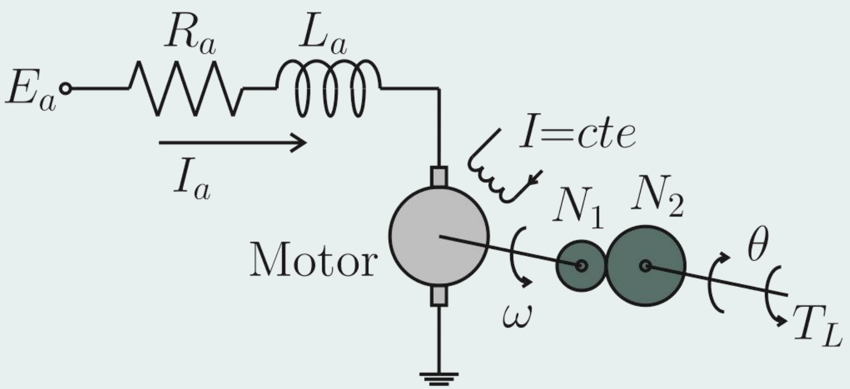
TEORÍA DE CONTROL

ESTIMADORES DE ESTADO

PROBLEMA 8_8

PROBLEMA 8_8

La figura muestra un sistema compuesto por un motor de corriente continua y un sistema de reducción, al cual se lo va a utilizar para realizar un control de posición



Datos:

$$R_a = 2\Omega$$
$$L_a = 0.02H$$
$$J = 0.05Nms^2$$
$$B = 0.02Nms$$
$$K_t = 0.68\,Nm/A$$
$$K_\omega = 0.678Vs/rad$$
$$N = N_1/N_2 = 0.1$$

a) Plantear un modelo de estado que represente al sistema.
b) Al sistema se lo va a controlar mediante un procesador digital cuya frecuencia de muestreo es de 3ms. Halle el modelo de estado discreto que conserve las variables del sistema continuo.
c) Diseñar un controlador por realimentación de estados que produzca que la posición de salida responda con un sobrepico del 1% y un tiempo de establecimiento de 0.5 seg.

PROBLEMA 8_8

La ganancia del sistema debe ser tal que una señal de entrada de 1 volt provoque una rotación de la salida de 360º.

Cuando actúa sobre la salida del sistema una perturbación en forma de cupla, esta afecta al sistema provocando un error en la posición final de la misma.

d) Describa un método que permita solucionar este inconveniente.
e) Analice una posible utilización de un estimador de estados para implementar esta solución.

PROBLEMA 8_8

Solución:

a) Modelado de la planta

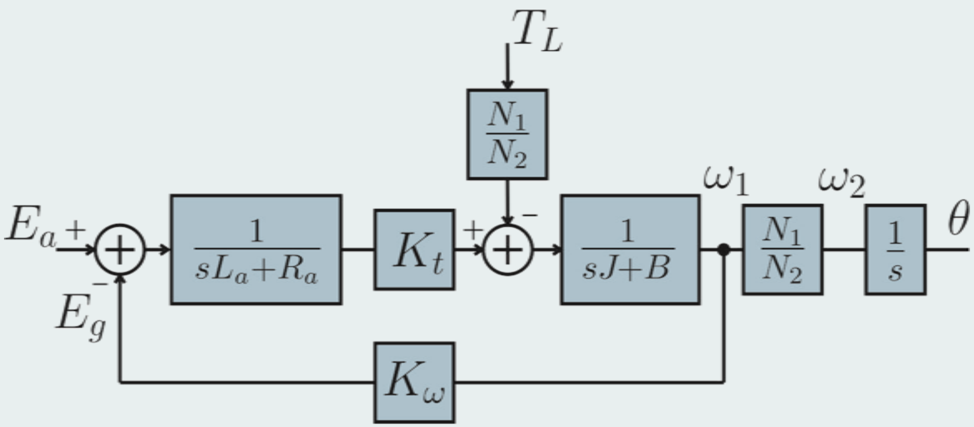


Diagrama de bloques

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_\omega}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_1 \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{N}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_1 \\ \theta \end{bmatrix}$$

Controlabilidad desde las dos entradas

$$U_T = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & -5000 & 67.8 & 4.76e5 & -6807 \\ 0 & -2 & 680 & 0.8 & -6.82e4 & 921.8 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 68 & 0.08 \end{bmatrix}$$

