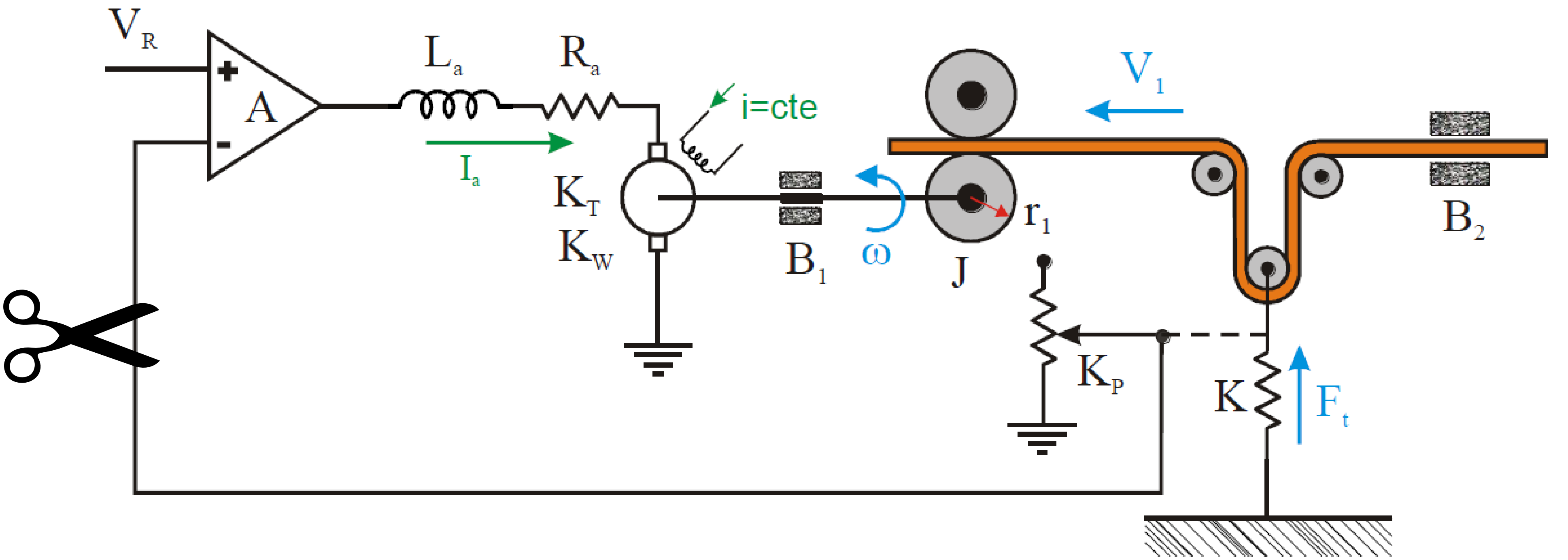
Estimadores de Estado

Sistema SISO

Enunciado

Para el sistema que se muestra en la figura, se desea diseñar un estimador de estados considerando la planta a lazo abierto. La entrada de la nueva planta será la tensión de alimentación del motor y su salida la tensión proporcional al desplazamiento del resorte. Considere para el diseño del estimador que el error en las variables estimadas debe hacerse cero en el menor tiempo posible.

Datos: Ra = 2,4; La = 0,04 H; Kt = 0,86 N.m/A; Kw = 1,07 V.s/rad; B2 = 2 N.s/m; B1 = 0,04 N.m.s/rad; J = 0,025 N.m.s^2; K = 500 N/m; Kp = 1; r1 = 0,1 m; Ts = 0,01 s



