

Relación entre el MF y el amortiguamiento de un sistema.

Es bastante frecuente utilizar el Margen de Fase (MF), como uno de los parámetros importantes, en el análisis y diseño de sistemas de control. Para los sistemas continuos y LTI (en general simples), es muy común el uso de los diagramas de Bode para realizar los diseños. En la tarea de diseño, muchas veces se presenta la necesidad de conocer el margen de fase en función del coeficiente de amortiguamiento de un sistema, o bien determinar el coeficiente de amortiguamiento que resulta de un dado margen de fase. Así, cuando se está diseñando un sistema con el gráfico de Bode, se tiene una idea cabal del MF, pero el proyectista desearía tener la misma idea sobre el coeficiente de amortiguamiento (ξ), pero no la tiene.

Una práctica frecuente, es diseñar el sistema de control, para que su respuesta a lazo cerrado se aproxime a un sistema subamortiguado de segundo orden ($0 < \xi < 1$). Esta situación lleva a que el sistema a lazo cerrado, tenga dos polos complejos dominando la respuesta ya sea un sistema de segundo orden ($n=2$) o de orden mayor a dos ($n>2$).

Debido a la consideración de diseño mencionada anteriormente, es muy útil para facilitar los trabajos de diseño, considerar sistemas dominantes de orden $n=2$ con polos complejos conjugados.

Cuando se utiliza diagrama de Bode para el análisis o diseño de sistemas de lazo cerrado, la condición de MF para valores entre 0° y 90° se da generalmente acompañada de transiciones en la pendiente de la ganancia de 20 dB/dec. a 40 dB/dec. o viceversa. Esta condición que se produce para valores de ganancia cercanos a 1, permite realizar una simplificación de la transferencia de lazo abierto que permite analizar la respuesta transitoria a lazo cerrado.

A continuación se analizan dos casos relevantes.

Sistema de segundo orden

En la Figura 1 se muestra un sistema de control de segundo orden representativo de aquellos sistemas en los cuales la pendiente de la ganancia para valores cercanos a 0 db pasa de 20 dB/dec. a 40 dB/dec. .

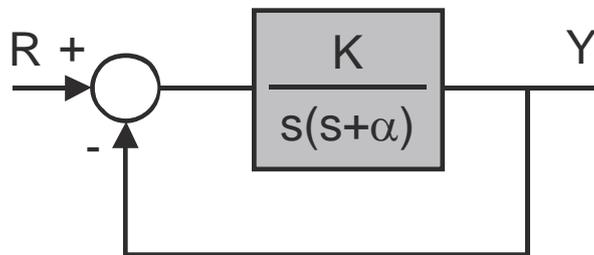


Figura 1

La transferencia a lazo cerrado del sistema mostrado en la Figura 1 está dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + \alpha s + K} \quad (1)$$

El coeficiente α en la ecuación (1), es muy frecuente asociarlo con el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema, de la siguiente manera:

$$K = \omega_n^2 \quad \text{y} \quad \alpha = 2\xi\omega_n \quad (2)$$

Reemplazando en la función de transferencia, resulta:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

Se va a analizar el margen de fase que resulta del sistema de la Figura 1, para distintos valores de ξ ($0 < \xi < 1$).

Para calcular el MF se utiliza la transferencia de lazo abierto:
$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (4)$$

Para independizar el análisis de la frecuencia natural se realiza una normalización de la frecuencia: $\bar{s} = \frac{s}{\omega_n}$.

$$\text{Entonces queda: } GH(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}(\bar{s} + 2\xi)} \quad (5)$$

Para calcular el MF se debe determinar la frecuencia a la cual la transferencia de lazo abierto tiene un módulo igual a 1. Reemplazando $\bar{s} = j\omega$ y calculando el módulo de la transferencia queda:

$$|GH(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\xi^2}} = 1 \quad (6)$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que la frecuencia a la cual ocurre el margen de fase es:

$$\omega_{MF} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \quad (7)$$

$$\text{Ahora la fase a esta frecuencia será: } \Phi(\omega_{MF}) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left[\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}{2\xi} \right]. \quad (8)$$

$$\text{El margen de fase es: } MF = \pi - \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left[\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}{2\xi} \right]. \quad (9)$$

$$\text{Aplicando propiedades trigonométricas, se llega a } MF = \text{arctg} \left[\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}} \right]. \quad (10)$$

$$\left\{ \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - MF \right) = \frac{1}{\text{tg}(MF)} \right.$$

