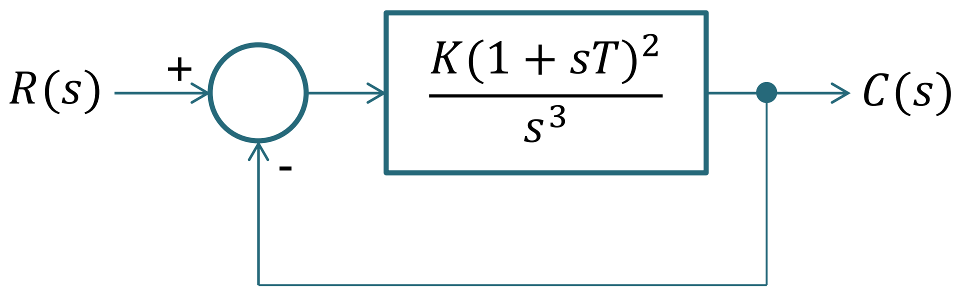
Estabilidad de sistemas realimentados.

Resolución: ejercicio 3_1

Estabilidad de sistemas.

a) Para el sistema indicado en la figura, calcular mediante el criterio de Routh, el rango de valores de K y T para los cuales el sistema se mantiene estable.



b) Si $T = 1\text{seg}$ halle el valor de K de modo que $C(s)/R(s)$ tenga un par de polos sobre el eje $j\omega$ y la ubicación precisa de las mismos.

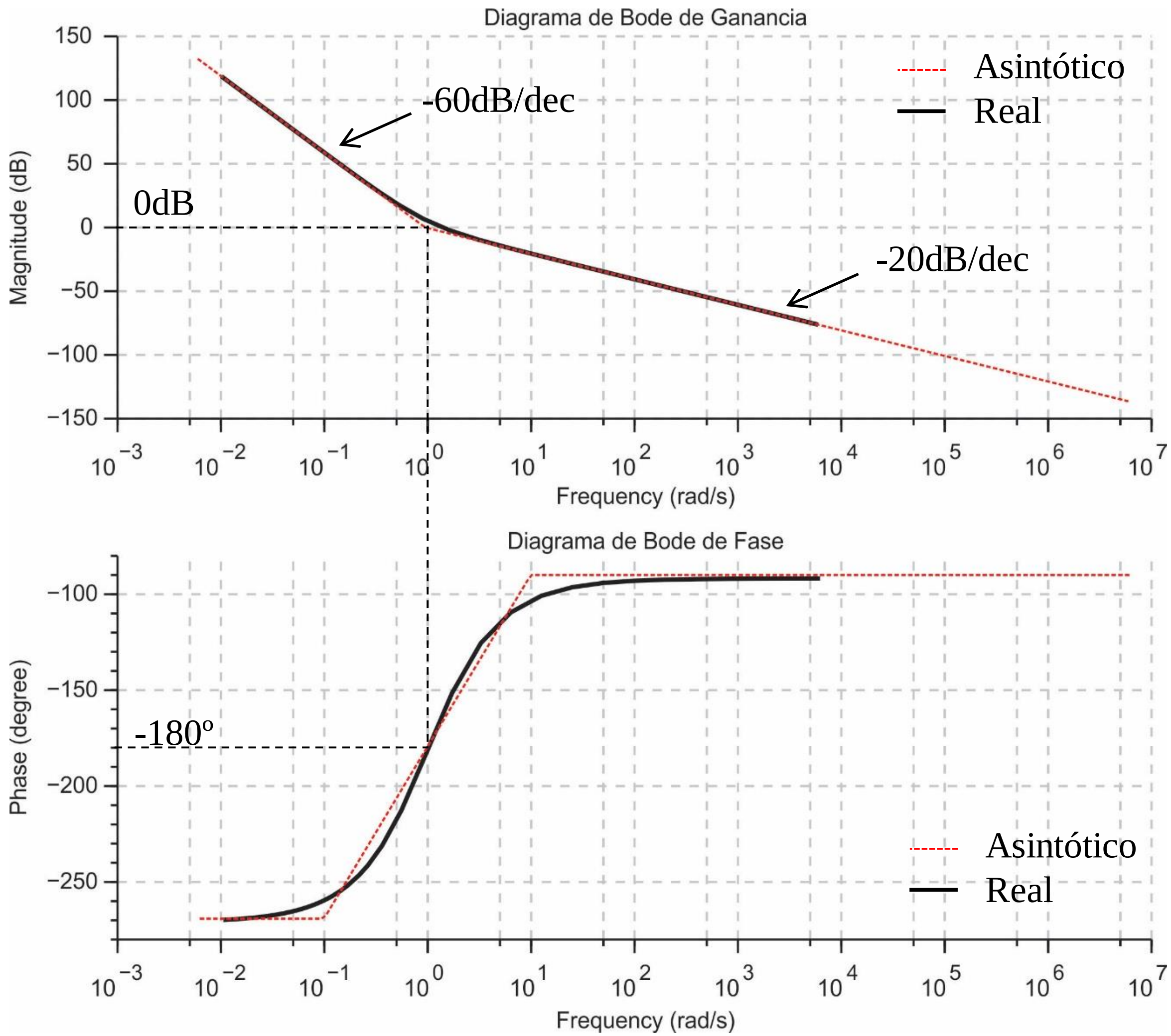
c) Analizar la anterior situación mediante lugar de raíces.