Estimador SISO

Vector de realimentación

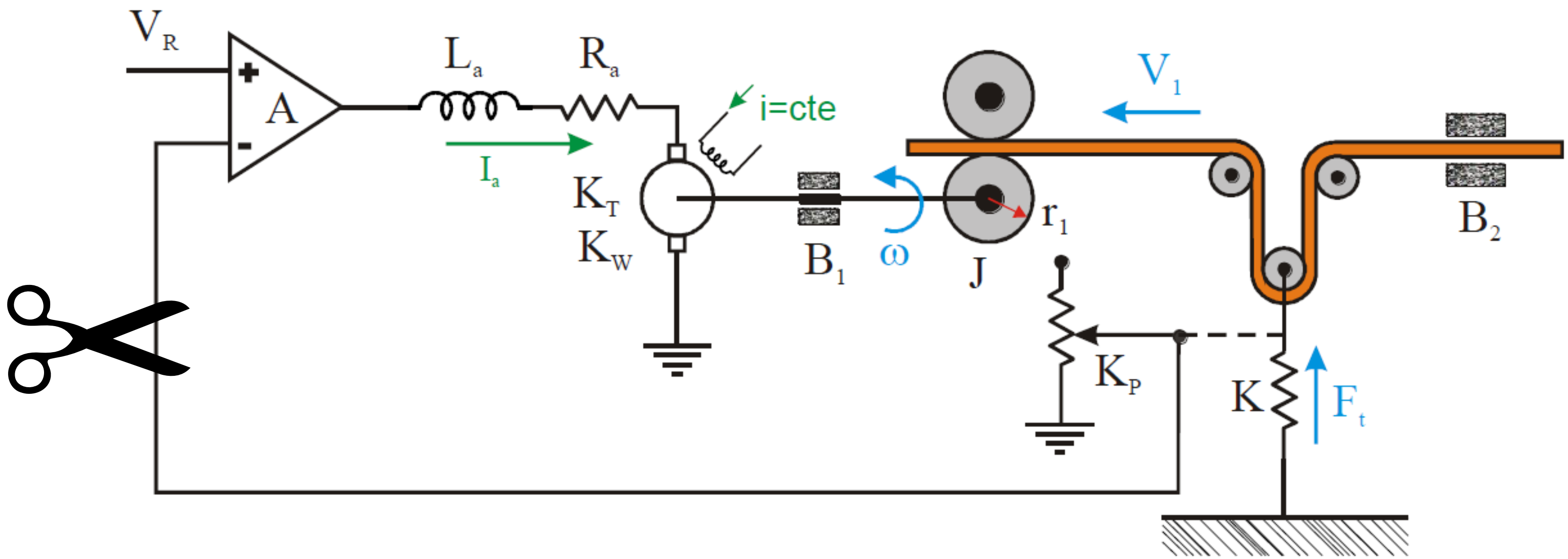
Dinámica del Error

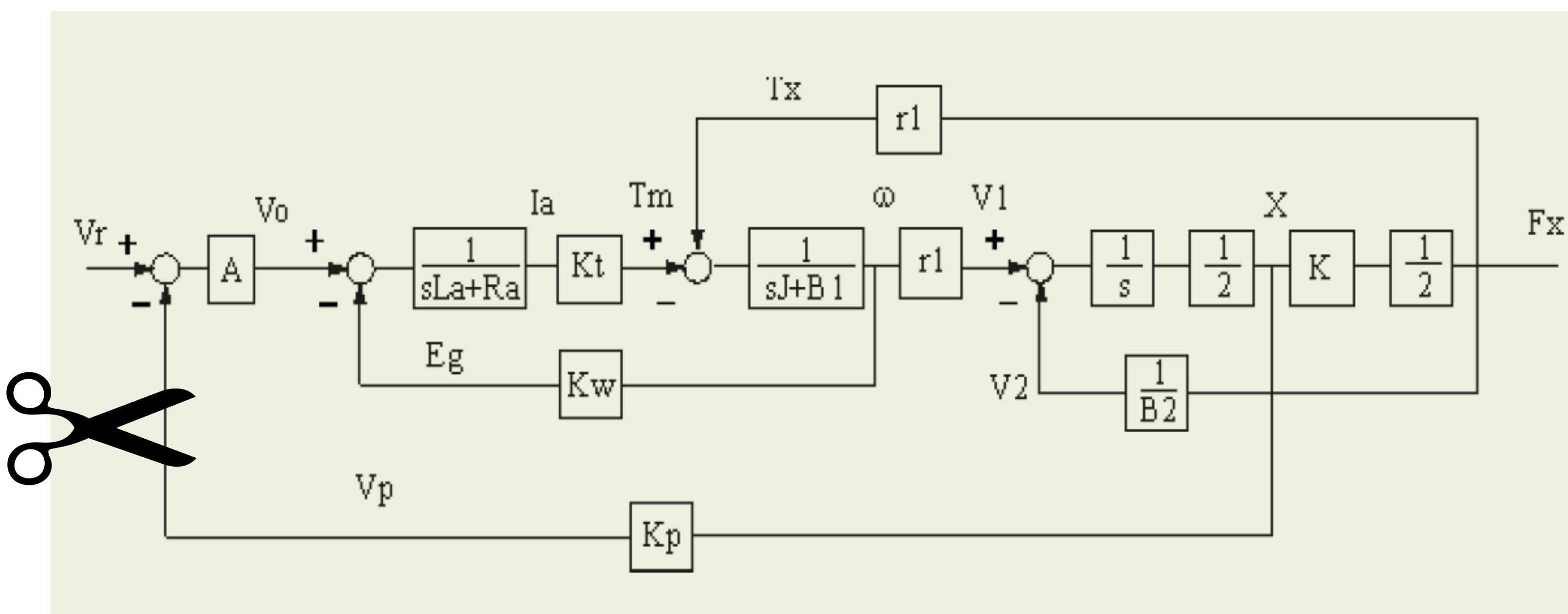
Ruido

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boxed{(\boldsymbol{A}_d-\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{C}_d)\hat{\boldsymbol{x}}(k)}+\boldsymbol{B}_d