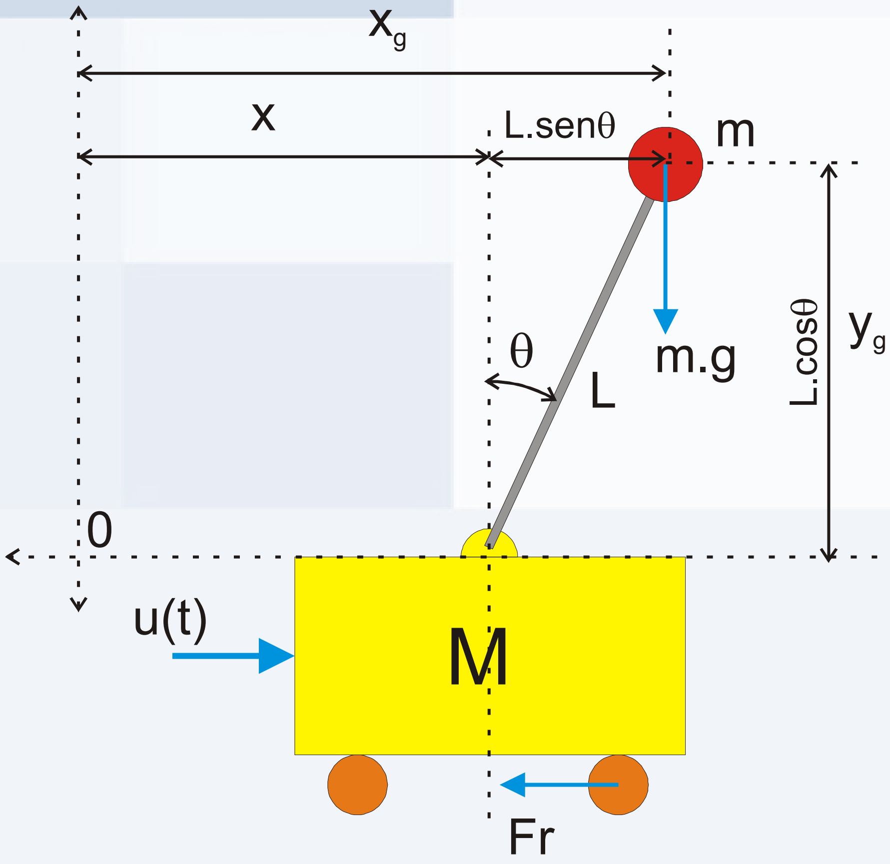
TEORÍA DE CONTROL

Realimentación de Estados

Péndulo Invertido

PÉNDULO INVERTIDO

El péndulo invertido es conocido por ser uno de los problemas más importantes y clásicos de la teoría de control. Se trata de un control inestable y no lineal. A menudo, es utilizado como ejemplo académico, principalmente por ser un sistema de control accesible, y por otro lado, permite mostrar las principales diferencias de control de lazo abierto y de su estabilización a lazo cerrado.