d) Para $K = 1$ y $T = 1$ bosqueje los diagramas de Bode y Nyquist, y verifique las condiciones de estabilidad.

Estabilidad de sistemas.

d) Diagrama de Bode de GH $(K = 1, T = 1)$

$$GH(s) = \frac{(1+s)^2}{s^3}$$



¿Cuanto es el margen de fase y de ganancia?

Según Bode Asintótico

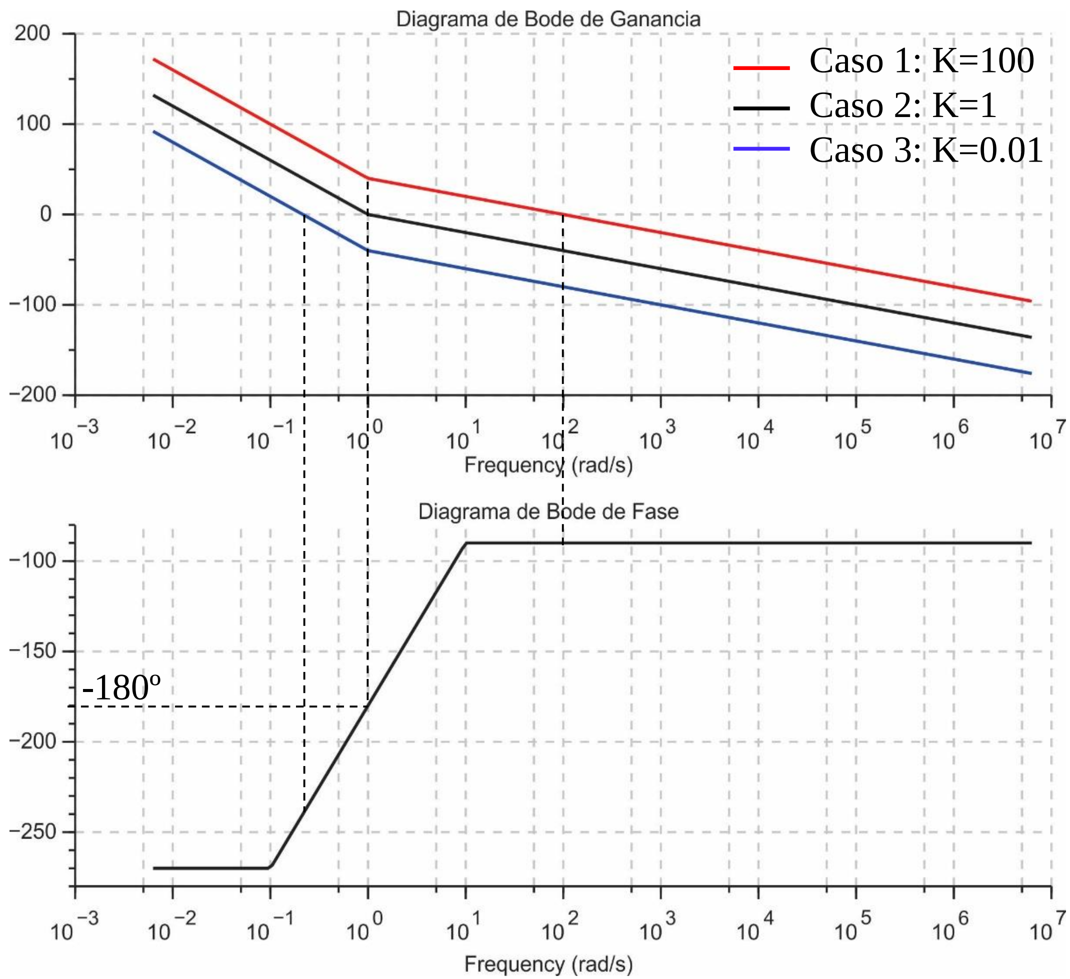
$MG \approx 0$

$MP \approx 0$

¿Qué significa esto?

Estabilidad de sistemas.

Análisis de con distintos valores de K



Sabíamos que un sistema a lazo cerrado es estable si: $MG > 0$ y $MP > 0$

Caso 1: $K = 100$

$MG < 0 \approx -40\text{dB}$

$MP > 0 \approx 90°$

¿Es un caso estable?

Caso 2: $K = 1$

$MG \approx 0$

$MP \approx 0$

Límite de estabilidad

Caso 3: $K = 0.01$

$MG > 0 \approx 40\text{dB}$

$MP < 0 \approx -60°$

¿Es un caso estable?

Estabilidad de sistemas.

Criterio de estabilidad de Routh

Este criterio permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano s a partir de operar con los coeficientes del polinomio característico.

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

donde se considera que $a_n \neq 0$ (se elimina cualquier raíz cero) y todos los coeficientes con términos reales y positivos.

Luego: ordenar los coeficientes del polinomio en una tabla de acuerdo al siguiente patrón:

$$\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Estabilidad de sistemas.

