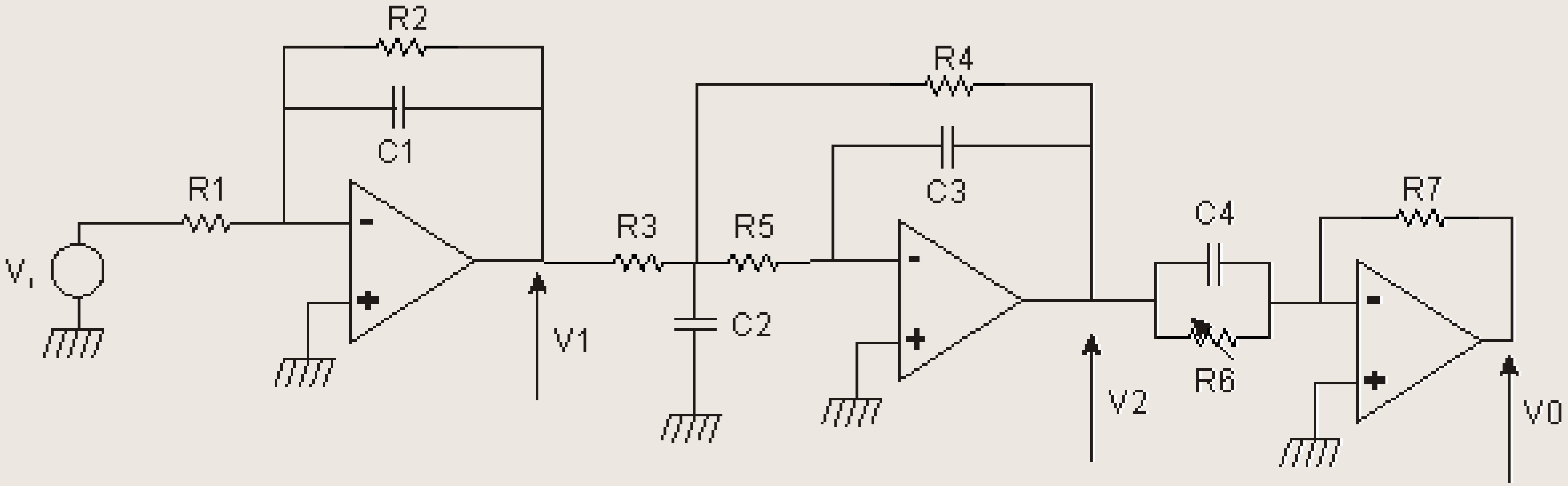
TEORÍA DE CONTROL

Estimadores de Estado

Sistemas no Observables

Estimadores de Estado

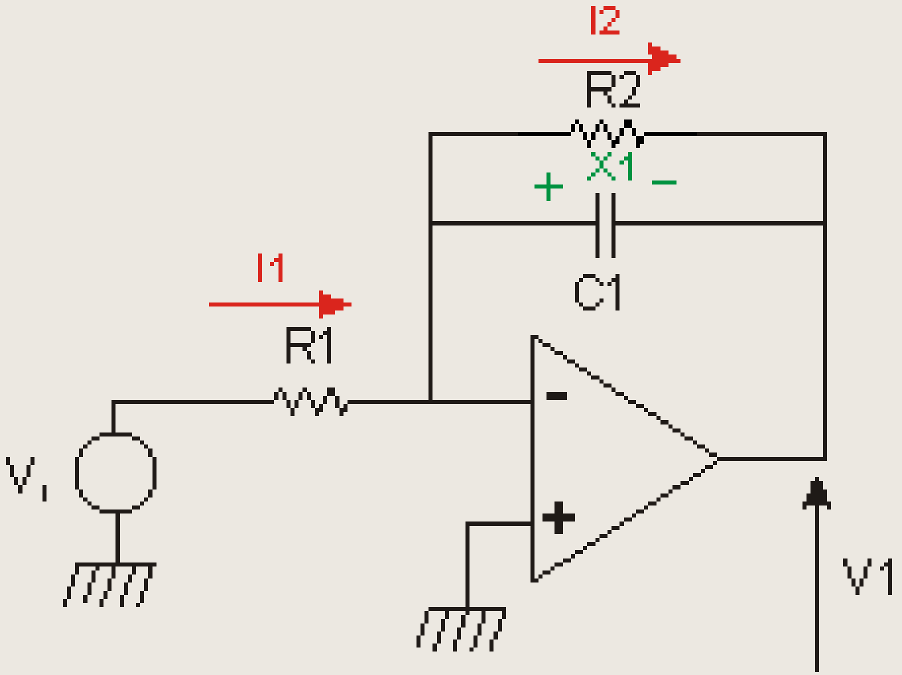
En la figura se muestra un circuito electrónico con amplificadores oreracionales. Se desea a partir de la medición de V0 y de Vi, diseñar un estimador de estado discreto para evaluar el comportamiento de las variables del circuito. Encuentre el modelo del estimador para una frecuencia de muestreo Fs= 1 Khz.