u(k)+\boxed{\boldsymbol{H}\,y(k)}$$

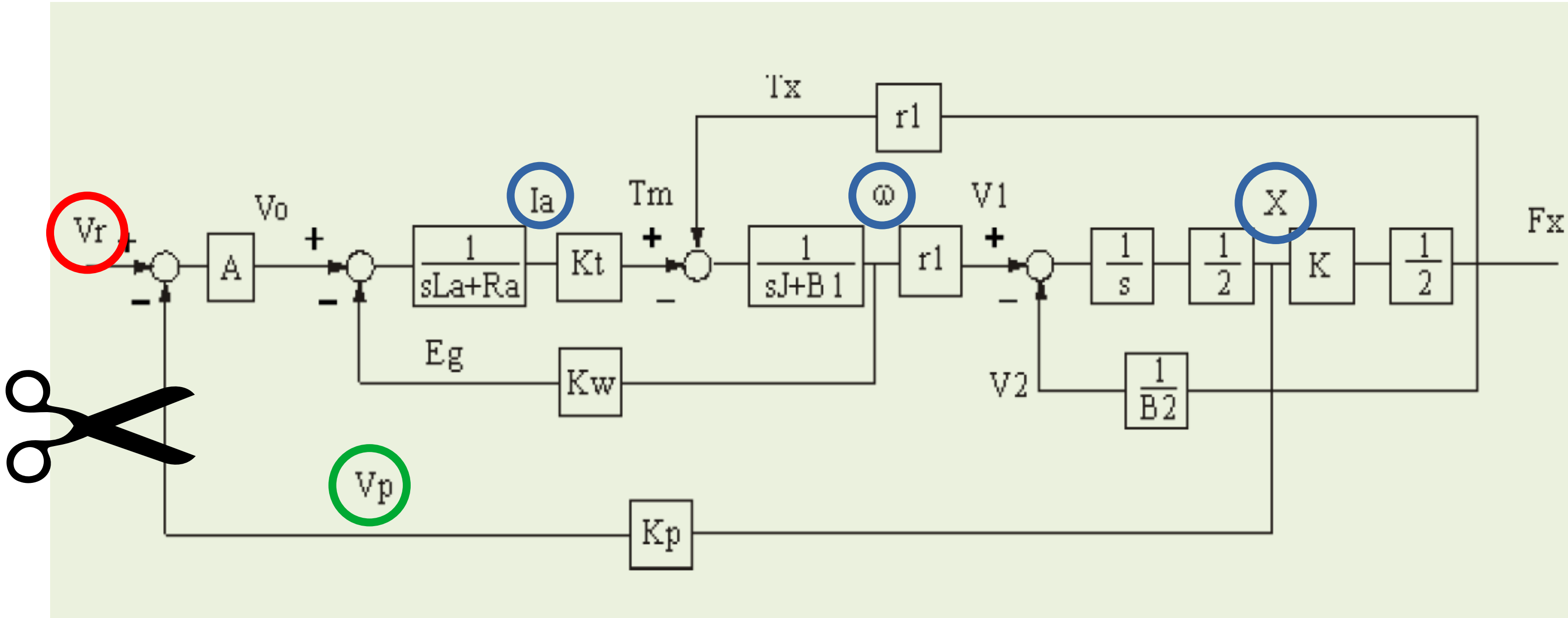
Modelo de estado discreto

Modelo de estado





Modelo de estado



Ra = 2,4;
La = 0,04;
Kt = 0,86;
Kw = 1,07;
B2 = 2;
B1 = 0,04;
J = 0,025;
K = 500;
Kp = 1;
r1 = 0,1;
Ts = 0,01