Entonces se puede calcular la siguiente tabla:

amortiguamiento	MF(rad)	MF(°)
0,05	0,100	5,725
0,1	0,199	11,421
0,15	0,298	17,057
0,2	0,394	22,602
0,25	0,489	28,020
0,3	0,581	33,272
0,35	0,669	38,319
0,4	0,753	43,118
0,45	0,831	47,631
0,5	0,905	51,827
0,55	0,972	55,683
0,6	1,033	59,187
0,65	1,088	62,341
0,7	1,137	65,156
0,75	1,181	67,654
0,8	1,219	69,860
0,85	1,253	71,803
0,9	1,283	73,514
0,95	1,309	75,019
1	1,332	76,345

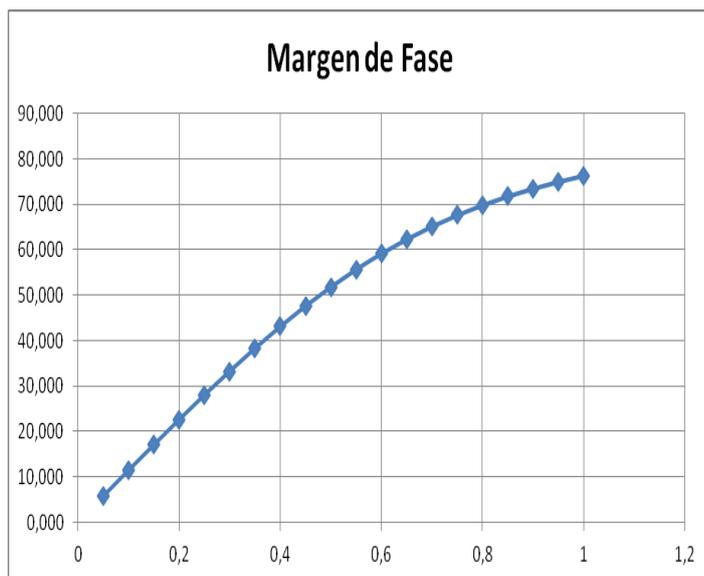


Figura 2

Tabla 1

Se ve en la Figura 2 que la relación es prácticamente lineal para valores de margen de fase menores a 60° . Para estos valores se cumple que: $\xi \approx \frac{MF}{100}$.

Respuesta transitoria

Si se calcula la expresión de la respuesta transitoria de la transferencia de lazo cerrado (3) para una entrada en forma de escalón con ($0 < \xi < 1$), resulta:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (t \geq 0) \quad (11)$$

para distintos coeficientes de amortiguamiento se obtienen las respuestas de la Figura 4:

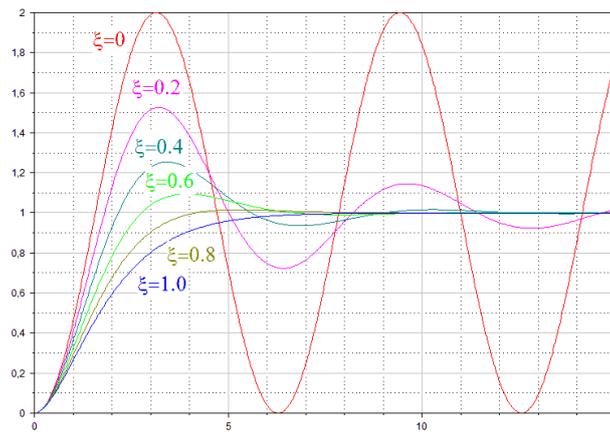


Figura 4

El tiempo correspondiente al sobrepico T_p se puede calcular derivando la expresión de la salida e igualando a cero.

$$\frac{d}{dt} y(t) = 0 \quad (12)$$

Esta condición tiene el primer máximo en: $T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ y el valor de la salida para este instante

$$\text{es: } y_{\max} = 1 - e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (13)$$

$$\text{El sobrepico porcentual se calcula como: } SP [\%] = 100 e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (14)$$

Ahora se puede encontrar una relación entre el margen de fase y el sobrepico de la respuesta transitoria.