Datos:
R1=1KΩ; R2=10KΩ; R3=820Ω; R4=1KΩ; R5=1KΩ; R6=1KΩ; R7=1KΩ;
C1=0.1μF; C2=1μF; C3=1μF; C4=1μF;

Se plantea el modelo de cada una de las etapas y al final se agrupan los distintos modelos en serie.

Etapa nº 1



$$Vi = I_1 R_1$$

$$V_1 = -X_1$$

$$I_1 = I_{C1} + I_2 = \dot{X}_1 C_1 + \frac{X_1}{R_2}$$

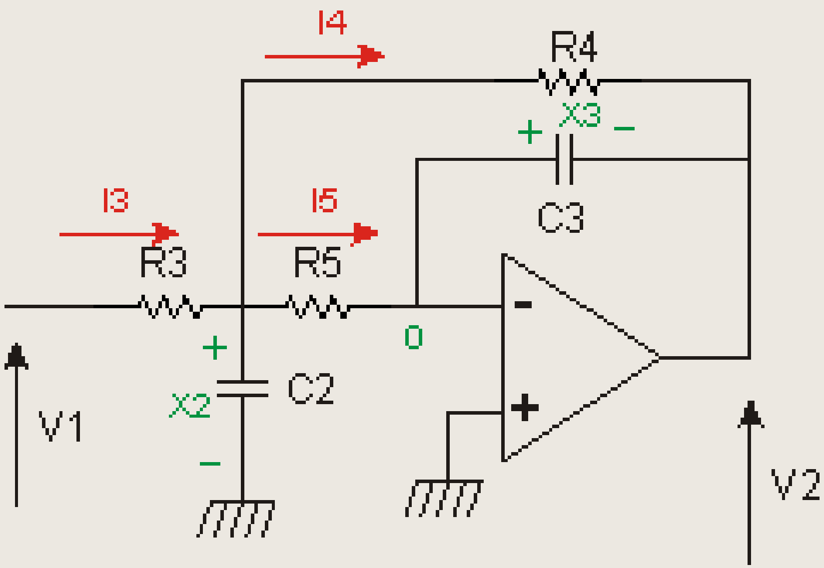
$$Vi = \dot{X}_1 C_1 R_1 + \frac{R_1}{R_2} X_1$$

$$\dot{X}_1 = -\frac{X_1}{C_1 R_2} + \frac{Vi}{C_1 R_1}$$

Estimadores de Estado

Se plantea el modelo de cada una de las etapas y al final se agrupan los distintos modelos en serie.