$$sI_a = \frac{-R_a}{L_a} I_a - \frac{K_w}{La}\omega + \frac{A}{L_a} V_r$$
$$s\omega = \frac{K_t}{J} I_a - \frac{B_1}{J}\omega - \frac{K r_1}{2J} x$$
$$sx = \frac{r_1}{2}\omega - \frac{K}{4B_2} x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & \frac{-K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & \frac{-B_1}{J} & \frac{-Kr_1}{2J} \\ 0 & \frac{r_1}{2} & \frac{-K}{4B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + 0 V_r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & -26{,}75 & 0 \\ 34{,}4 & -1{,}6 & -1000 \\ 0 & 0{,}05 & -62{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + 0 V_r$$

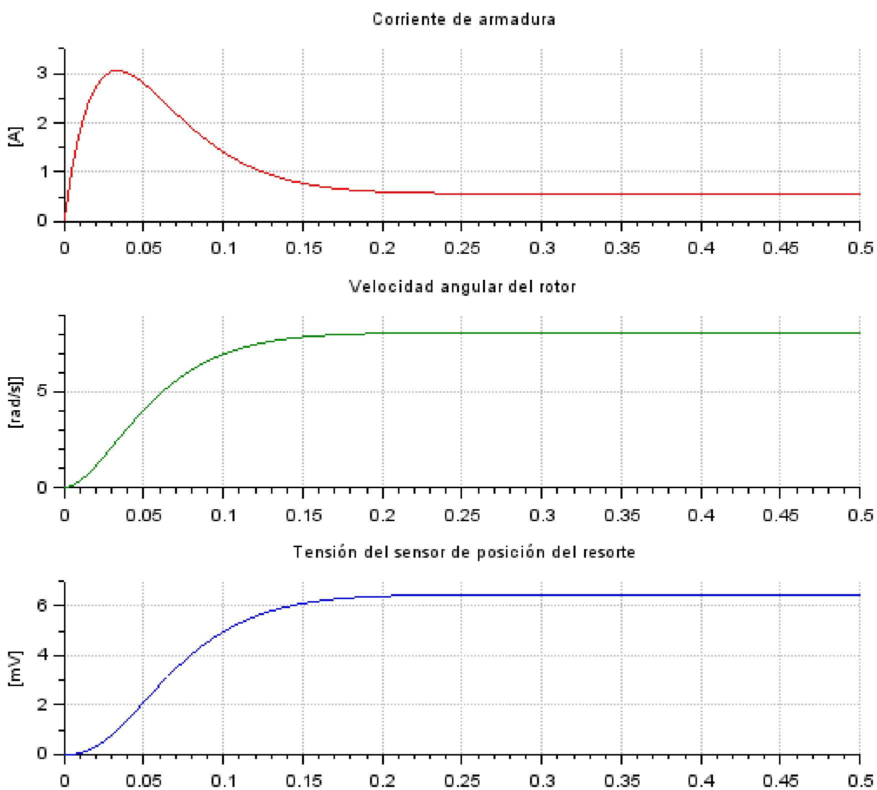
Modelo de estado discreto

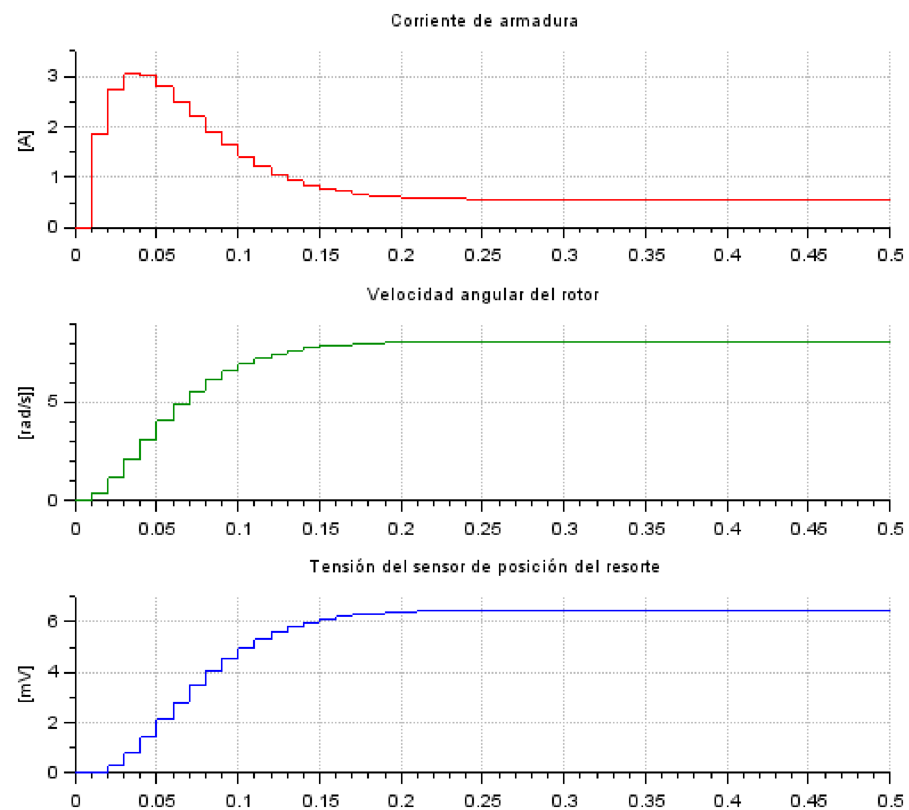
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & -26{,}75 & 0 \\ 34{,}4 & -1{,}6 & -1000 \\ 0 & 0{,}05 & -62{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_r$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ x \end{bmatrix} + 0\, V_r$$

$$\begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \omega(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5180937 & -0{,}1962059 & 0{,}8859173 \\ 0{,}2523171 & 0{,}94479 & -7{,}2520021 \\ 0{,}000057 & 0{,}0003626 & 0{,}5336186 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}8515495 \\ 0{,}3507891 \\ 0{,}0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$





Vector de realimentación

$$\begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \omega(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5180937 & -0{,}1962059 & 0{,}8859173 \\ 0{,}2523171 & 0{,}94479 & -7{,}2520021 \\ 0{,}000057 & 0{,}0003626 & 0{,}5336186 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}8515495 \\ 0{,}3507891 \\ 0{,}0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$

<u>Si el sistema es **OBSERVABLE**:</u>

1) Puedo reasignar **todos** los autovalores del estimador y por ende minimizar el tiempo de convergencia.
2) Puedo utilizar el **Modelo Canónico Observable** para reasignar **todos** los autovalores