MF(°)	sobrepico(%)
5,725	85,447
11,421	72,925
17,057	62,087
22,602	52,662
28,020	44,434
33,272	37,233
38,319	30,919
43,118	25,383
47,631	20,535
51,827	16,303
55,683	12,632
59,187	9,478
62,341	6,808
65,156	4,599
67,654	2,838
69,860	1,516
71,803	0,629
73,514	0,152
75,019	0,007
76,345	0,000

Tabla 3

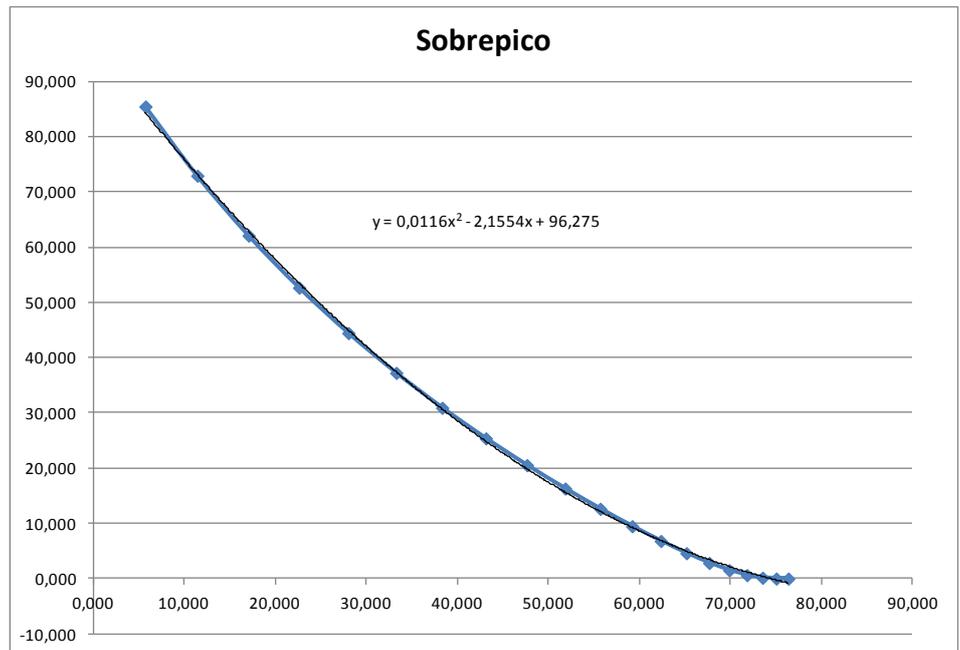


Figura 5

Sistema de segundo orden con cero.

En la Figura 6 se muestra un sistema de control de segundo orden representativo de aquellos sistemas en los cuales la pendiente de la ganancia para valores cercanos a 0 db pasa de 40 dB/dec. a 20 dB/dec.

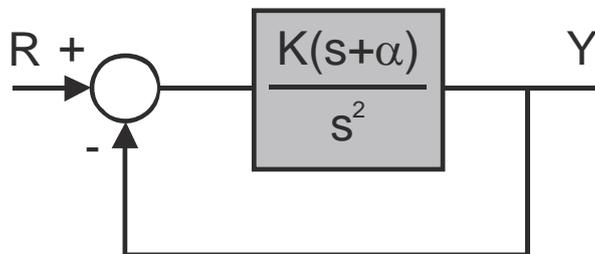


Figura 6

La transferencia a lazo cerrado del sistema mostrado en la figura 1 está dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K(s+\alpha)}{s^2 + Ks + K\alpha} \quad (15)$$

El coeficiente K en la ecuación (15), es muy frecuente asociarlo con el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema, de la siguiente manera:

$$K = 2\xi\omega_n \quad \text{y} \quad K\alpha = \omega_n^2 \quad (16)$$

Reemplazando en la función de transferencia, resulta:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17)$$

Se va a analizar el margen de fase que resulta del sistema de la Figura 6, para distintos valores de ξ ($0 < \xi < 1$).

Para calcular el MF se utiliza la transferencia de lazo abierto: $GH(s) = \frac{(2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2} \quad (18)$

Para independizar el análisis de la frecuencia natural se realiza una normalización de la frecuencia: $\bar{s} = \frac{s}{\omega_n}$.

$$\text{Entonces queda: } GH(\bar{s}) = \frac{(2\xi\bar{s} + 1)}{\bar{s}^2} \quad (19)$$