<u>Etapa nº 2</u>



$$V_1 = I_3 R_3 + X_2 \quad ; \quad V_2 = -X_3$$

$$I_5 = \frac{X_2}{R_3} \quad ; \quad I_4 = \frac{X_2 + X_3}{R_4}$$

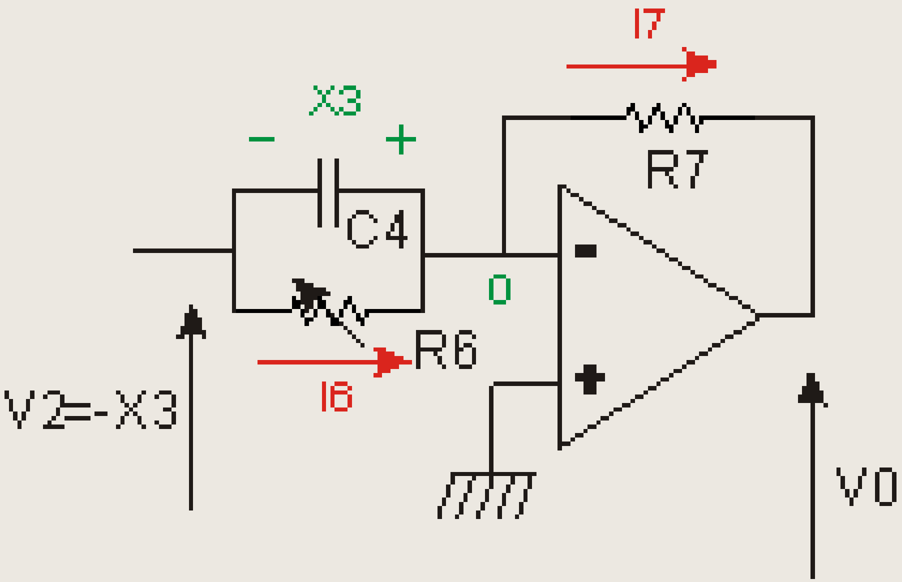
$$I_3 = I_{C2} + I_4 + I_5 = \dot{X}_2 C_2 + \frac{X_2}{R_5} + \frac{X_2 + X_3}{R_4}$$

$$V_1 = \dot{X}_2 C_2 R_3 + \frac{X_2 R_3}{R_5} + \frac{(X_2 + X_3) R_3}{R_4} + X_2$$

$$I_5 = \frac{X_2}{R_5} = I_{C3} = \dot{X}_3 C_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -\left(1 + \frac{R_3}{R_5} + \frac{R_3}{R_4}\right)\frac{X_2}{C_2 R_3} - \frac{X_3}{C_2 R_4} + \frac{V_1}{C_2 R_3} \\ \dot{X}_3 &= \frac{X_2}{C_3 R_5} \end{aligned}}$$

Etapa nº 3



$$I_6 = -\frac{X_3}{R_6}$$

$$I_7 = I_6 + I_{C4} = \frac{-X_3}{R_6} - \dot{X}_3 C_4$$

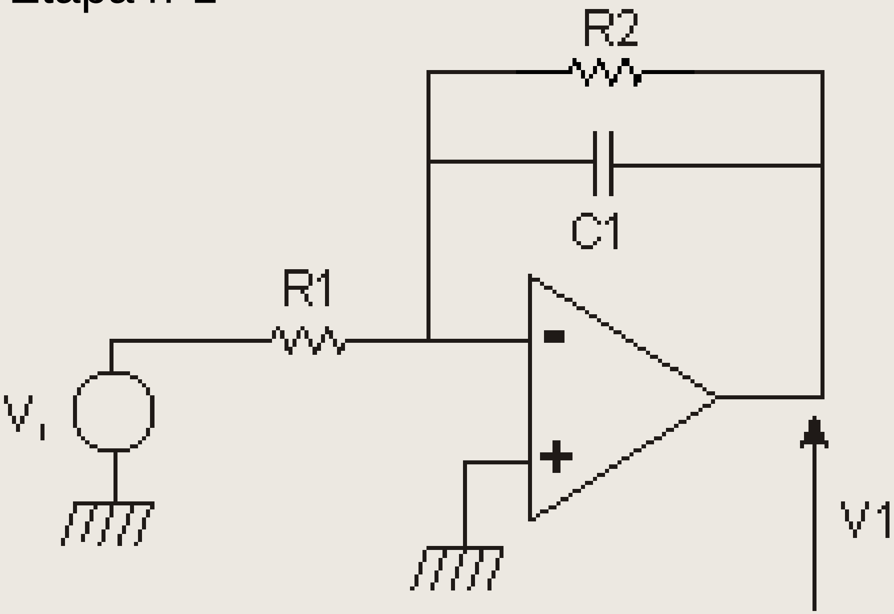
$$V_0 = -I_7 R_7 = \frac{R_7}{R_6} X_3 + \dot{X}_3 C_4 R_7$$