$$\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Los coeficientes b_1, b_2, b_3, etc. Se evalúan del siguiente modo:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

La evaluación de las b continúa hasta que todas las restantes son cero. Se sigue el mismo patrón de multiplicación cruzada de los coeficientes de los dos renglones anteriores al evaluar las c, las d, etc.

El proceso continúa hasta que se completa el n-ésimo renglón.

El criterio establece que el número de raíces del polinomio con parte real positiva e igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna de la tabla.

Estabilidad de sistemas.

a) Obtengo el polinomio característico

$$1 + GH = 1 + \frac{K(1+sT)^2}{s^3} = \frac{s^3 + KT^2s^2 + 2TKs + K}{s^3} = 0$$

$$\boxed{s^3 + KT^2s^2 + 2TKs + K = 0}$$

Armo el arreglo

$$\begin{array}{|c|c|c|} s^3 & 1 & 2KT \\ s^2 & KT^2 & K \\ s^1 & b_1 & b_2 \\ s^0 & c_1 & c_2 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{(KT^2 \cdot 2KT) - K}{KT^2} = \frac{2KT^3 - 1}{T^2} \Rightarrow \frac{2KT^3 - 1}{T^2} > 0 \Rightarrow \boxed{K > \frac{1}{2T^3}}$$

$$b_2 = \frac{(KT^2 \cdot 0) - 1 \cdot 0}{KT^2} = 0$$

$$c_1 = \frac{(b_1 \cdot K) - (KT^2 \cdot b_2)}{b_1} = K \Rightarrow \boxed{K > 0}$$

$$c_2 = 0$$

La solución debe cumplir con las dos condiciones

$$\boxed{K > \frac{1}{2T^3}} \Rightarrow \boxed{K > \frac{1}{2}}$$

$$T = 1$$

Estabilidad de sistemas.

b) Con $T = 1$, se obtiene el valor de K para el cual el par de polos están sobre el eje $j\omega$.