Para calcular el MF se debe determinar la frecuencia a la cual la transferencia de lazo abierto tiene un módulo igual a 1. Reemplazando $\bar{s} = j\omega$ y calculando el módulo de la transferencia

$$\text{queda: } |GH(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2\omega^2}}{\omega^2} = 1 \quad (20)$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que la frecuencia a la cual ocurre el margen de fase es:

$$\omega_{MF} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} + 2\xi^2} \quad (21)$$

$$\text{Ahora la fase a esta frecuencia será: } \Phi(\omega_{MF}) = -\pi + \arctg \left[2\xi\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} + 2\xi^2} \right]. \quad (22)$$

$$\text{El margen de fase es: } MF = \pi - \pi + \arctg \left[2\xi\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} + 2\xi^2} \right]. \quad (23)$$

$$\text{Finalmente se llega a: } MF = \arctg \left[2\xi\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} + 2\xi^2} \right]. \quad (24)$$

Entonces se puede calcular la siguiente tabla:

SUBAMORTIGUADO			SOBREAMORTIGUADO		
amortiguamiento	MF(rad)	MF(°)	amortiguamiento	MF(rad)	MF(°)
0,05	0,100	5,725	1,05	1,353	77,516
0,1	0,199	11,421	1,1	1,371	78,552
0,15	0,298	17,057	1,15	1,387	79,472
0,2	0,394	22,602	1,2	1,401	80,289
0,25	0,489	28,020	1,25	1,414	81,019
0,3	0,581	33,272	1,3	1,425	81,673
0,35	0,669	38,319	1,35	1,436	82,260
0,4	0,753	43,118	1,4	1,445	82,788
0,45	0,831	47,631	1,45	1,453	83,265
0,5	0,905	51,827	1,5	1,461	83,698
0,55	0,972	55,683	1,55	1,468	84,091
0,6	1,033	59,187	1,6	1,474	84,448
0,65	1,088	62,341	1,65	1,480	84,775
0,7	1,137	65,156	1,7	1,485	85,074
0,75	1,181	67,654	1,75	1,490	85,348
0,8	1,219	69,860	1,8	1,494	85,601
0,85	1,253	71,803	1,85	1,498	85,833
0,9	1,283	73,514	1,9	1,502	86,048
0,95	1,309	75,019	1,95	1,505	86,246
1	1,332	76,345	2	1,508	86,431

Tabla 4

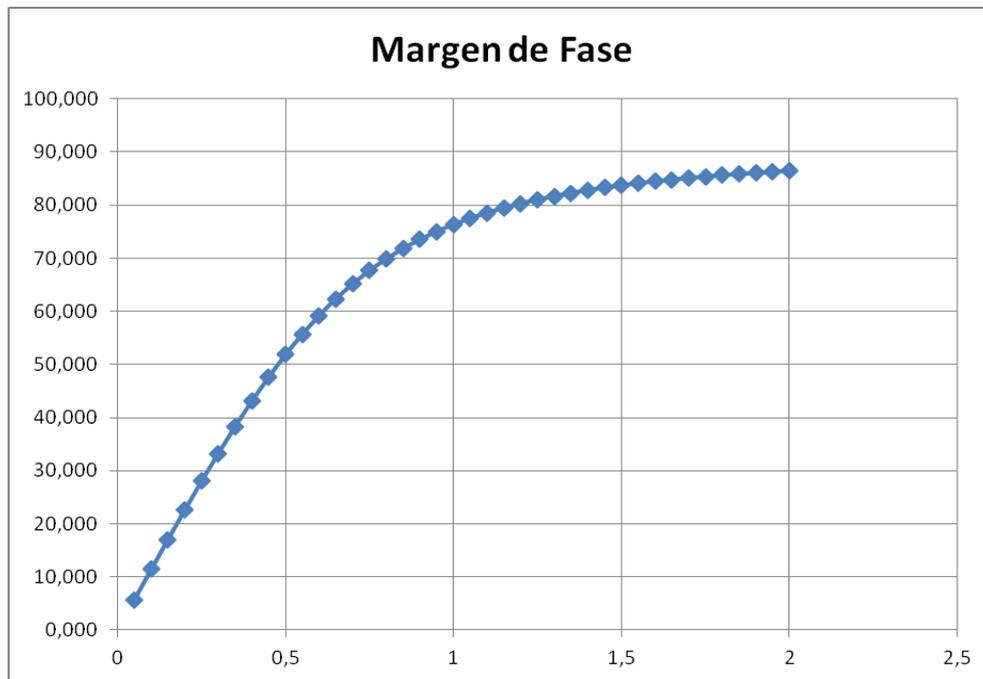


Figura 7

Se ve en la Figura 7 que, como en el caso anterior, la relación es prácticamente lineal para valores de margen de fase menores a 60°. Para estos valores se también se cumple que:

$$\xi \approx \frac{MF}{100}.$$

Respuesta transitoria

Si se calcula la expresión de la respuesta transitoria de la transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

para una entrada en forma de escalón con ($0 < \xi < 1$), resulta:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (t \geq 0) \quad (25)$$

En el caso de tener una transferencia de lazo cerrado como la expresada en (17) la respuesta transitoria difiere de la analizada en el punto anterior.