Reemplazando la derivada de X_3

$$\boxed{V_0 = \frac{C_4 R_7}{C_3 R_5} X_2 + \frac{R_7}{R_6} X_3}$$

Modelo Matricial

Etapa nº1



$$\left[\dot{X}_1\right]=\left[-\frac{1}{C_1R_2}\right]\cdot\left[X_1\right]+\left[\frac{1}{C_1R_1}\right]Vi$$

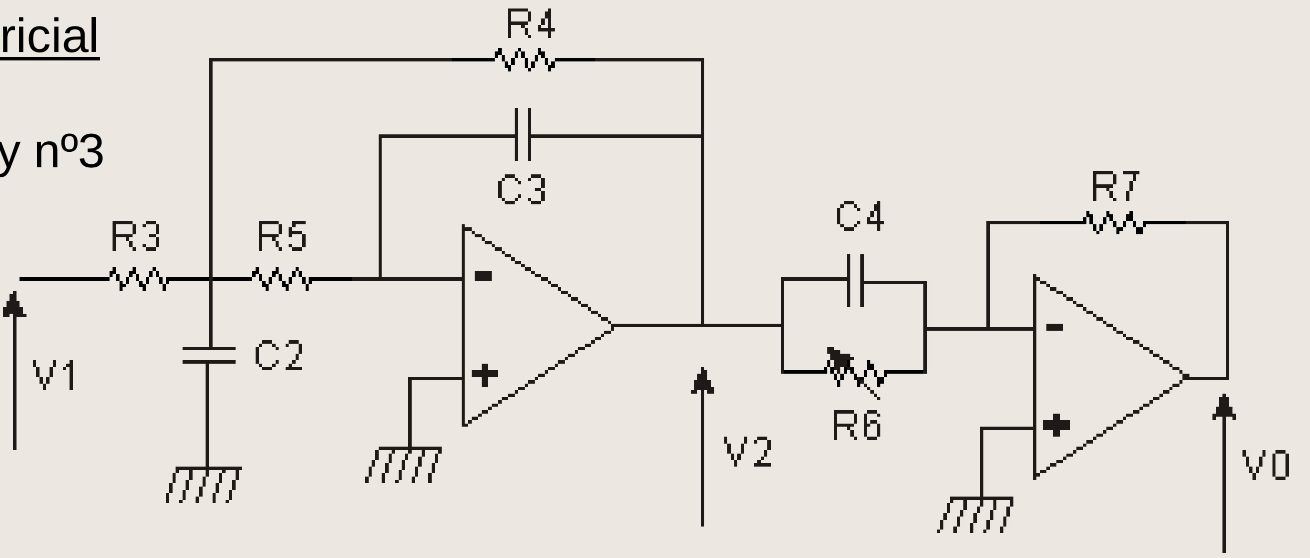
$$V_1=\left[-1\right]\cdot\left[X_1\right]$$