Si los polos están sobre el eje $j\omega$, la ganancia del sistema debe estar en la condición límite, es decir:

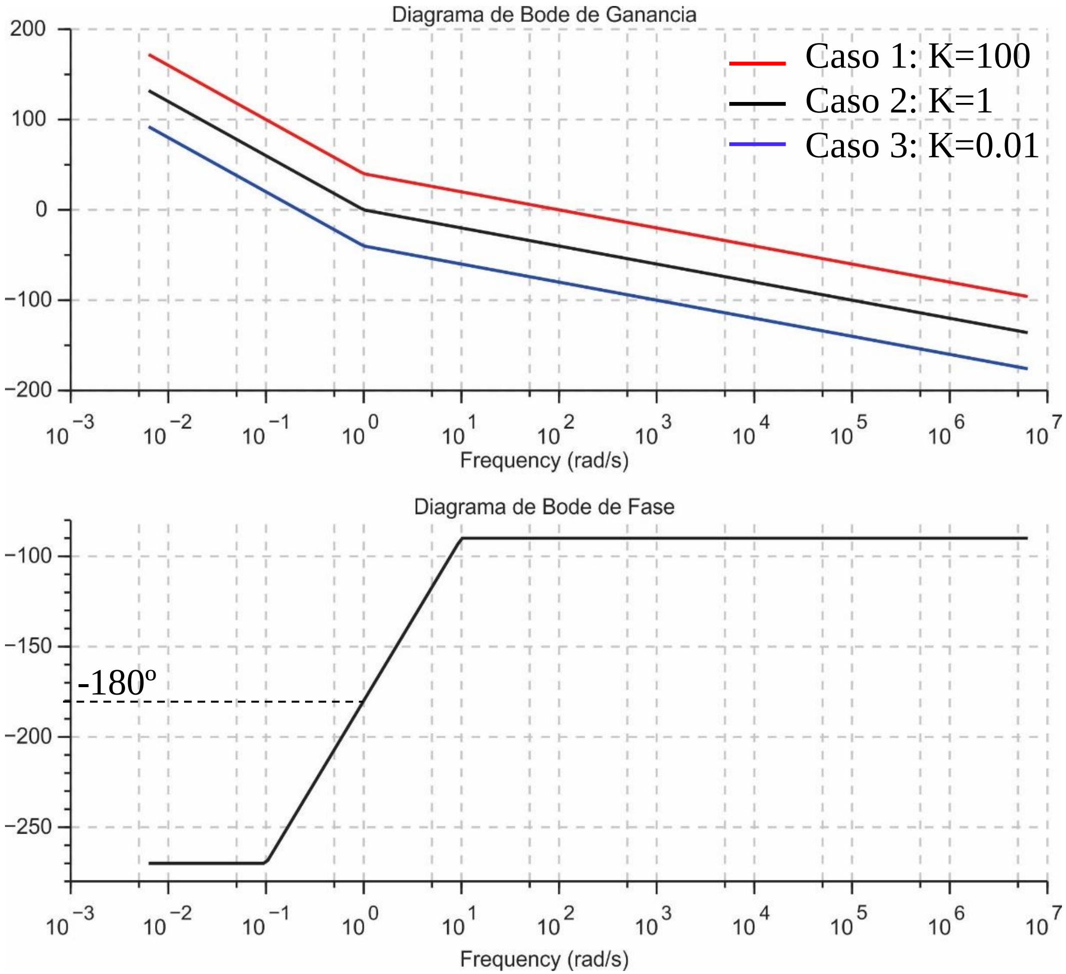
$$\boxed{K = 1/2}$$

La ubicación de los polos se obtiene evaluando el polinomio generado con los términos de la fila s^2 para la condición límite de ganancia.

$$KT^2s^2 + K = 0 \Rightarrow 0.5T^2s^2 + 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{s_{1,2} = \pm j}$$

Estabilidad de sistemas.