La transferencia de lazo cerrado se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \left(\frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right) \quad (26)$$

Ahora la respuesta transitoria para una entrada en escalón resulta como suma de las respuestas de cada uno de los términos de la transferencia. Para el primer término se obtiene una respuesta como la expresada en (25). El segundo término tiene una forma similar salvo por que se encuentra multiplicado por s, este factor determina que la respuesta de este término es proporcional a la derivada de (25).

Por lo tanto la respuesta temporal, para una entrada en escalón, puede ser expresada de la siguiente forma:

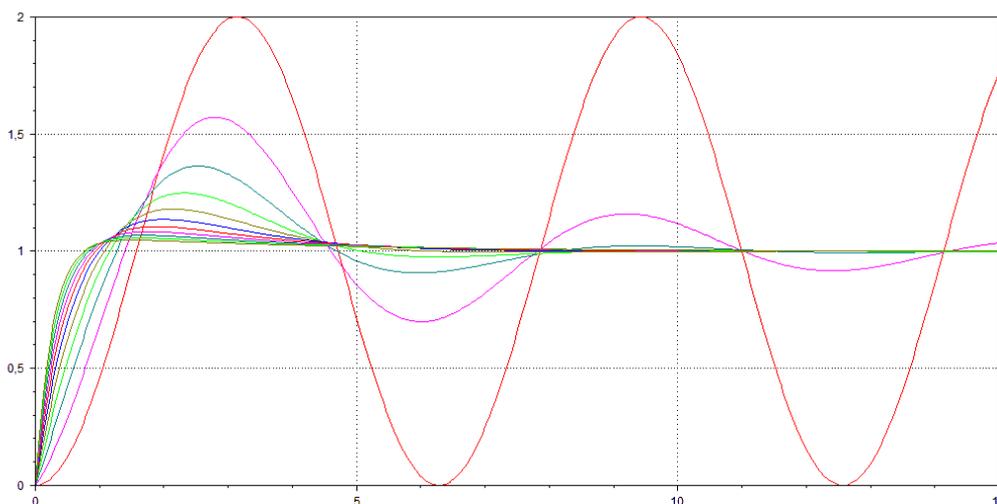
$$y(t) = c(t) + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot \frac{d c(t)}{dt} \quad (27)$$

La respuesta transitoria en este caso resulta mucho más compleja.

Considerando la frecuencia normalizada se analiza la respuesta para valores de ξ entre 0 y 2.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(2\xi\bar{s} + 1)}{\bar{s}^2 + 2\xi\omega_n\bar{s} + 1} \quad (28)$$

En la Figura 8 se muestra la respuesta de para una entrada en escalón de la transferencia (28).



Las expresiones que permiten calcular el sobrepico para este tipo de sistemas no resultan tan sencillas de obtener como las del caso anterior, por lo tanto se recurrirá a un procedimiento de cálculo para determinar el mismo.

A partir de los cálculos se puede realizar la siguiente tabla:

MF(°)	sobrepico(%)	MF(°)	sobrepico(%)
5,725	85,9	77,516	12,7
11,421	74,4	78,552	11,9
17,057	65,0	79,472	11,2
22,602	57,2	80,289	10,5
28,020	50,6	81,019	9,9
33,272	45,1	81,673	9,4
38,319	40,4	82,260	8,9
43,118	36,4	82,788	8,4
47,631	32,9	83,265	8,0
51,827	29,8	83,698	7,6
55,683	27,2	84,091	7,2
59,187	24,9	84,448	6,8
62,341	22,8	84,775	6,5
65,156	21,0	85,074	6,2
67,654	19,4	85,348	5,9
69,860	18,0	85,601	5,7
71,803	16,7	85,833	5,4
73,514	15,5	86,048	5,2
75,019	14,5	86,246	5,0
76,345	13,5	86,431	4,8

