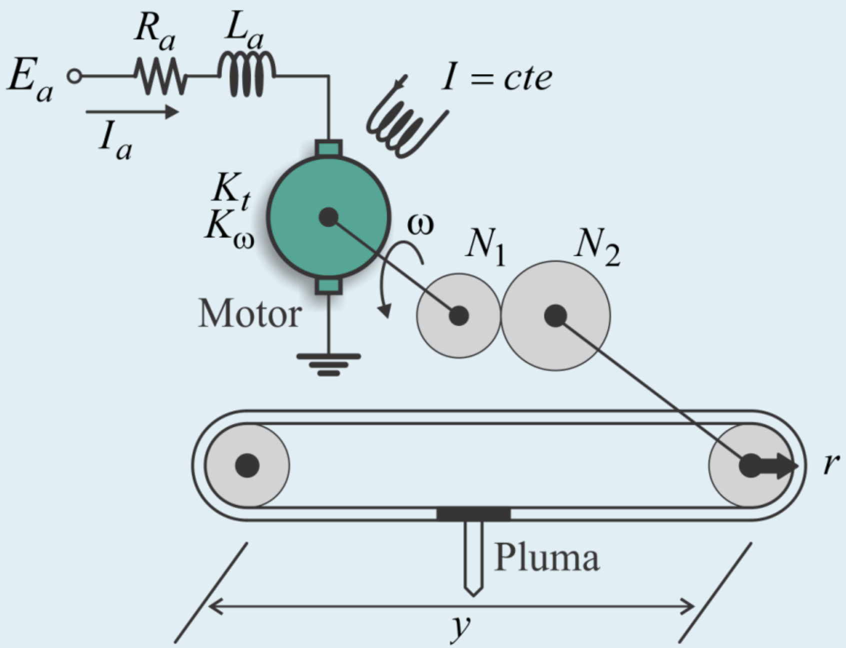
TEORÍA DE CONTROL

Realimentación de Estados

Ejercicio 7-3

Ejercicio 7-3

Para el graficador que se ve en la figura se desea encontrar un modelo de estados discreto en donde el vector de estado este compuesto por : la corriente de armadura del motor, la velocidad del eje del motor y la posición de la pluma del graficador.



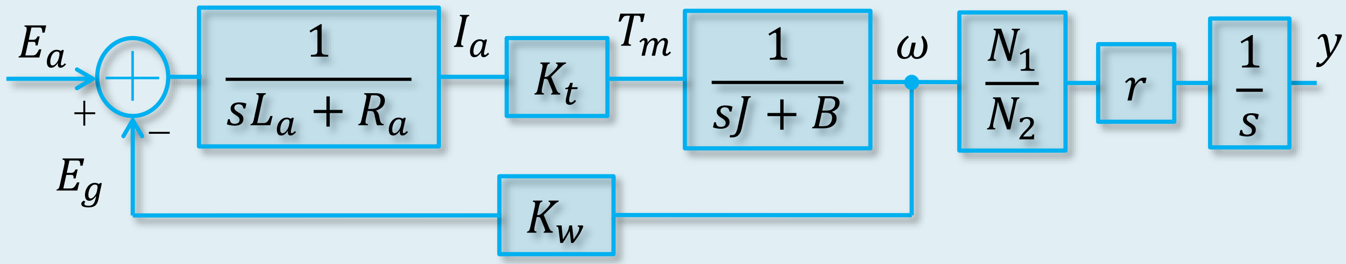
Datos:

$L_a = 3\text{mH}$
$R_a = 0.48\Omega$
$K_t = 0.68\text{Nm/A}$
$K_w = 0.68\text{Vs/r}$
$J = 0.03\text{Nm}s^2$
$B = 0.0011\text{Nms}$
$rN_1/N_2 = 0.1\text{m}$

Diseñar un controlador por realimentación de estados para el sistema del ejercicio 6-4) (graficador) de forma de que el sistema tenga un sobrepico del 5% y un tiempo de establecimiento de 0.1 seg. en su respuesta temporal. El sistema a lazo cerrado debe reproducir sin atenuación una señal en forma de escalón unitario.
Considere para el diseño una frecuencia de muestreo fs=100 Hz.