Análisis de con distintos valores de K



Caso 1: $K = 100$

$MG < 0 \approx -40\text{dB}$

$MP > 0 \approx 90°$

Es un caso estable

Caso 2: $K = 1$

$MG \approx 0$

$MP \approx 0$

Límite de estabilidad

Caso 3: $K = 0.01$

$MG > 0 \approx 40\text{dB}$

$MP < 0 \approx -60°$

Es un caso inestable

Estabilidad de sistemas.

c) Análisis mediante lugar de raíces

Consiste en hacer un trazado en el plano s de la trayectoria de los polos a lazo cerrado. El método inicia ubicando las singularidades a lazo abierto (ceros y polos) y se dibuja la trayectoria que siguen los polos a medida que se varía K, los cuales deben cumplir las siguientes condiciones:

$$|GH(s)| = 1$$

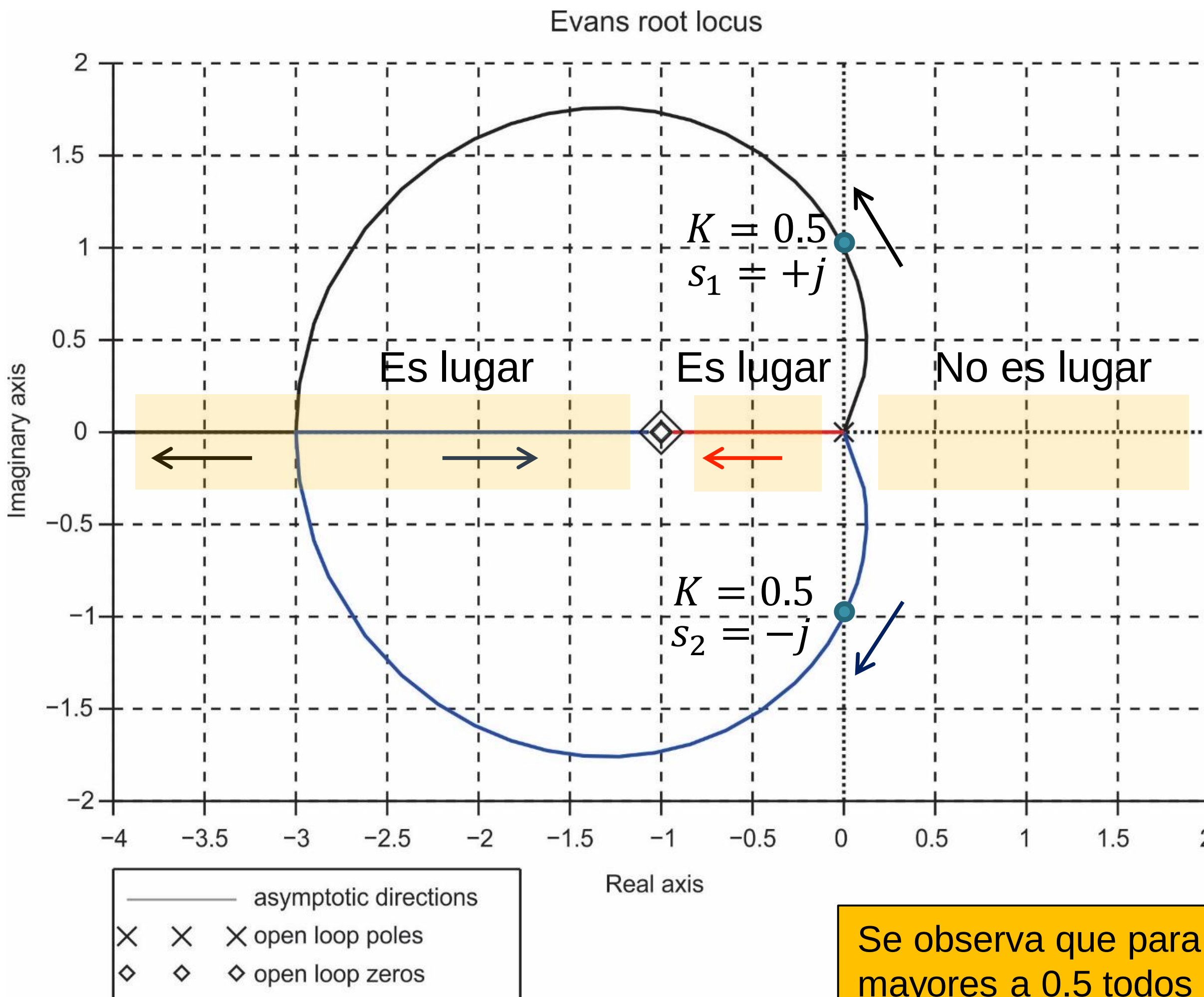
$$\mathrm{phase}\{\mathrm{GH(s)}\} = 180°$$

En el caso de ganancias K positivas se obtiene el lugar de raíces directo, en tanto que para ganancias negativas se obtiene el lugar de raíces inverso.