Tabla 5

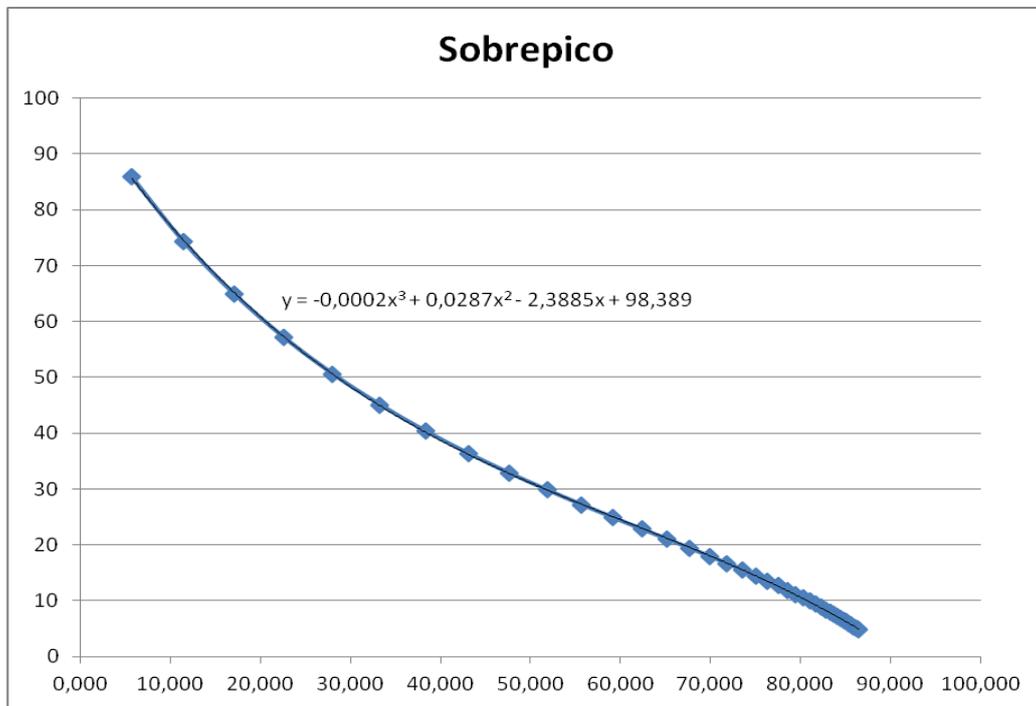


Figura 8

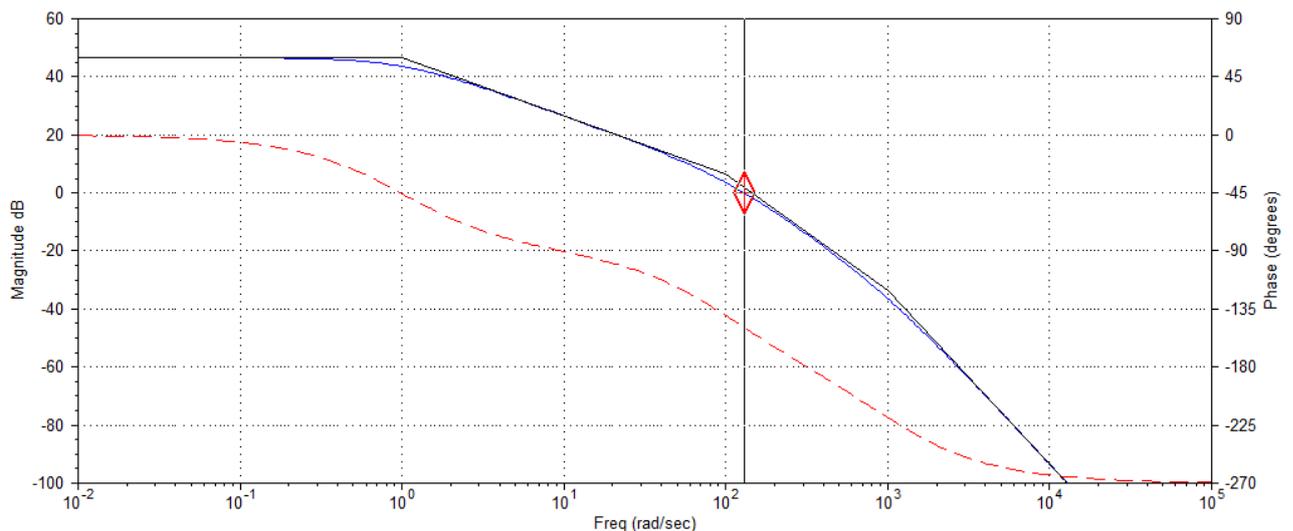
Ejemplos:

Se van a analizar un par de ejemplos para validar los resultados.