$$\frac{V_1}{V_i}=\frac{-1000}{\left(s+1000\right)}$$

Estimadores de Estado

<u>Modelo Matricial</u>

Etapas nº2 y nº3



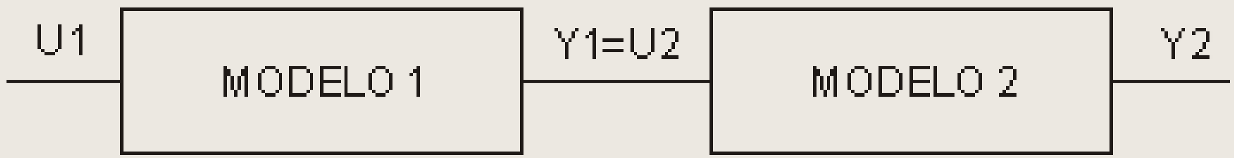
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_2R_3}\left(1+\dfrac{R_3}{R_5}+\dfrac{R_3}{R_4}\right) & -\dfrac{1}{C_2R_4} \\ \dfrac{1}{C_3R_5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_2R_3} \\ 0 \end{bmatrix} Vi \qquad V_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{C_4R_7}{C_3R_5} & \dfrac{R_7}{R_6} \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1219.5122\ (s+1000)}{(s+2871)(s+348.3)}$$

Estimadores de Estado

Modelo Matricial

El circuito completo resulta de conectar ambos modelos en serie.



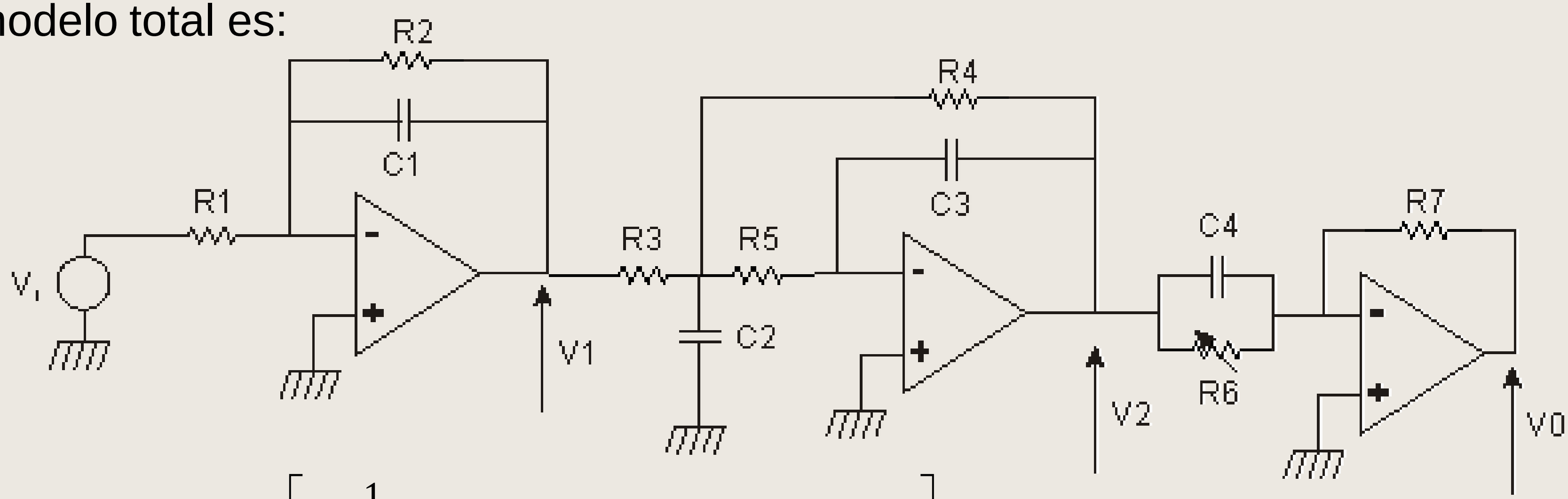
El modelo completo reunirá las variables de estado de las dos etapas y la relación entre ambos resulta de hacer que la salida del primer modelo sea la entrada del segundo.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_A \\ \dot{X}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A & 0 \\ B_B C_A & A_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_A \\ 0 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix}$$

Estimadores de Estado

El modelo total es:



$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C_1R_2} & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{C_2R_3} & -\dfrac{1}{C_2R_3}\left(1+\dfrac{R_3}{R_5}+\dfrac{R_3}{R_4}\right) & -\dfrac{1}{C_2R_4}\\ 0 & \dfrac{1}{C_3R_5} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\ X_{32}\\ X_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1R_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}Vi$$

$$V_0=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{C_4R_7}{C_3R_5} & \dfrac{R_7}{R_6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

Estimadores de Estado

Modelo Matricial

Reemplazando los valores de los componentes se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ -1219.5122 & -3219.5122 & -1000 \\ 0 & 1000 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Vi \quad ; \quad V_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Para el diseño del estimador se debe discretizar el modelo. El modelo discreto para un Ts=0.001 seg es:

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ X_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3678794 & 0 & 0 \\ -0.1435334 & -0.0329999 & -0.2573459 \\ -0.1703030 & 0.2573459 & 0.7955283 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.3212056 \\ -1.7030300 \\ -0.7905269 \end{bmatrix} Vi(k)$$

La matriz observabilidad del modelo discreto es:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.3138365 & 0.2243460 & 0.5381824 \\ -0.2393092 & 0.1310956 & 0.3704049 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{el rango de } V \text{ es } 2$$

Estimadores de Estado

Estimador de estado

Debido a que el rango de V es 2, hay una variable de estado que no es observable desde la salida V0.
Los autovalores del sistema son: $z_1 = 0.0566293 \quad z_2 = 0.3678794 \quad z_3 = 0.7058992$
Como todos los autovalores son estables, el sistema es DETECTABLE y se puede diseñar un estimador.
Para separar las variables observables y no observables se debe armar la matriz de transformación a partir de la matriz observabilidad

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.3138365 & 0.2243460 & 0.5381824 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}$$

Se deben encontrar valoes de t_1, t_2 y t_3 para que el rango de T sea 3.

Estimadores de Estado

Estimador de estado

Si la útima fila se forma con los dos primeros elementos cero se asegura el rango completo.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -0.3138365 & 0.2243460 & 0.5381824 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7148500 & -3.1863730 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula el modelo transformado con: $\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB \quad \bar{C} = CT^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1(k+1) \\ \bar{X}_2(k+1) \\ \bar{X}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0399746 & 0.7625284 & 0 \\ 0.1356048 & 0.5426489 & 0.3678794 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.4935569 \\ -2.4935569 \\ -0.7905269 \end{bmatrix} Vi \quad ; \quad V_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix}$$

Autovalor no observable

Estimadores de Estado

Estimador de estado

Las sub-matrices del modelo observable son:

$$A_O = A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0399746 & 0.7625284 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_O = C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices se calcula el vector del estimador para el sub- modelo observable. Se ubican los autovalores en $z_1 = 0 \quad z_2 = 0$ para una convergencia más rápida que la planta.

El vector Ho para el submodelo observable es:

$$H_O = \begin{bmatrix} 0.7625284 \\ 0.5414751 \end{bmatrix}$$

Se agrega la última fila y se transforma al modelo original:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0.7625284 \\ 0.5414751 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad H = T^{-1}H = \begin{bmatrix} -1.1802481 \\ 0.7625284 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estimadores de Estado

Estimador de estado

El modelo del estimador resulta:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(k+1) \\ \hat{X}_2(k+1) \\ \hat{X}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3678794 & 1.1802481 & 1.1802481 \\ -0.1435334 & -0.7955283 & -1.0198743 \\ -0.1703030 & 0.2573459 & 0.7955283 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_1(k) \\ \hat{X}_2(k) \\ \hat{X}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.4935569 \\ -2.4935569 \\ -0.7905269 \end{bmatrix} Vi(k) + \begin{bmatrix} -1.1802481 \\ 0.7625284 \\ 0 \end{bmatrix} V_0(k)$$

La variable no observable, en este caso, resultó ser X_3 . Sin embargo si se elijen otros elementos para completar la matriz T, es posible que esta variable cambie de posición,