Ejercicio 7-3

Inicialmente se halla el modelo de estado del sistema continuo:



$$\begin{bmatrix} \dot{I}a \\ \dot{\omega} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} -160 & -226,667 & 0 \\ 22,667 & -0,03667 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 333,33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ y \end{bmatrix}$$

La función de transferencia de este modelo es:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = C \cdot \left(sI - A\right)^{-1} \cdot B = \frac{755,6}{s(s^2 + 160s + 5144)}$$

Ejercicio 7-3

Para el diseño del controlador se transforma el modelo a su forma discreta mediante la matriz exponencial:

$$\begin{bmatrix} Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1109274 & -1,0397993 & 0 \\ 0,1039799 & 0,8447352 & 0 \\ 6,834695\times10^{-5} & 9,411840\times10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,5294852 \\ 0,2278232 \\ 8,623300\times10^{-5} \end{bmatrix} E(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

Se verifica la controlabilidad del sistema discreto:

$$U = \begin{bmatrix} 1,5294852 & -0,0672286 & -0,3729324 \\ 0,2278232 & 0,3514860 & 0,2899222 \\ 8,623300\times10^{-5} & 4,051922\times10^{-4} & 7,314103\times10^{-4} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boxed{\det[U] = 1,999247\times10^{-4}}$$

El sistema es controlable y en consecuencia se pueden reasignar todos los autovalores por realimentación.

Ejercicio 7-3

Para el cálculo del vector de realimentación se requiere el modelo canónico controlable.

El polinomio característico de la planta discreta es:

$$\det\left[sI - A_d\right] = z^3 - 1,956z^2 + 1,157z - 0,2018$$

La función de transferencia del sistema discreto es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = C_d \cdot \left(zI - A_d\right)^{-1} \cdot B_d = \frac{8,623\times 10^{-5}(z+0,1752)(z+2,568)}{(z-0,315)(z-0,6406)(z-1)}$$

Las matrices del modelo canónico serán:

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,2018 & -1,157 & 1,956 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{cc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7-3

La matriz controlabilidad del modelo canónico es:

$$U_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}956 \\ 1 & 1{,}956 & 2{,}667 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación al modelo canónico es:

$$Q_{cc}^{-1} = U_{cc}U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}956 \\ 1 & 1{,}956 & 2{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6982943 & -0{,}5098799 & 558{,}15736 \\ -0{,}7084234 & 5{,}7563684 & -2642{,}9662 \\ 0{,}3101291 & -3{,}1288415 & 2765{,}5853 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q_{cc}^{-1} = U_{cc}U^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3101291 & -3{,}1288415 & 2765{,}5853 \\ -0{,}1019156 & -0{,}3625896 & 2765{,}5853 \\ 0{,}1400120 & 2{,}4026044 & 2765{,}5853 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 7-3

Cálculo de los autovalores deseados

Las especificaciones pedidas se pueden cumplir con una transferencia de segundo orden. En este caso al ser un modelo de tercer orden se debe agregar un autovalor adicional de modo que los dos autovalores que fijan la respuesta transitoria sean dominantes.

Para cumplir las especificaciones se calculan los autovalores dominantes en el plano continuo:

$$Sobrepico\ [\%] = 5\% = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)}}} \qquad T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.1\ [seg]$$

Despejando el amortiguamiento y la frecuencia natural se llega a :

$$\xi = 0{,}69 \quad \text{y} \quad \omega_n = 57{,}962$$

Los autovalores continuos dominantes serán:

$$s_{1,2} = -\ \xi\omega_n \pm\ j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -40 \pm 41{,}9476\,j$$

Discretizando estos autovalores se llega a :

$$\boxed{z_{1,2} = e^{-\ \xi\omega_n T} \angle\, \omega_n T\sqrt{1-\xi^2} = 0{,}6122 \pm 0{,}273j}$$

Ejercicio 7-3

Para el agregado del tercer autovalor se pueden dar dos situaciones para mantener la dominancia de los autovalores calculados.

CASO 1: Cancelar un cero de la transferencia de la planta.

Es sabido que en un sistema SISO, como es el tratado, el numerador de la función de transferencia no se modifica por la realimentación de estado. Por lo tanto si uno de los autovalores deseados se ubica sobre unos de los ceros de la función de transferencia, se producirá una cancelación del autovalor agregado y solamente quedarán los autovalores dominantes. Como consecuencia el modelo realimentado resultará no observable.