Ejemplo 1:

Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya transferencia en la cadena de avance es:

$$G(s) = \frac{21.3 \times 10^6}{(s+1)(s+100)(s+1000)}$$



*At $\omega=129,3$ r/s, Phase margin= 30,81 deg, Delay margin= 0,00416 sec
 At $\omega=318$ r/s, Gain margin= 5,22 (14,36 dB)

El sistema en las cercanías de 0 dB tiene una transición de 1 a 2 pendientes en la ganancia.

El margen de fase es de aproximadamente 30° .

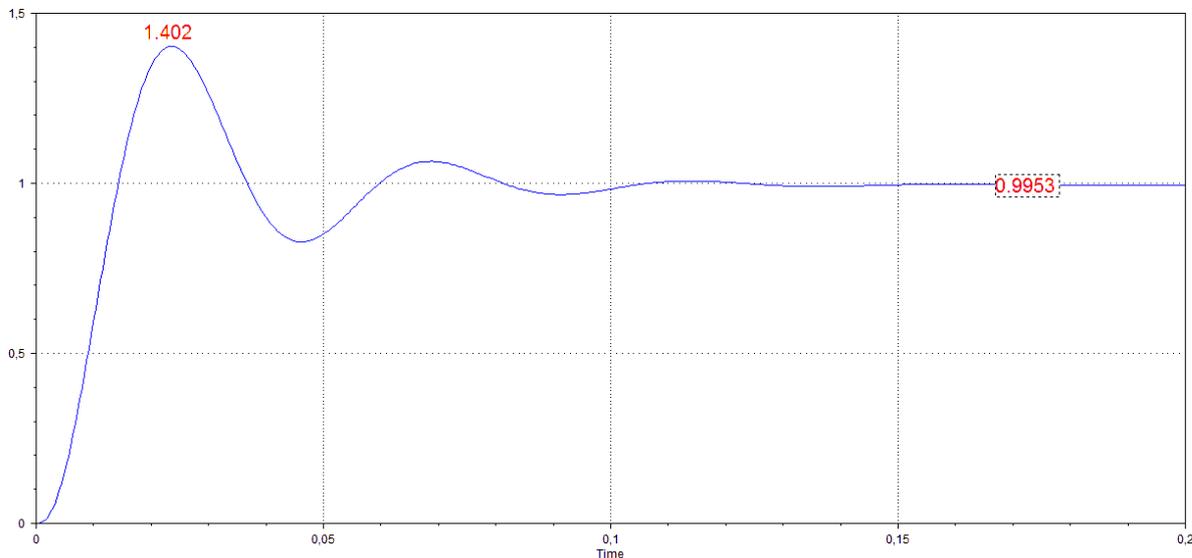
Según el análisis realizado la respuesta del sistema a lazo cerrado para una entrada en escalón debería tener un sobrepico de aproximadamente un 42%.

La transferencia de lazo cerrado es:

$$G_{LC}(s) = \frac{21.3 \times 10^6}{s^3 + 1101s^2 + 1.011 \times 10^5 s + 2.14 \times 10^7}$$

La respuesta para una entrada en escalón es:

$$y(t) = 0.9953 - 1.065 \cdot \cos(139.2t - 0.4151) \cdot e^{-39.2t} - 0.02112 \cdot e^{-1023t}$$