El sistema es inestable para aquellos valores de K en el cual los polos se encuentran en el semiplano derecho del plano s.

Estabilidad de sistemas.

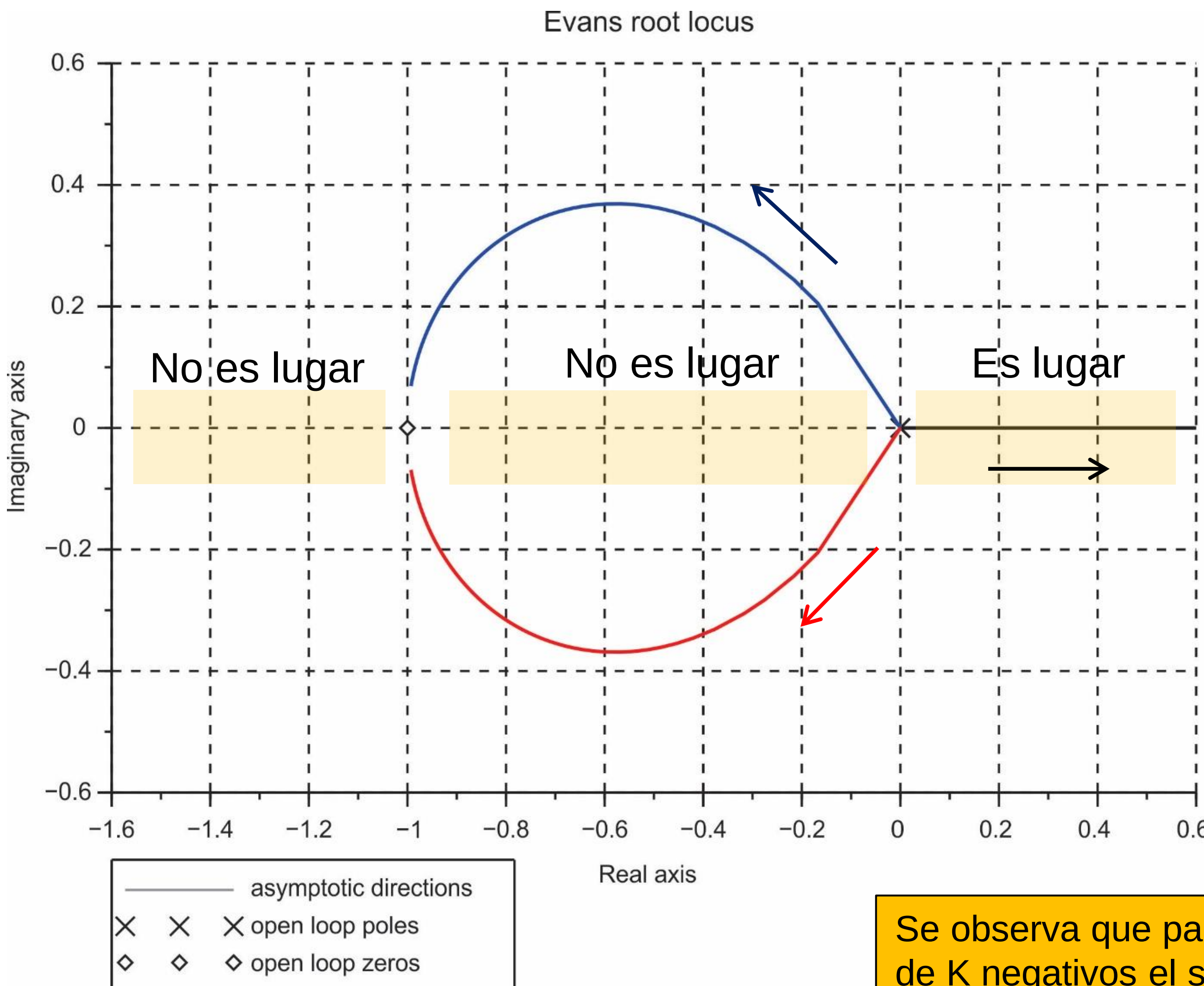
Lugar de raíces directo



Se observa que para valores de K mayores a 0.5 todos los polos están en semiplano izquierdo

Estabilidad de sistemas.