La transferencia de la planta es:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{8,623\times10^{-5}\boxed{(z+0,1752)(z+2,568)}}{(z-0,315)(z-0,6406)(z-1)}$$

Esta transferencia posee dos ceros, uno dentro del circulo unidad (-0,1752) y otro fuera (-2,568). En principio se podría cancelar cualquiera de los dos ceros, sin embargo, ubicar un autovalor de lazo cerrado en una zona inestable puede traer consecuencias desagradables si la cancelación no es perfecta. Por lo tanto, por razones de seguridad se opta por cancelar el cero dentro del círculo unitario.

En consecuencia se ubica el tercer autovalor en $\boxed{z_3 = -0,1752}$

Ejercicio 7-3

El polinomio característico deseado resulta: $\left[\left(z-0{,}6122\right)^2+\left(0{,}273\right)^2\right]\left(z+0{,}1752\right)$

$$\boxed{\text{Polinomio Deseado} = z^3-1{,}049z^2+0{,}2348z+0{,}07874}$$

El vector de realimentación para el modelo canónico controlable para este caso es:

$$K_{cc}^T=\left[\left(\alpha_{1D}-a_1\right) \quad \left(\alpha_{2D}-a_2\right) \quad \left(\alpha_{3D}-a_3\right)\right]=\left[0{,}2805624 \quad -0{,}9227204 \quad 0{,}9064914\right]$$

El vector para el modelo original se calcula como:

$$K^T=K_{cc}^TQ_{cc}^{-1}=\left[0{,}2805624 \quad -0{,}9227204 \quad 0{,}9064914\right]\begin{bmatrix} 0{,}3101291 & -3{,}1288415 & 2765{,}5853 \\ -0{,}1019156 & -0{,}3625896 & 2765{,}5853 \\ 0{,}1400120 & 2{,}4026044 & 2765{,}5853 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K^T=K_{cc}^TQ_{cc}^{-1}=\left[0{,}3079699 \quad 1{,}6346736 \quad 731{,}03675\right]}$$

Ejercicio 7-3

El mOdelo de estado resultante a lazo cerrado resulta :

$$x(k+1)=\left[A_d-B_d\cdot K^T\right]\cdot x(k)+B_d\cdot r(k)$$

$$\begin{bmatrix} Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,3601080 & -3,5400085 & -1118,1099 \\ 0,0338173 & 0,4723186 & -166,54710 \\ 4,178978\times10^{-5} & 8,002212\times10^{-4} & 0,9369605 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1,5294852 \\ 0,2278232 \\ 8,623300\times10^{-5} \end{bmatrix}r(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia resulta:

$$G_{LC}=\frac{Y(z)}{R(z)}=C_d\left[zI-\left(A_d-B_dK_t^T\right)\right]^{-1}B_d=\frac{8,623\times10^{-5}(z+0,1752)(z+2,568)}{(z+0,1752)\left[(z-0,6122)^2+0,273^2\right]}$$

Ejercicio 7-3

La respuesta de este sistema es:

La respuesta es la esperada pero no cumple con la condición de amplitud, por lo tanto para que tenga ganancia unitaria debo agregar una ganancia Ao. El valor se puede calcular como:

$$A_{LC} = Y/R\Big|_{ss \Rightarrow z=1} = C_d\left[I - \left(A_d - B_d K_t^T\right)\right]^{-1} B_d = 1{,}367920 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{A_{LC}} = 731{,}03675}$$

Y el vector de realimentación queda con los siguientes valores:

$$\boxed{K_0^T = \frac{K^T}{A_0} = \begin{bmatrix} 4{,}212783 \times 10^{-4} & 2{,}236103 \times 10^{-3} & 1 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 7-3