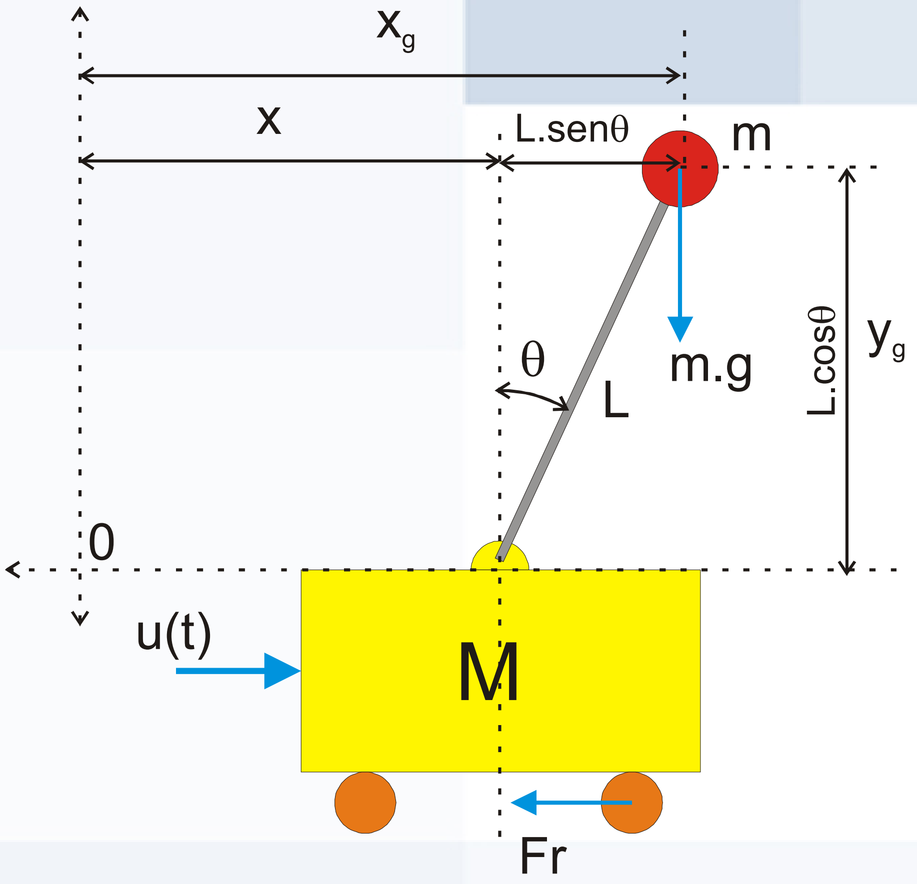


Se supone que la varilla no tiene masa, que la masa del carro es M y la masa en el extremo superior del péndulo invertido es m . Hay una fuerza externa, u(t), sobre el carrito en la dirección x, y una fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del péndulo en todo momento .

El sistema de coordenadas elegido se define en la figura, donde x (t) representa la posición del carro y θ(t) es el ángulo de inclinación que se mide respecto de la dirección vertical.

PÉNDULO INVERTIDO

ECUACIONES BÁSICAS



$$(M+m)\cdot\ddot{x}+m\cdot L\cdot\ddot{\theta}\cdot\cos\theta-m\cdot L\cdot\dot{\theta}^2\cdot\operatorname{sen}\theta+B\cdot\dot{x}=u \qquad (1)$$

$$(J+m\cdot L^2)\cdot\ddot{\theta}=m\cdot L\cdot g\cdot\operatorname{sen}\theta-m\cdot L\cdot\ddot{x}\cdot\cos\theta \qquad (2)$$

PÉNDULO INVERTIDO

MODELO DE ESTADO

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene el modelo de estado.

Las variables de estado son : $x_1 = x\ ,\ x_2 = \dot{x}\ ,\ x_3 = \theta \text{ y } x_4 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{m^2 \cdot L^2 \cdot g \cdot \operatorname{sen} x_3 \cdot \cos x_3 - (J + m \cdot L^2)(m \cdot L \cdot x_4^2 \cdot \operatorname{sen} x_3 - B \cdot x_2 + u)}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{m \cdot L \cdot \cos x_3 \left[B \cdot x_2 - m \cdot L \cdot x_4^2 \operatorname{sen} x_3 + u \right] - g \cdot (m + M) \cdot \operatorname{sen} x_3}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \end{cases}$$

Considerando un punto de equilibrio en donde el carro se encuentra detenido en el origen de coordenadas y la barra se encuentra en la posición vertical, se halla el modelo lineal.

PÉNDULO INVERTIDO

MODELO DE ESTADO LINEAL

$$\dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{B(J+m\cdot L^2)}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} & -\dfrac{m^2\cdot g\cdot L^2}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{m\cdot L\cdot B}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} & \dfrac{m\cdot g\cdot L\cdot(M+m)}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J+m\cdot L^2}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} \\ 0 \\ -\dfrac{m\cdot L}{J\cdot(M+m)+m\cdot M\cdot L^2} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^*(t)$$

Considerando los siguientes valores M = 0.5 Kg; m = 0.2 Kg; B = 0.1 N.m/s; J = 0.006 N.m/s^2; g = 9.8 m/s^2 y L = 0.3 m.

$$\dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & -2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ -4.545 \end{bmatrix} u^*(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^*(t)$$