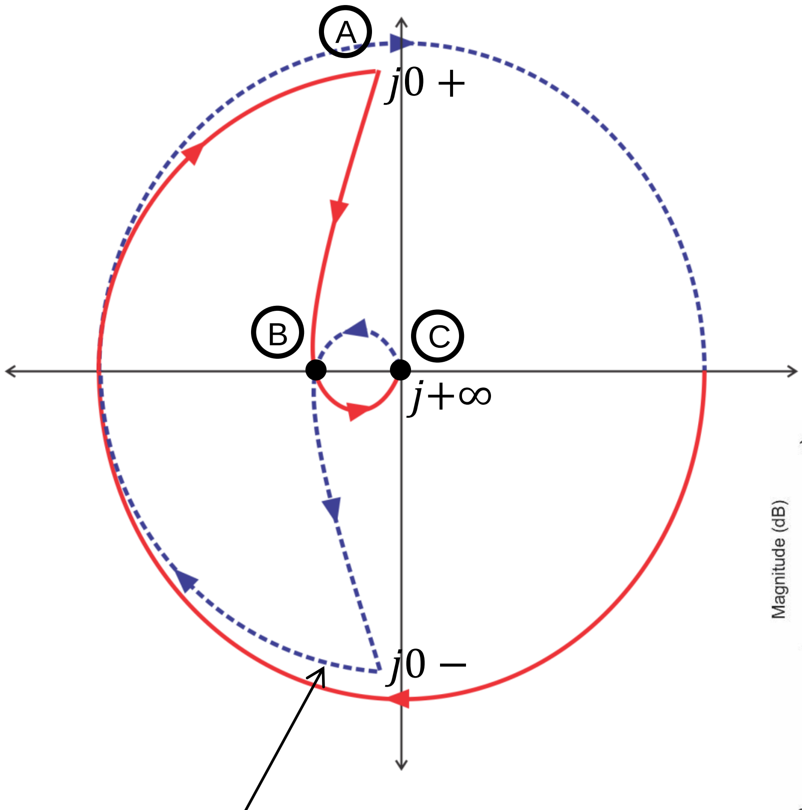
Lugar de raíces inverso

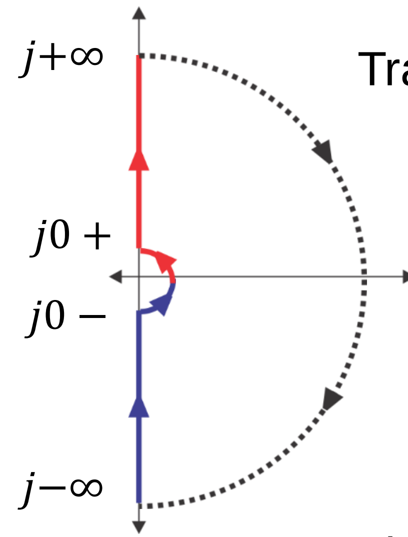


Se observa que para todos los valores de K negativos el sistema inestable

Estabilidad de sistemas.