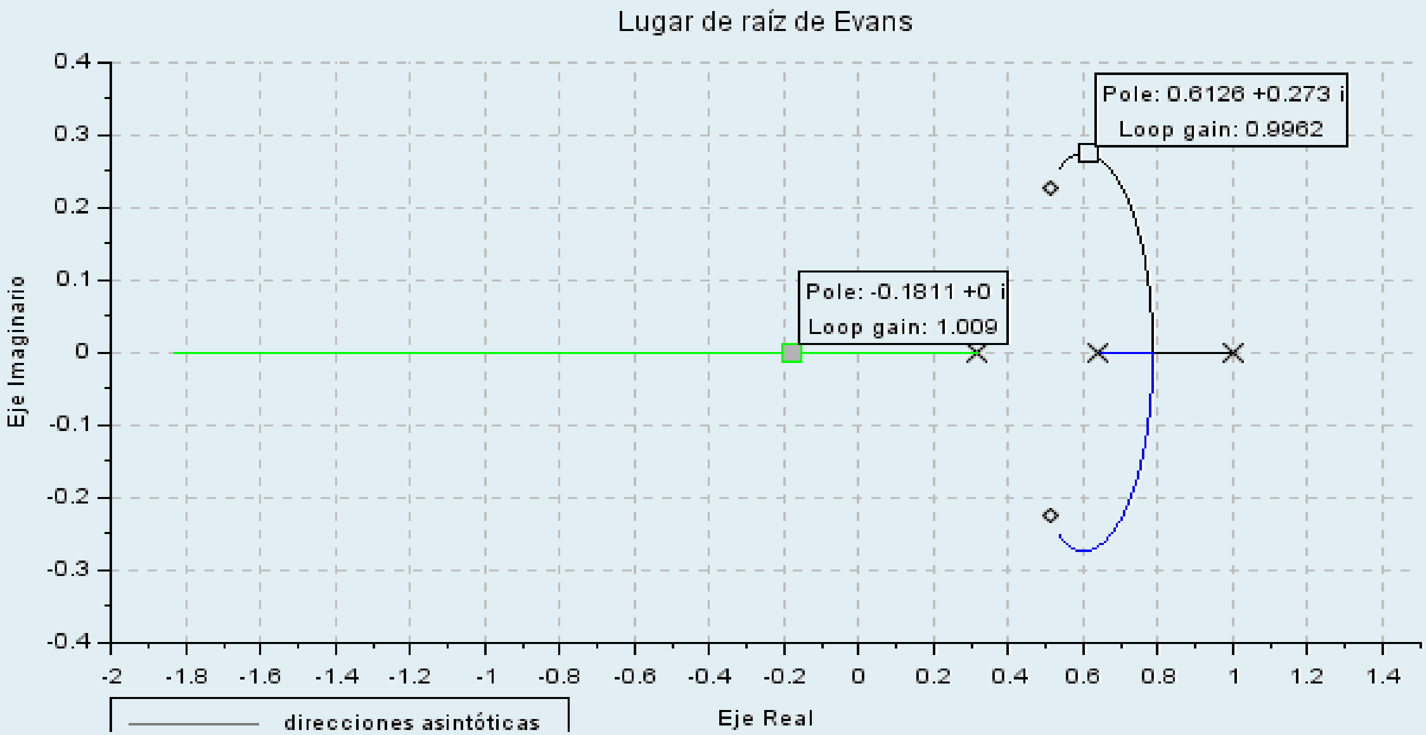
Se va a evaluar el lugar de raíces para este caso: $GH(z) = k^T \left[zI - A \right]^{-1} B$

$$GH(z) = \frac{0,9065\left[(z-0,509)^2 + 0,2247^2\right]}{(z-0,315)(z-0,6406)(z-1)}$$

Ceros función de K^T

Polos de lazo abierto

El Lugar de raíces resulta



Como puede verse lar raíces pasan por los autovalores deseados para ganancia K=1.

Ejercicio 7-3

CASO 2: Ubicar un polo de alta frecuencia.

En este caso se ubicará el tercer autovalor a una frecuencia superior de la de la parte real de los polos continuos dominantes. En este caso : $s_3 = -400$

En consecuencia se ubica el tercer autovalor en $\boxed{z_3 = 0{,}0183156}$

El polinomio característico deseado resulta:

$$\boxed{\text{Polinomio deseado} = z^3 - 1{,}243z^2 + 0{,}4718z - 0{,}00823}$$

El vector para el modelo canónico controlable para este caso es:

$$K_{cc}^T = \left[(\alpha_{1D} - a_1) \quad (\alpha_{2D} - a_2) \quad (\alpha_{3D} - a_3) \right] = \left[0{,}1935928 \quad -0{,}6857302 \quad 0{,}7129368 \right]$$

El vector para el modelo original se calcula como

$$K^T = K_{cc}^T Q_{cc}^{-1} = \left[0{,}1935928 \quad -0{,}6857302 \quad 0{,}7129368 \right] \begin{bmatrix} 0{,}3101291 & -3{,}1288415 & 2765{,}5853 \\ -0{,}1019156 & -0{,}3625896 & 2765{,}5853 \\ 0{,}1400120 & 2{,}4026044 & 2765{,}5853 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K^T = K_{cc}^T Q_{cc}^{-1} = \left[0{,}2297451 \quad 1{,}3558227 \quad 610{,}63952 \right]}$$