$$\boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{H}_{co}}$$

Modelo discreto

$$\boldsymbol{V}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}000057 & 0{,}0003626 & 0{,}5336186 \\ 0{,}0001514 & 0{,}0005249 & 0{,}2821697 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{V}_d| = -2{,}5\times 10^{-8}$$

Modelo continuo

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}05 & -62{,}5 \\ 1{,}72 & -3{,}205 & 3856{,}25 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{V}| = -0{,}086$$

OBSERVABLE

Vector de realimentación

$$\begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \omega(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5180937 & -0,1962059 & 0,8859173 \\ 0,2523171 & 0,94479 & -7,2520021 \\ 0,000057 & 0,0003626 & 0,5336186 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,8515495 \\ 0,3507891 \\ 0,0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$

$$\boldsymbol{V_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,000057 & 0,0003626 & 0,5336186 \\ 0,0001514 & 0,0005249 & 0,2821697 \end{bmatrix}$$

Modelo Canónico Observable (MCO)

1. $|z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_d}| = z^3 - 1,9965023\, z^2 + 1,3221968\, z - 0,289095$

2. $\boldsymbol{A_{co}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,289095 \\ 1 & 0 & -1,3221968 \\ 0 & 1 & 1,9965023 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C_{co}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{V_{co}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1,9965023 \\ 1 & 1,9965023 & 2,6638244 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V_d}^{-1} \boldsymbol{V_{co}} = \begin{bmatrix} 14505,403 & 7962,2647 & 3829,5158 \\ -2278,7658 & 1507,0054 & 3432,8188 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{B_{co}} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{B_d}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,289095 \\ 1 & 0 & -1,3221968 \\ 0 & 1 & 1,9965023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0000284 \\ 0,0001555 \\ 0,0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$

