

TEORÍA DE CONTROL

MODELO DE ESTADO

MODELO DE ESTADO

Definiciones: (Ogata)

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas **variables de estado**) de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x . Tal vector se denomina **vector de estado**.

Espacio de estados. El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , el eje x_2 , . . . , el eje x_n , se denomina **espacio de estados**. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados



MODELO DE ESTADO

Ecuaciones en el espacio de estados.

En el análisis en el espacio de estados, existen tres tipos de variables :

- variables de entrada,
- variables de salida y
- variables de estado.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \end{cases} \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \\ \dots \\ y_p(t) = g_p(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r, t) \end{cases} \quad y(t) = g(x, u, t)$$



MODELO DE ESTADO

Sistemas lineales.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r \end{cases} \quad \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

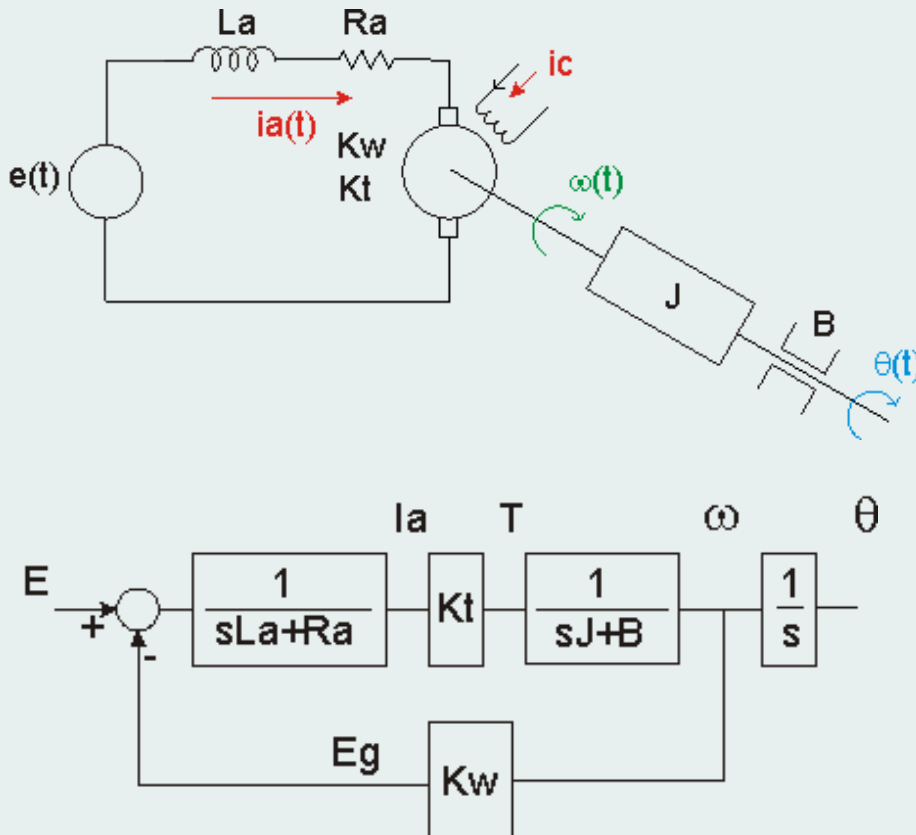
$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1r}u_r \\ y_2(t) = c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \dots + d_{2r}u_r \\ \dots \\ y_n(t) = c_{n1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{dp1}u_1 + \dots + d_{pr}u_r \end{cases} \quad y(t) = C x(t) + D u(t)$$



MODELO DE ESTADO

Elección de las Variables de Estado

EJEMPLO 1



Se consideran condiciones iniciales nulas para las variables.

$$I_a = \frac{E - K_w \omega}{s L_a + R_a}$$

$$\dot{I}_a L_a + I_a R_a = E - K_w \omega$$

$$\dot{I}_a = -I_a \frac{R_a}{L_a} - \omega \frac{K_w}{L_a} + \frac{E}{L_a}$$

$$\omega = \frac{K_t I_a}{s J + B} \quad \dot{\omega} J + \omega B = K_t I_a$$

$$\dot{\omega} = I_a \frac{K_t}{J} - \omega \frac{B}{J} \quad \dot{\theta} = \omega$$