Ejercicio 7-3

El modelo de estado resultante a lazo cerrado resulta :

$$x(k+1)=\left[A_d - B_d \cdot K^T\right]\cdot x(k)+B_d \cdot r(k)$$

$$\begin{bmatrix} Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2404644 & -3{,}1135101 & -933{,}96410 \\ 0{,}0516387 & 0{,}5358473 & -139{,}11782 \\ 4{,}853534\times10^{-5} & 8{,}242674\times10^{-4} & 0{,}9473427 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}5294852 \\ 0{,}2278232 \\ 8{,}623300\times10^{-5} \end{bmatrix} R(k)$$

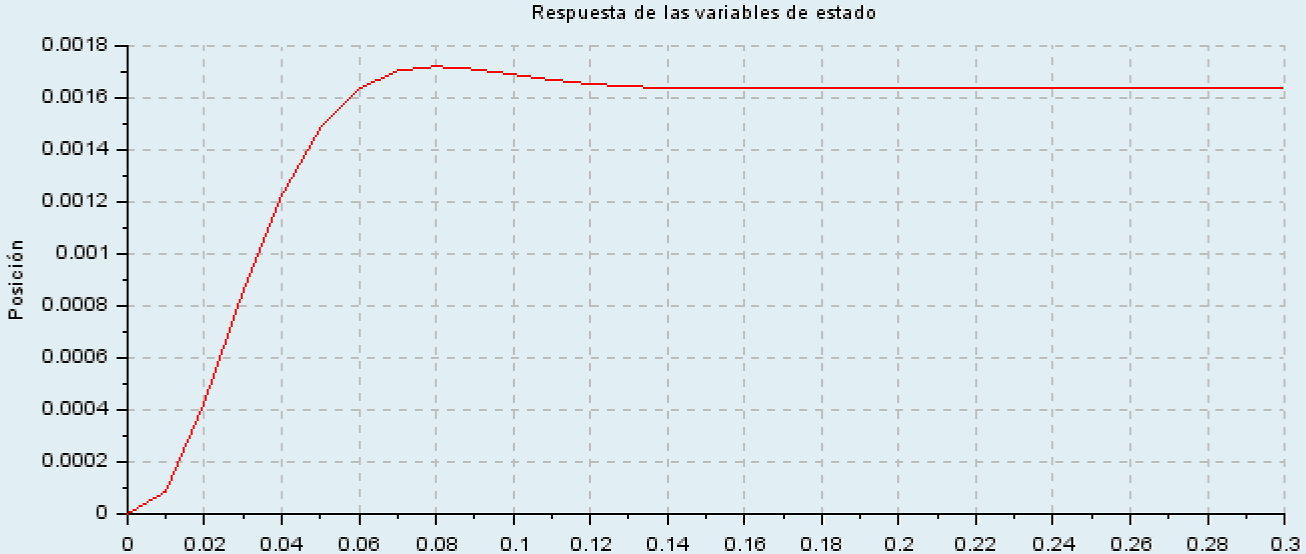
$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia resulta:

$$G_{LC}=\frac{Y(z)}{R(z)}=C_d\left[zI-\left(A_d-B_dK_t^T\right)\right]^{-1}B_d=\frac{8{,}623\times10^{-5}(z+0{,}1752)(z+2{,}568)}{(z-0{,}01832)\left[(z-0{,}6122)^2+0{,}273^2\right]}$$

Ejercicio 7-3

La respuesta de este sistema es:



La respuesta es la esperada pero no cumple con la condición de amplitud, por lo tanto para que tenga ganancia unitaria debo agregar una ganancia Ao. El valor se puede calcular como:

$$A_{LC} = Y/R\Big|_{ss \Rightarrow z=1} = C_d\left[I-\left(A_d - B_d K_t^T\right)\right]^{-1} B_d = 1{,}637627\times 10^{-3}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{A_{LC}} = 610{,}63952}$$

Y el vector de realimentación queda con los siguientes valores:

$$\boxed{K_0^T = \frac{K^T}{A_0} = \left[3{,}762369\times 10^{-4} \quad 2{,}220332\times 10^{-3} \quad 1\right]}$$