PÉNDULO INVERTIDO

MODELO DE ESTADO LINEAL

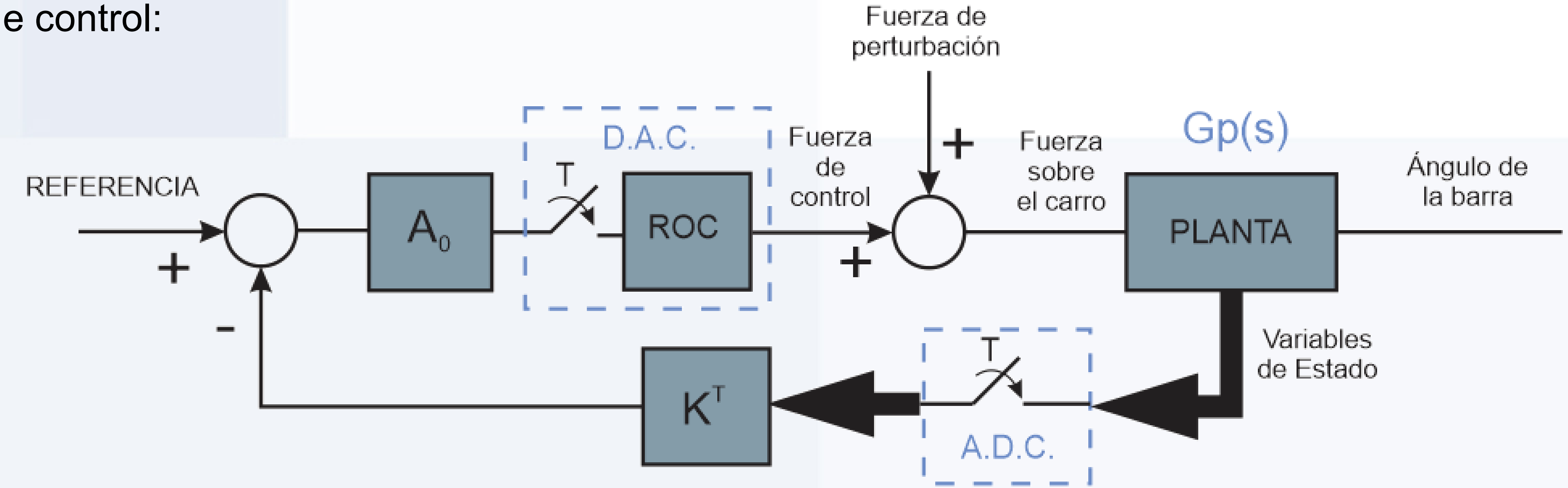
La función de transferencia del ángulo de inclinación es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-4.5455s}{(s-5.565)\ (s+5.604)\ (s+0.1428)}$$

Como puede verse el sistema es inestable

DISEÑO

Se va a diseñar un control, por realimentación de estados, para mantener la barra del péndulo en posición vertical. Se considera en el diseño, una perturbación en la fuerza aplicada sobre el carro.Se plantea para ello el siguiente esquema de control:



PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO

Se va a utilizar una plataforma digital que muestrea a una frecuencia de 50 Hz.
A partir de estos datos se calcula el modelo de estado discreto de la planta linealizada:

$$\dot{x}^*(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0199637 & -0.0005345 & -0.0000036\\ 0 & 0.9963686 & -0.0534685 & -0.0005345\\ 0 & 0.0000909 & 0.0000909 & 0.0200416\\ 0 & 0.0090933 & 0.6246904 & 1.0062412\end{bmatrix}x^*(k)+\begin{bmatrix}0.0003633\\ 0.0363138\\ -0.0363138\\ -0.0909329\end{bmatrix}u^*(k)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x^*(k)$$

Los autovalores discretos son: z1=1, z2=1.1177326, z3=0.9971474 y z4=0.8939711. Vemos que aparece un autovalor inestable.
La matriz controlabilidad es:

$$U=\begin{bmatrix}0.0003633 & 0.001089 & 0.0018151 & 0.0025434\\ 0.0363138 & 0.0362791 & 0.0363426 & 0.0365059\\ -0.0009089 & -0.0027337 & -0.0045861 & -0.0064891\\ -0.0909329 & -0.091738 & -0.0936884 & -0.0968076\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}\left[U\right]=4$$

El sistema lineal es Controlable

PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO

Se va a diseñar un control tal que los autovalores dominantes den una respuesta al escalón con un sobrepico máximo del 10 % y un tiempo de establecimiento de 3 segundos.

$$SP = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.1 \Rightarrow \xi = 0.59 \qquad Ts = \frac{4}{\xi\ \omega_n} = 3 \text{ seg.} \Rightarrow \omega_n = 2.2555 \text{ r/s}$$

Los autovalores dominantes resultan: $s_{1,2} = -1.33 \pm j1.819$

Se ubican los autovalores restantes a 5 y 10 veces de l parte real de los dominantes:

$$s_3 = -6.66 \text{ r/s} \qquad s_4 = -13.3 \text{ r/s}$$

Transformando estas raíces al plano Z, resultan:

$$z_{1,2} = 0.973 \pm j0.0354 \qquad z_3 = 0.87517 \qquad z_4 = 0.7659283$$

El vector de realimentación que reasigna los autovalores de lazo cerrado a esta posiciones es:

$$K^T = \begin{bmatrix} -8.128347 & -6.2770993 & -36.715209 & -6.8093405 \end{bmatrix}$$

Puede verse que los signos de las ganancias son todos negativos lo que resulta en una realimentación positiva.

PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO

Se va a analizar el resultado del control desde el punto de vista de la estabilidad mediante diagramas de Bode y Nyquist. Para ello debo calcular la transferencia de lazo abierto:

$$GH(z) = k^T \left[zI - A\right]^{-1} B = \frac{k^T \,\mathrm{Adj}\left[zI - A\right] B}{\det\left(zI - A\right)}$$

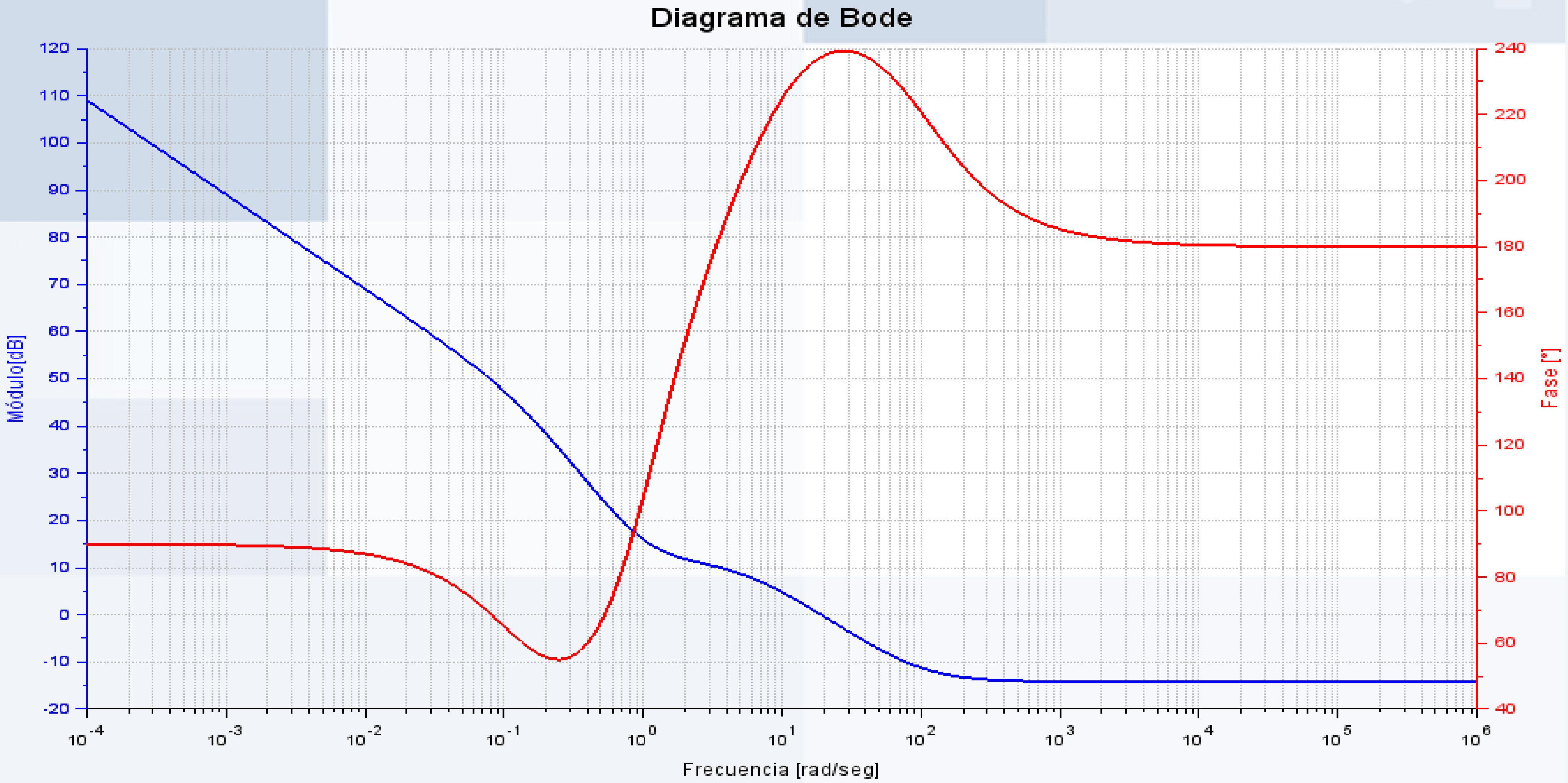
$$GH(z) = \frac{0.421667(z-0.888871)(z^2 - 1.96156z + 0.962798)}{(z-1.11773)(z-1)(z-0.997147)(z-0.893971)}$$