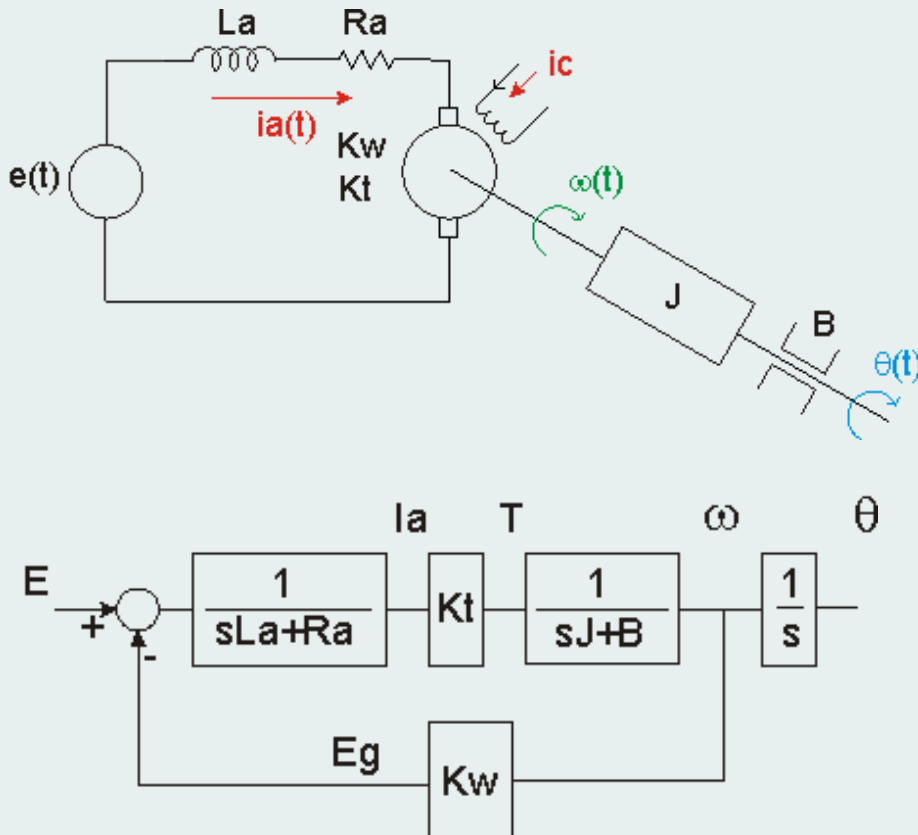
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_w}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Elección de las Variables de Estado



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\begin{bmatrix} T \\ E_g \\ V_{Ra} \\ V_{La} \\ T_B \\ T_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kt & 0 & 0 \\ 0 & Kw & 0 \\ Ra & 0 & 0 \\ -Ra & -Kw & 0 \\ 0 & B & 0 \\ Kt & -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$x = \begin{bmatrix} T \\ E_g \\ \theta \end{bmatrix}$$

SI

$$x = \begin{bmatrix} T \\ T_B \\ \omega \end{bmatrix}$$

NO

$$x = \begin{bmatrix} T \\ V_{La} \\ \theta \end{bmatrix}$$

NO



MODELO DE ESTADO

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kw}{La} & 0 \\ \frac{Kt}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\theta = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$Ra=2 \Omega$$