Sistema totalmente controlable

PROBLEMA 8_8

Solución:

b) Modelo de estado discreto (se considera Ts=3ms)

$$\begin{bmatrix} Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7391 & -0.08775 & 0 \\ 0.0352 & 0.9969 & 0 \\ 5.547e\text{-}6 & 2.996e\text{-}4 & 1 \end{bmatrix}}_{A_d} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1295 & 2.765e\text{-}4 \\ 2.774e\text{-}3 & -5.993e\text{-}3 \\ \underbrace{2.842e\text{-}7}_{B_{d1}} & \underbrace{-8.993e\text{-}7}_{B_{d2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(k) \\ T_L(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$$

Polinomio característico

$$\det(zI - A_d) = z^3 \underbrace{-2.736}_{a_3} z^2 \underbrace{+2.476}_{a_2} z \underbrace{-0.7399}_{a_1} = (z-1)(z-0.984)(z-0.7517)$$

Polo en el origen debido al integrador

PROBLEMA 8_8

Solución:

c) Realimentación de estados

El sistema es de tercer orden y tiene dos entradas y tres salidas. Una de las entradas es una perturbación, así que para la realimentación de estados no se considera. Luego, el sistema a realimentar resulta:

$$\begin{bmatrix} i_a(k+1) \\ \omega_1(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7391 & -0.08775 & 0 \\ 0.0352 & 0.997 & 0 \\ 5.547e-6 & 2.996e-4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(k) \\ \omega_1(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1295 \\ 2.774e-3 \\ 2.842e-7 \end{bmatrix} E_a(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(k) \\ \omega_1(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$$

Controlabilidad del sistema desde Ea

$$U = \begin{bmatrix} 1.295e-1 & 9.5473e-2 & 6.992e-2 \\ 2.774e-3 & 7.323e-3 & 1.066e-2 \\ 2.842e-7 & 1.8336e-6 & 4.557e-6 \end{bmatrix}$$

$$Rang(U) = 3$$

Sistema totalmente controlable

PROBLEMA 8_8

Solución:

Modelo canónico controlable

$$x_{cc}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0.7399 & -2.476 & 2.736\end{bmatrix}x_{cc}(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x_{cc}(k)$$

Matriz de transformación al modelo canónico

$$U_{cc}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2.736\\ 1 & 2.736 & 5.01\end{bmatrix} \Rightarrow P=U_{cc}U^{-1}=\begin{bmatrix}2.7729 & -194.13 & 6.31e5\\ -1.2841 & -4.7078 & 6.31e5\\ 2.385 & 184.49 & 6.31e5\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 8_8

Se desea realimentar las variables del sistema de modo de obtener una respuesta del sistema a lazo cerrado para una entrada en escalón con un sobrepico del 1 % y un tiempo de establecimiento de 0.5 seg.

$$e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.01 \qquad \xi^2 = \frac{(\ln 0.01)^2}{\pi^2 + (\ln 0.01)^2} = 0.6824 \qquad \xi = 0.826$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.5 \text{ seg} \qquad \omega_n = \frac{4}{\xi T_s} = 9.68 \text{ r/s}$$

Los polos continuos para cumplir estas especificaciones son: $S_{1,2} = -8 \pm j5.46$
Las singularidades en el dominio discreto resultan: $Z_{1,2} = 0.976 \pm j0.0160$
Se ubica el tercer polo una década por encima de la parte real de los complejos conjugados: $S_3 = -80 \qquad Z_3 = 0.7866$

Luego, el polinomio característico deseado resulta:

$$\det(zI - A_d) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - 2.739z^2 + 2.489z - 0.7498$$

PROBLEMA 8_8

Vector de ganancias del modelo canónico.

$$k_{cc} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_3 - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.83e-3 \\ 1.29e-2 \\ -2.9e-3 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$k^T = k_{cc}^T P = \begin{bmatrix} -5.07562e-2 & 1.312939 & 110.9566 \end{bmatrix}$$