Para analizar la estabilidad por diagramas de Bode y Nyquist se debe aplicar la transformación bilineal.

$$GH(w) = \frac{-0.195099(w-100)(w+5.88334)(w^2 + 1.89593w + 3.14791)}{w(w-5.55937)(w+0.142832)(w+5.59823)}$$

PÉNDULO INVERTIDO

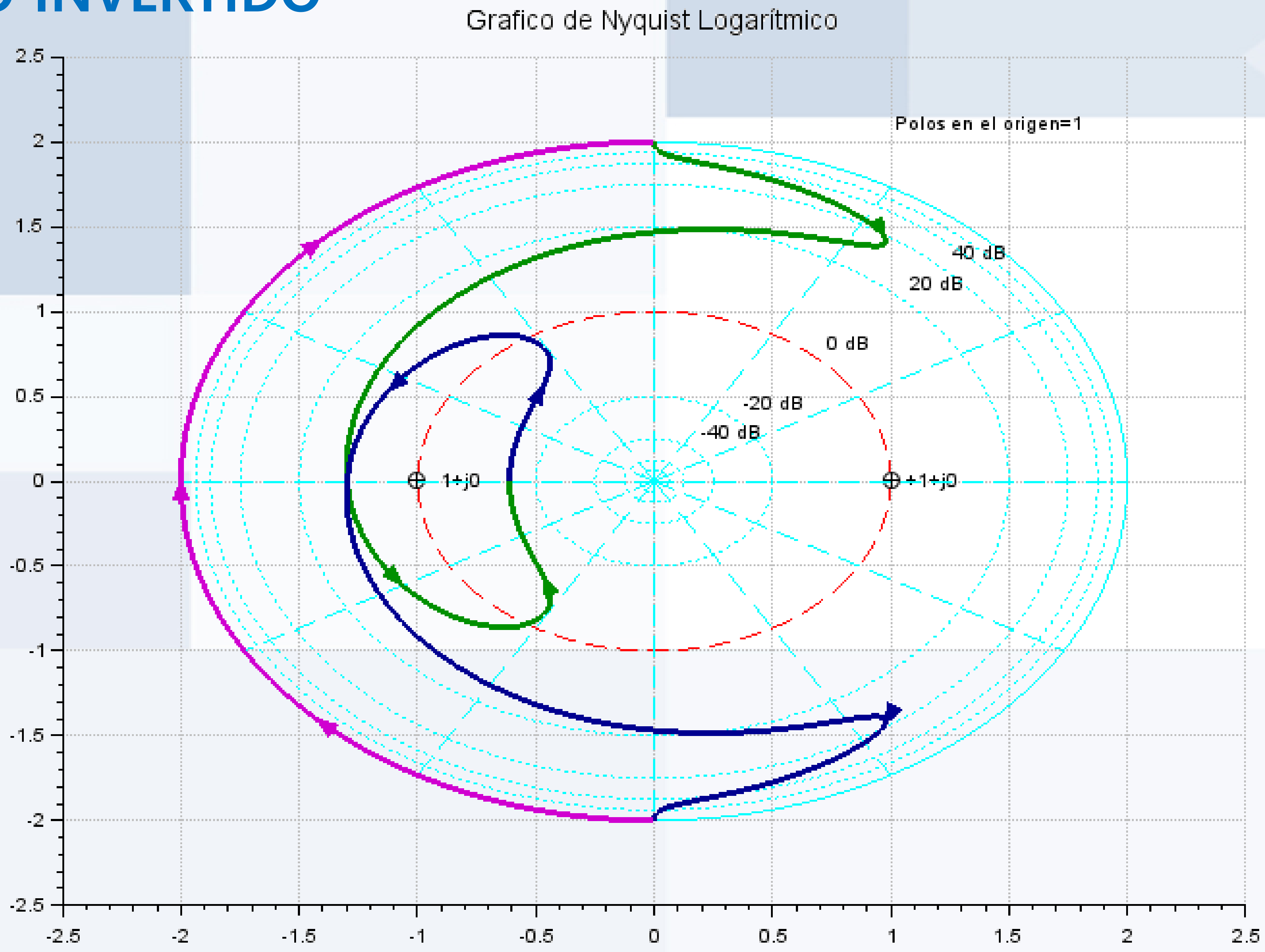
DISEÑO



No resulta sencillo analizar la estabilidad con este diagrama, se va a graficar el diagrama de Nyquist.