Ejercicio 7-3

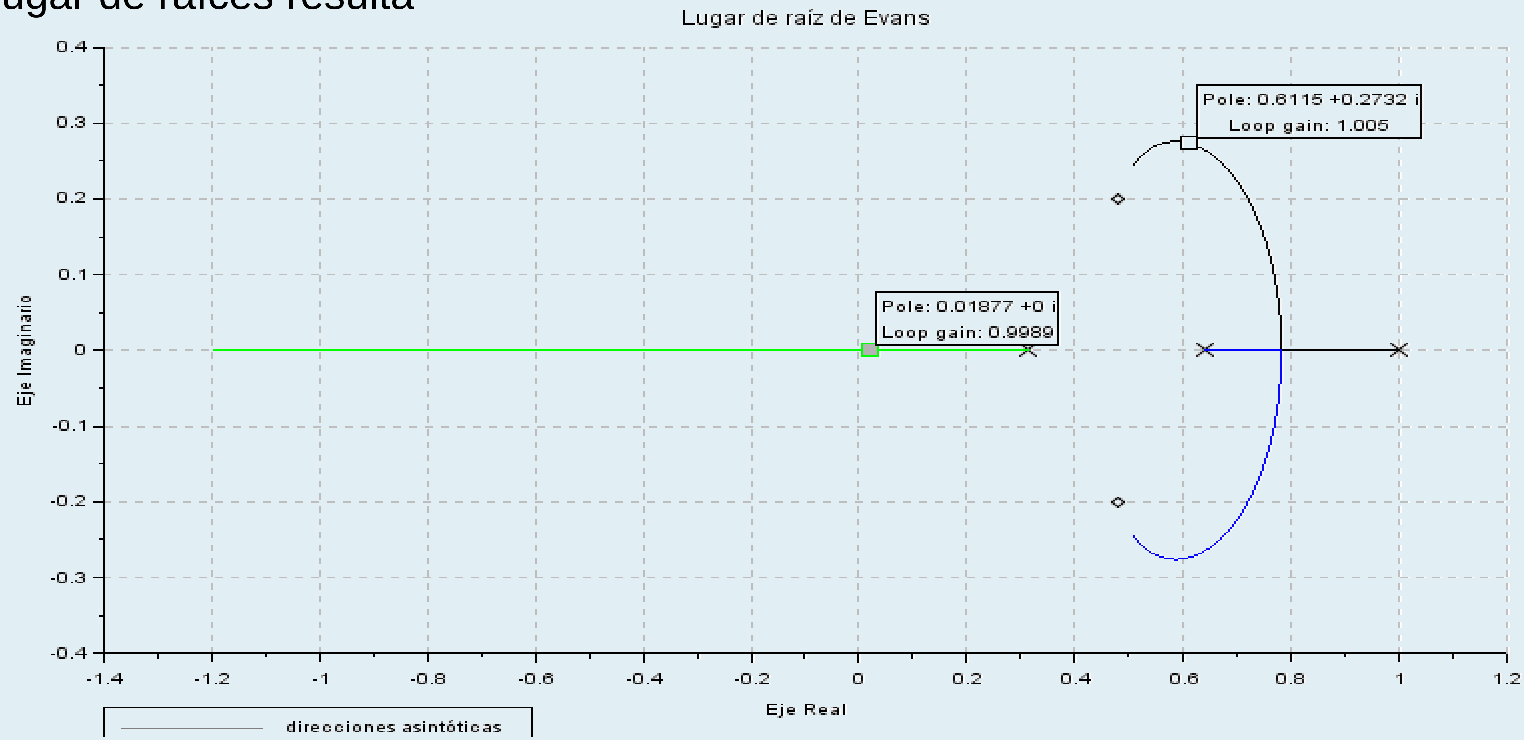
Se va a evaluar el lugar de raíces para este caso: $GH(z) = k^T \left[zI - A\right]^{-1} B$

$$GH(z) = \frac{0,7129\left[\boxed{(z-0,4809)^2 + 0,2006^2}\right]}{\boxed{(z-0,315)(z-0,6406)(z-1)}}$$

Ceros función de K^T

Polos de lazo abierto

El Lugar de raíces resulta



Como puede verse lar raíces pasan por los autovalores deseados para ganancia K=1.