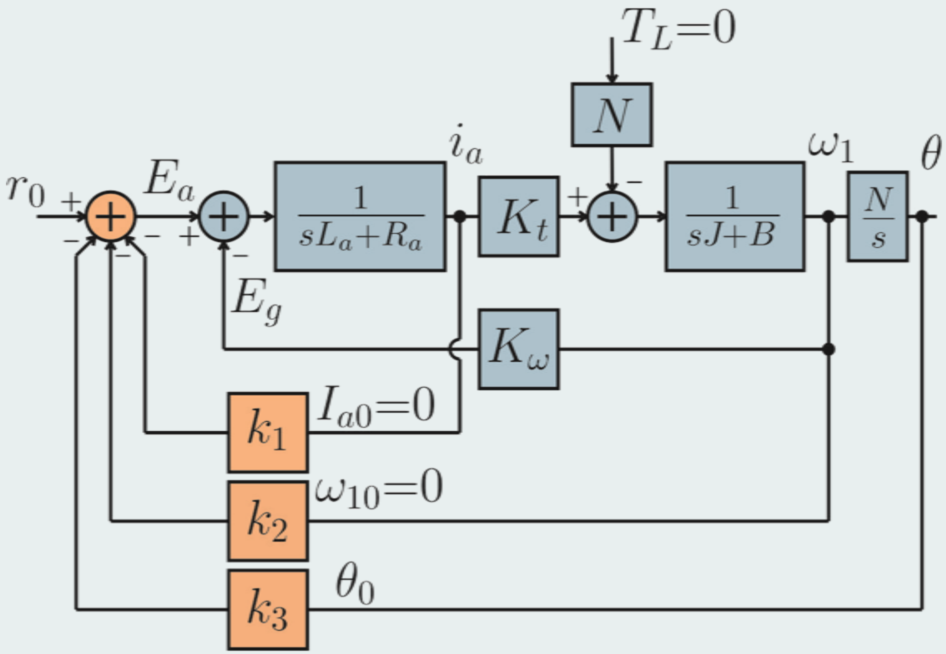
Modelo realimentado: $x(k+1) = (A_d - B_{d1} k^T) x(k) + B_d r(k)$

$$\begin{bmatrix} Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7457 & -0.2578 & -14.37 \\ 0.03534 & 0.9933 & -0.3077 \\ 5.562e-6 & 2.993e-4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(k) \\ \omega(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1295 & 2.765e-4 \\ 2.774e-3 & -5.993e-3 \\ 2.842e-7 & -8.993e-7 \end{bmatrix} r(k)$$

Las ganancias de realimentación se deben ajustar para cumplir con la ganancia a lazo cerrado pedida.

PROBLEMA 8_8

Determinación de la ganancia.



Modelo del sistema realimentado

Se requiere que $\theta=2\pi$ cuando la referencia es de 1 V. La tensión de entrada del motor en régimen permanente será:

$$E_a = r(k) - k_1 Ia(k) - k_2\omega(k) - k_3\theta(k)$$

Cuando se llega a la posición deseada la corriente, la velocidad y la tensión del motor deben ser cero.

$$r_0 - \theta_0 k_3 = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{r_0}{k_3} = \frac{1\text{V}}{110.95\text{V/rad}} \neq 2\pi \text{ rad}$$

Entonces se debe cumplir que:

$$\frac{r_0}{k_\theta} = \frac{1\text{V}}{k_\theta} = 2\pi$$

Luego, si se define $k_\theta = k_3 / A_0$ resulta:

$$A_0 = \frac{2\pi \cdot k_3}{1\text{V}} = 697.12$$

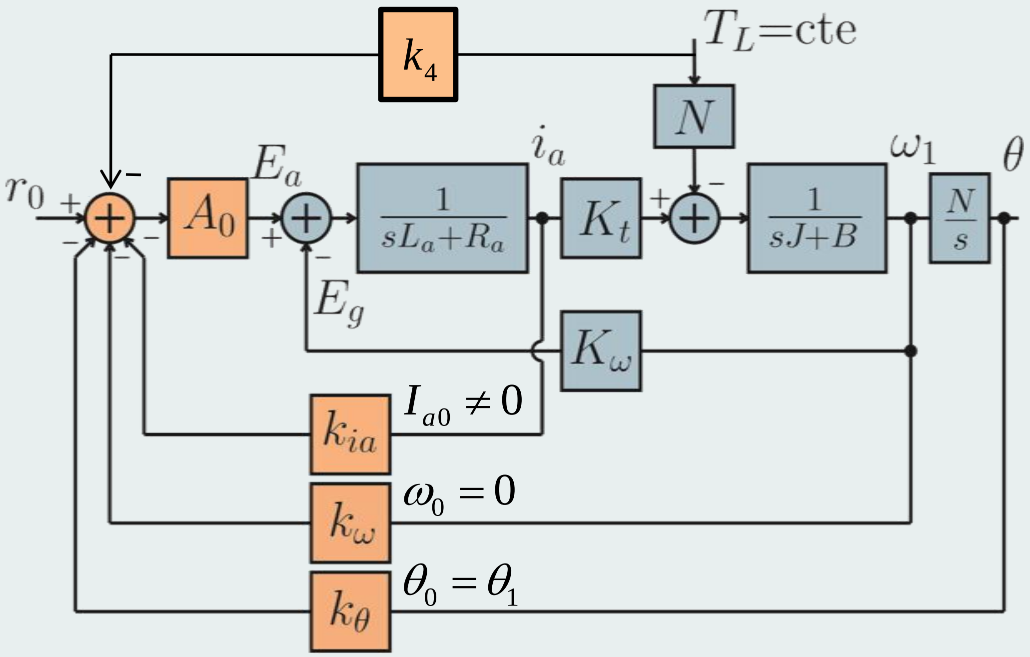
Finalmente, el vector de realimentación queda:

$$\frac{k^T}{A_0} = \begin{bmatrix} k_{ia} & k_\omega & k_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.2804e-5 & 1.8833e-3 & 0.1592 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 8_8

d) Compensación de la cupla de perturbación (feed-forward)