Vector de realimentación

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}289095 \\ 1 & 0 & -1{,}3221968 \\ 0 & 1 & 1{,}9965023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0000284 \\ 0{,}0001555 \\ 0{,}0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 14505{,}403 & 7962{,}2647 & 3829{,}5158 \\ -2278{,}7658 & 1507{,}0054 & 3432{,}8188 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{H}_{co}}$$

$$\boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co} = \,?$$

Para minimizar el tiempo de convergencia del error del estimador, debo asignar todos los autovalores a z=0.

$$|z\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co})| = z^3$$

$$|z\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co})| = z^3 \longrightarrow \boldsymbol{A}_{co} - \boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Coeficientes de la Ecuación Característica deseada

$$\boldsymbol{A}_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}289095 \\ 1 & 0 & -1{,}3221968 \\ 0 & 1 & 1{,}9965023 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{H}_{co} = \begin{bmatrix} 0{,}289095 \\ -1{,}3221968 \\ 1{,}9965023 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{H}_{co} = \begin{bmatrix} 1311{,}3947 \\ 4202{,}2929 \\ 1{,}9965023 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{H}_{co}\boldsymbol{C}_{co} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}$$

Estimador SISO

$$\begin{bmatrix} I_a(k+1) \\ \omega(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5180937 & -0{,}1962059 & 0{,}8859173 \\ 0{,}2523171 & 0{,}94479 & -7{,}2520021 \\ 0{,}000057 & 0{,}0003626 & 0{,}5336186 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}8515495 \\ 0{,}3507891 \\ 0{,}0000528 \end{bmatrix} V_r(k)$$

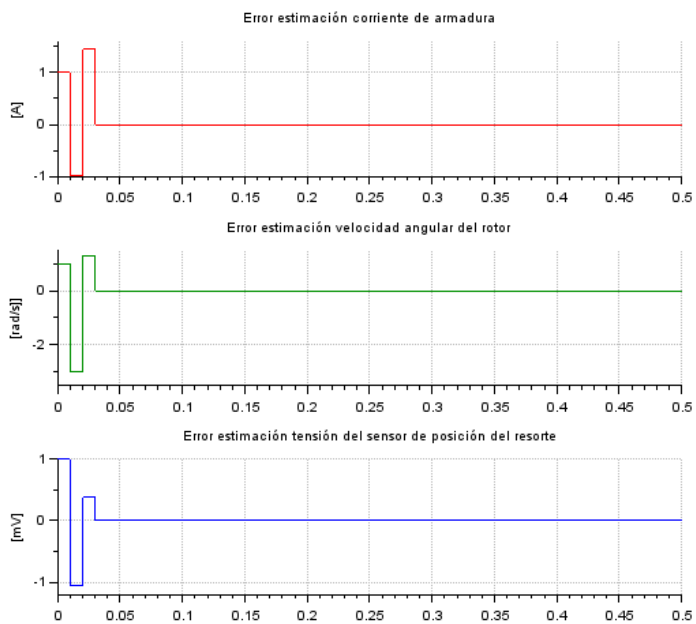
$$y(k) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + 0\, V_r(k)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{co}} = \begin{bmatrix} 1311{,}3947 \\ 4202{,}2929 \\ 1{,}9965023 \end{bmatrix}$$

Dinámica del Error **Ruido**

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = (\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{d}})\, \hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{d}}\, u(k) + \boldsymbol{H}\, y(k)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_a(k+1) \\ \hat{\omega}(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5180937 & -0{,}1962059 & -1310{,}5088 \\ 0{,}2523171 & 0{,}94479 & -4209{,}5449 \\ 0{,}000057 & 0{,}0003626 & -1{,}4628837 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_a(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}8515495 \\ 0{,}3507891 \\ 0{,}0000528 \end{bmatrix} V_r(k) + \begin{bmatrix} 1311{,}3947 \\ 4202{,}2929 \\ 1{,}9965023 \end{bmatrix} y(k)$$



Ruido $\longrightarrow \|\boldsymbol{H}\|$

?