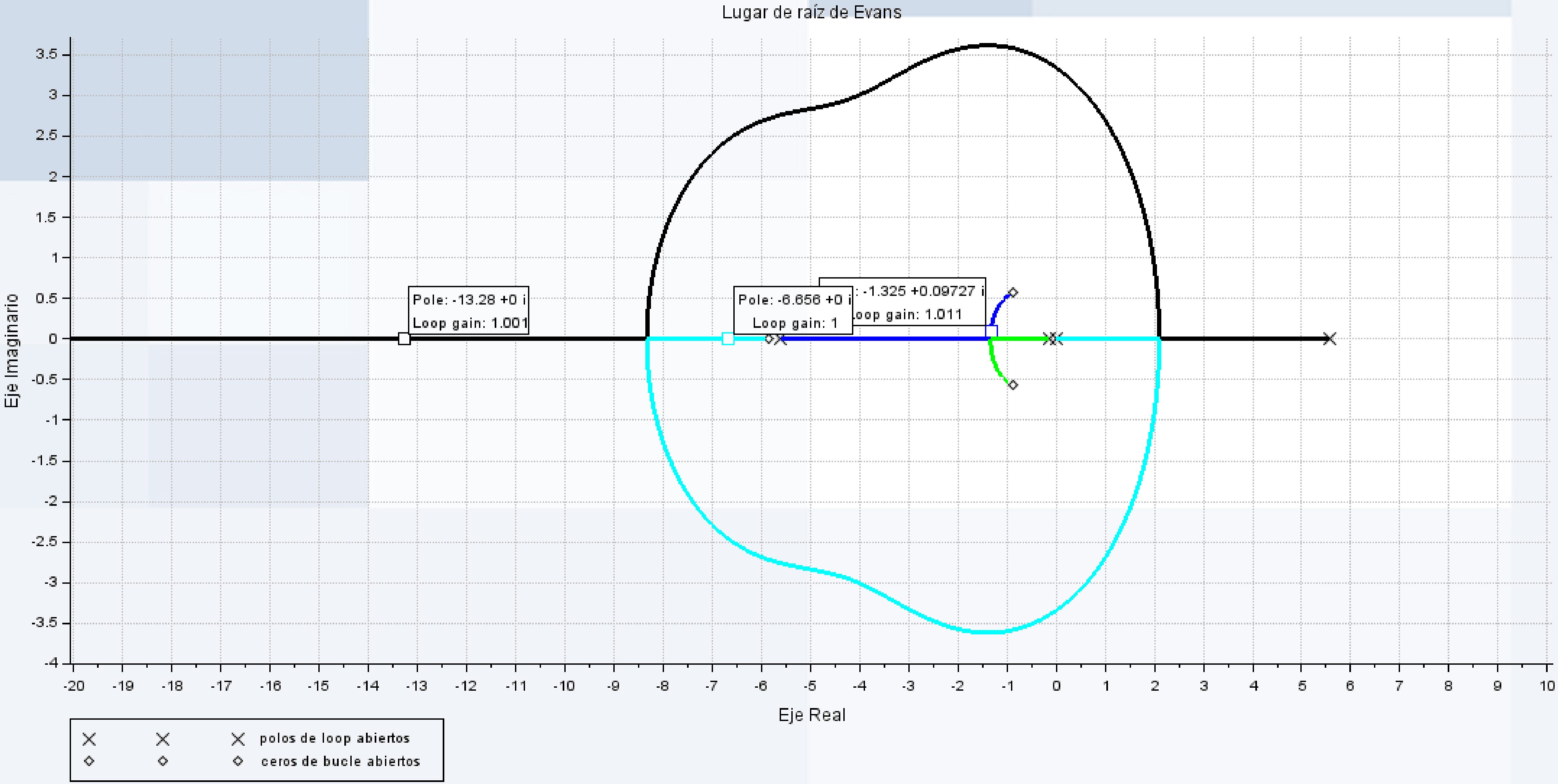
PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO



PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO



PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO

Simulación del Péndulo Invertido