Cuando aparece la cupla de perturbación la posición de salida se ve afectada. Si la perturbación se puede medir, la solución sería inyectar esta señal, a través de una ganancia, a la entrada del sistema de modo de compensar el efecto sobre la salida. Esta compensación se calcula en régimen permanente suponiendo una perturbación constante a partir del siguiente diagrama:



PROBLEMA 8_8

Considero que TL=cte y que da origen a una $\theta_1 = cte \neq \theta_0$ deseada.

Luego:

$$\theta = \theta_1 \text{ (distinto al valor deseado)}$$

$$\omega_{10} = 0 \rightarrow I_{a0}K_t - NT_L = 0 \rightarrow I_{a0} = \frac{NT_L}{K_t}$$

Por otro lado:

$$\frac{E_a - \overbrace{(K_\omega \omega_{10})}^{0}}{R_a} = I_{a0} \rightarrow \frac{E_a}{R_a} = \frac{NT_L}{K_t} \rightarrow E_a = \frac{NT_L}{K_t} R_a$$

En el sumador de entrada se tiene:

$$r_0 - k_\theta \theta_1 - k_{ia} I_{ao} = \frac{E_a}{A_0} \rightarrow r_0 - k_\theta \theta_1 = \frac{NT_L}{K_t}\left[\frac{R_a}{A_0} + k_{ia}\right]$$

Luego, con la suma del término feed-forward se cumple:

$$\underbrace{r_0 - k_\theta \theta_0}_{0} = \frac{NT_L}{K_t}\left[\frac{R_a}{A_0} + k_{ia}\right] + k_4 T_L \rightarrow \boxed{k_4 = -\frac{N}{K_t}\left[\frac{R_a}{A_0} + k_{ia}\right]}$$

Notas:

- La compensación se realiza asumiendo TL constante, por lo tanto no puede compensar cambios en TL.
- Esta compensación requiere el conocimiento de TL.
- Esta perturbación no se puede medir. Por lo tanto, necesito estimarla.

PROBLEMA 8_8

e) Estimación de la perturbación

Se supone que la cupla de perturbación es una señal que no puede ser medida, por lo tanto se analiza la posibilidad de estimarla. Como no es una variable de estado, no se puede estimar. Por eso se plantea una dinámica para la perturbación de modo de transformarla en una variable dependiente. Se supone que la perturbación no varía rápidamente de modo que se puede suponer que:

$$T_L(k+1) = T_L(k)$$

Por lo tanto, el modelo de estado se puede reescribir

$$\begin{bmatrix} T_L(k+1) \\ Ia(k+1) \\ \omega(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{d2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & A_d & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L(k) \\ Ia(k) \\ \omega(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} B_{d1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} Ea(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L(k) \\ Ia(k) \\ \omega(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 8_8

Se considera que las variables del sistema son medibles, por lo tanto se plantea un estimador de orden reducido para estimar TL.
Las matrices para el estimador reducido son:

$$A_{T11} = [1] \quad ; \quad A_{T12} = [0 \quad 0 \quad 0] \quad ; \quad A_{T21} = [B_{d2}] \quad ; \quad A_{T22} = [A_d]$$
$$B_{T1} = [0] \quad ; \quad B_{T2} = [B_{d1}]$$

El estimador propuesto es:

$$\hat{w}(k+1) = [A_{T11} - HA_{T21}]\hat{w}(k) + [A_{T12} - HA_{T22} + A_{T11}H - HA_{T21}H]y(k) +$$
$$+[B_{T1} - HB_{T2}]u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{T}_L(k) = \hat{w}(k) + Hy(k)$$

PROBLEMA 8_8

Para el estimador de orden reducido:

$$A_e = A_{T11} - HA_{T21} = \left[1\right] - \left[h_1 \quad h_2 \quad h_3\right]\left[B_{d2}\right]$$

Se considera el autovalor del estimador en z=0, entonces si h_1 = 0 y h_3 = 0, se resuelve h_2 = -166.8739

El estimador queda:

$$\hat{w}(k+1) = 0\ \hat{w}(k) + \left[0.4628\right]u(k) + \left[5.8743 \quad 166.3601 \quad 0\right]\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\hat{T}_L(k) = \hat{w}(k) + \left[0 \quad 166.87 \quad 0\right]\begin{bmatrix} Ia \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 8_8

FIN