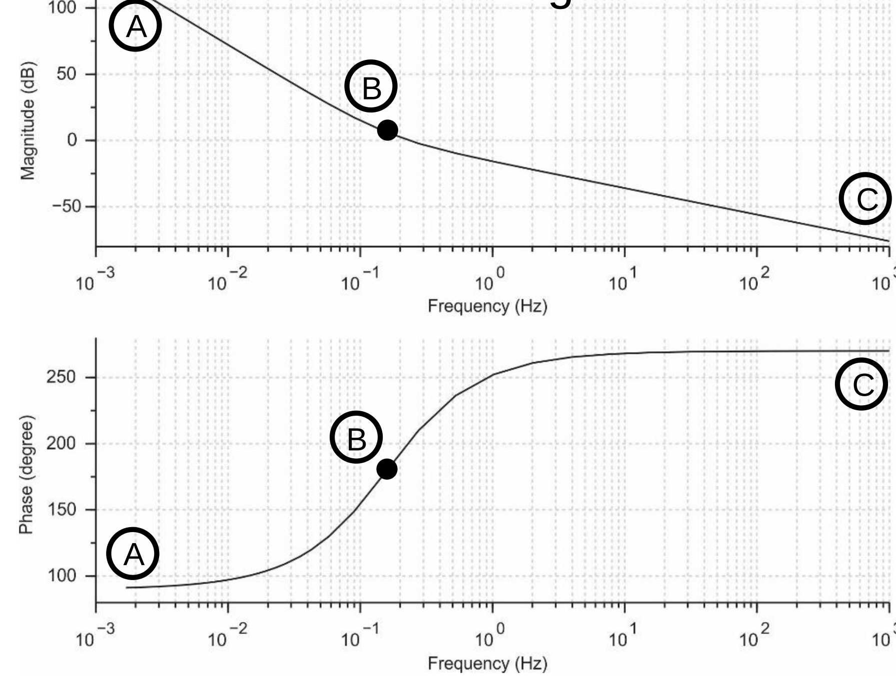
d) Diagrama de Nyquist





Trayectoria en el plano s

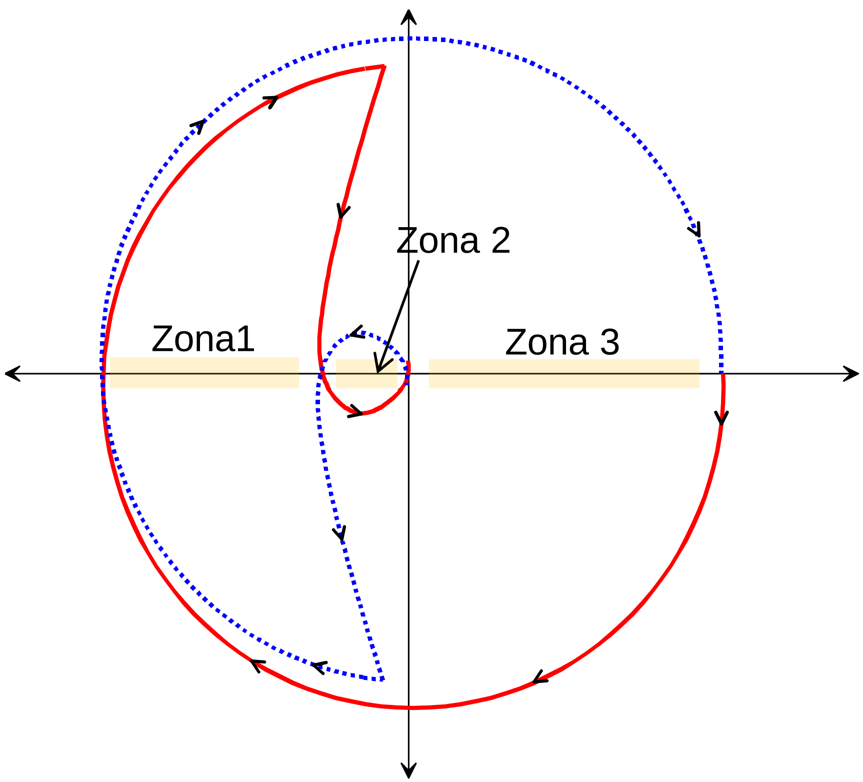
Diagrama de Bode



La trayectoria siempre se cierra en el sentido horario. Un semi-giro por cada polo en el origen.

Estabilidad de sistemas.

Análisis de estabilidad por Nyquist



$$GH(s) = \frac{(1+s)^2}{s^3}$$

$$\boxed{N = Z - P}$$

N: Número de giros (positivos: horario)

P: Polos en semiplano derecho de GH

Z: Raíces en semiplano derecho de 1+GH

<u>Para ganancias K positivas</u>

Zona 1: bajas ganancias

$P = 0$, $N = 2$ ⇒ $Z = 2$

Sistema inestable

Zona 2: altas ganancias

$P = 0$, $N = 0$ ⇒ $Z = 0$

Sistema estable

<u>Para ganancias K negativas</u>

Zona 3: todas las ganancias

$P = 0$, $N = 1$ ⇒ $Z = 1$

Sistema inestable