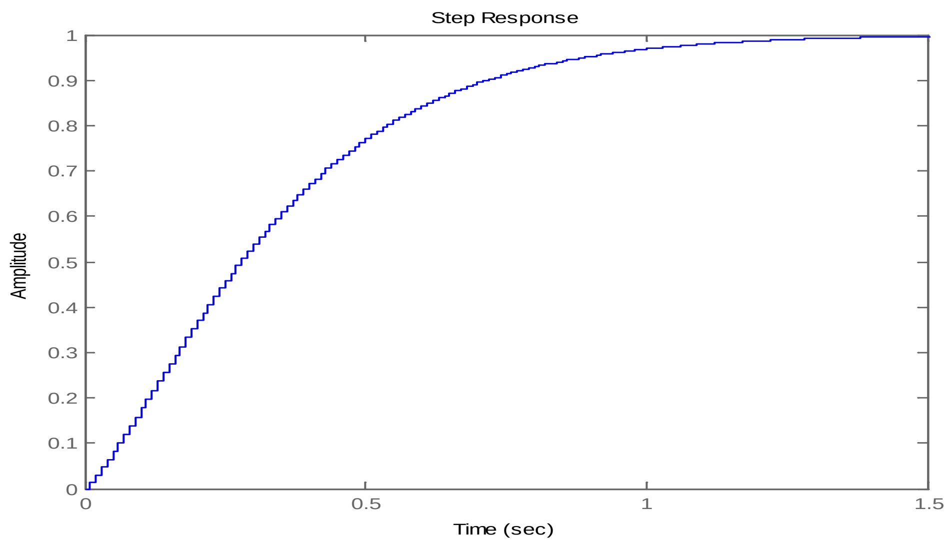
Transformo el vector con la matriz Q $K^T = K_1 Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1732 & 0 & 0.0074 \end{pmatrix}$

Hallo el modelo realimentadado:
$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.9173 & -0.2 & 0.2007 \\ -1.546 & 2.4 & -1.415 \\ -1.546 & 1.7 & -0.7149 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -0.1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} r(k)$$
$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

La ganancia del modelo es: $A_r = C(I - A - bK^T)b = 134.5347$ por lo tanto $A_0 = 1/134.5347 = 0.0074$

Y el vector de realimentación $K_0^T = K^T / A_0 = \begin{pmatrix} 23.308 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La respuesta de la salida del sistema realimentado queda:



La señal de control u(k) del modelo queda: u(k)=Ao[r(k)-Kto*x(k)]