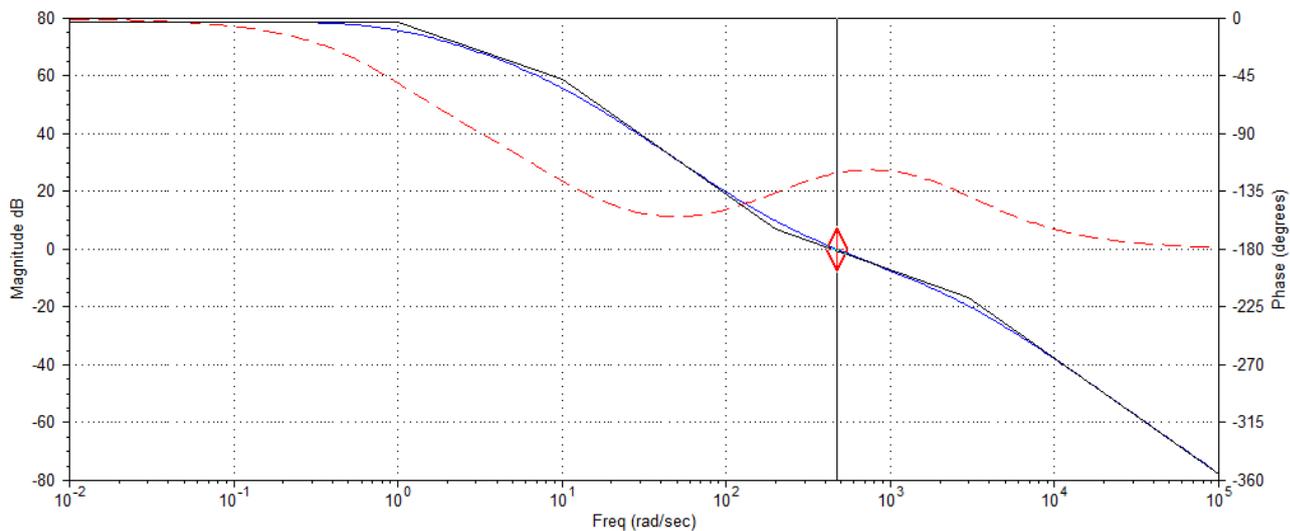


El sobrepico es: $SP(\%) = \frac{(\text{valor pico}) - (\text{valor final})}{(\text{valor final})} = \frac{1.402 - 0.9953}{0.9953} = 40.8\%$

Ejemplo 2:

Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya transferencia en la cadena de avance es:

$$G(s) = \frac{1.32 \times 10^6 (s + 200)}{(s + 1)(s + 10)(s + 3000)}$$



*At $\omega = 472$ rad/s, Phase margin = 59.43 deg, Delay margin = 0.0022 sec
No gain margin found

El sistema en las cercanías de 0 dB tiene una transición de 2 a 1 pendiente en la ganancia.

El margen de fase es de aproximadamente 60° .

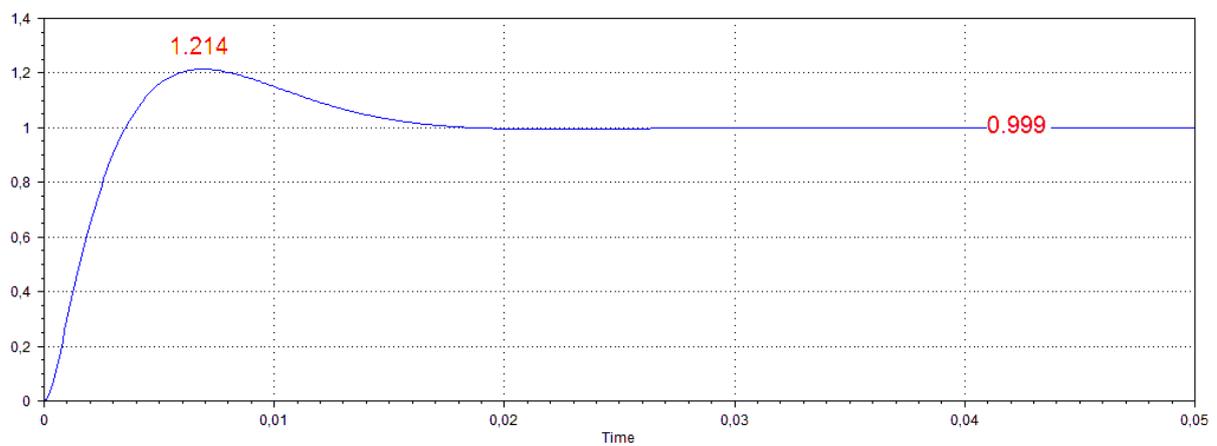
Según el análisis realizado la respuesta del sistema a lazo cerrado para una entrada en escalón debería tener un sobrepico de aproximadamente un 23%.

La transferencia de lazo cerrado es:

$$G_{LC}(s) = \frac{1.32 \times 10^6 (s + 200)}{s^3 + 3011s^2 + 1.353 \times 10^6 s + 2.64 \times 10^6}$$

La respuesta para una entrada en escalón es:

$$y(t) = 0.9999 + 1.837 \cdot \text{sen}(208.4t - 0.7369) \cdot e^{-248.1t} + 0.2345 \cdot e^{-2515t}$$



El sobrepico es: $SP(\%) = \frac{(\text{valor pico}) - (\text{valor final})}{(\text{valor final})} = \frac{1.214 - 0.999}{0.999} = 21.5\%$