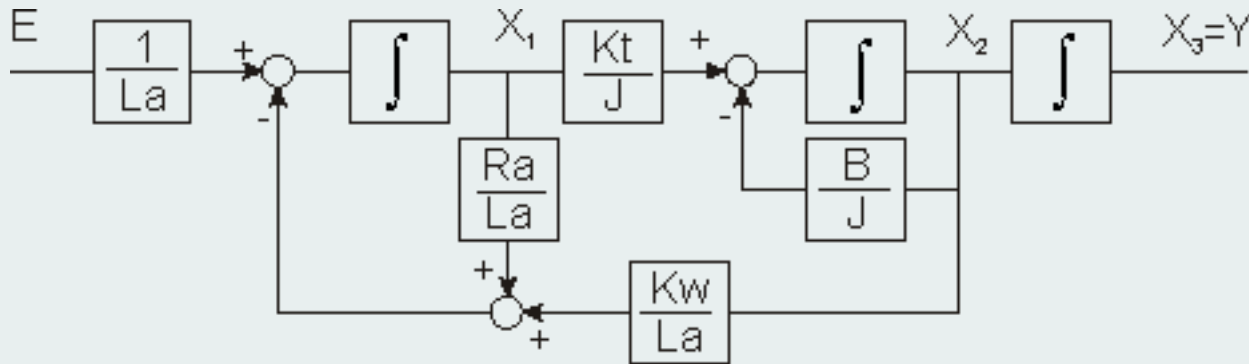
$$La=5 \text{ mHy}$$

$$J=0.005 \text{ Nms}^2$$

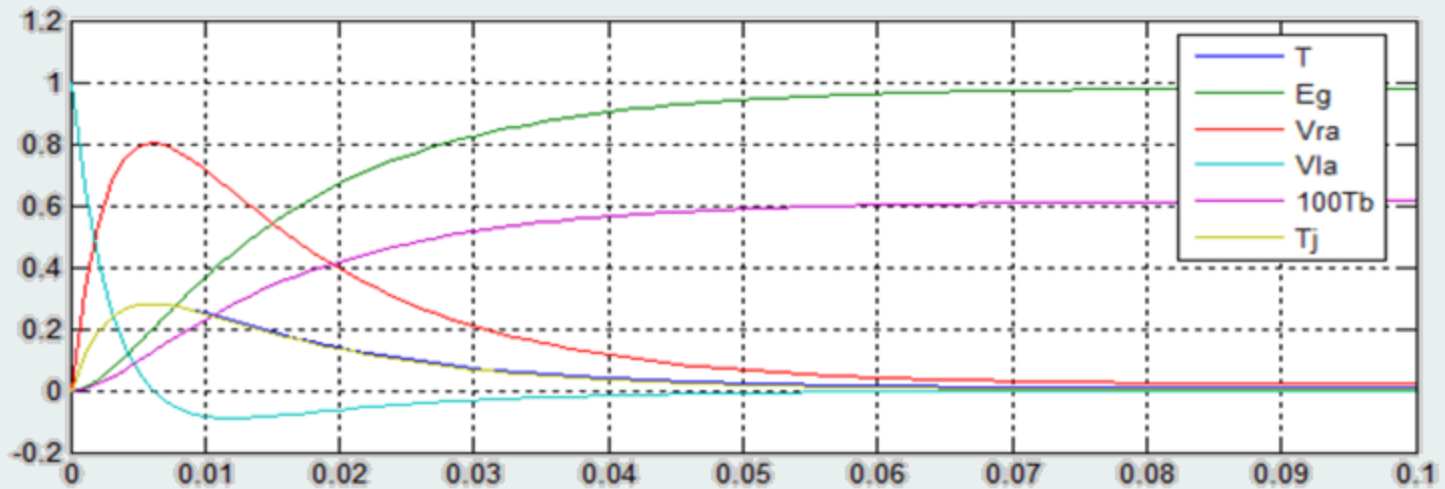
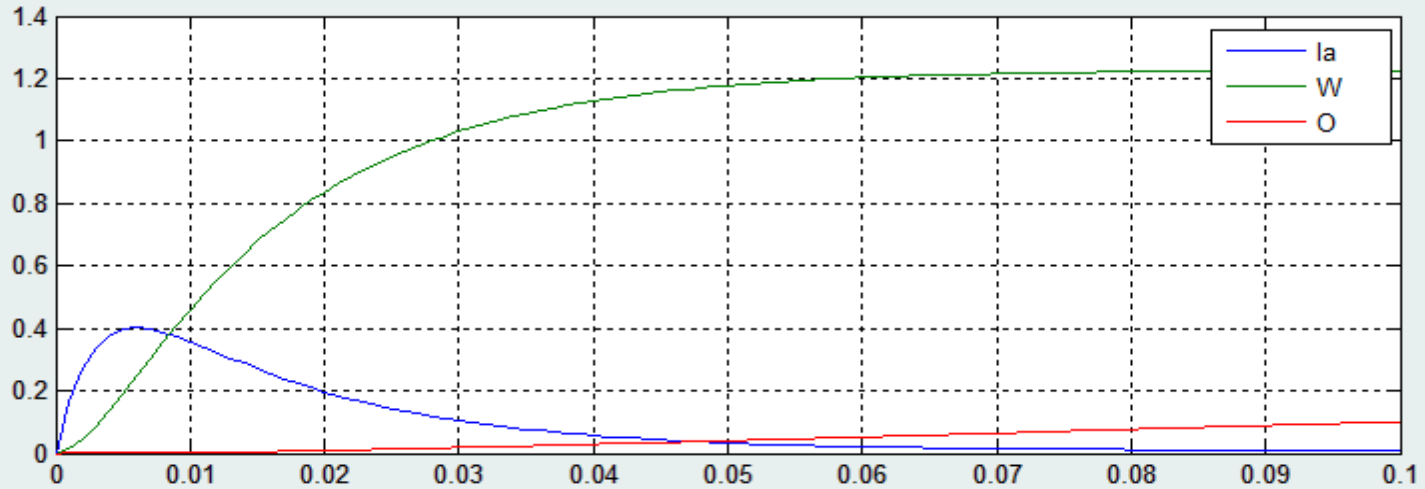
$$B=0.005 \text{ Nms}$$

$$Kt=0.7 \text{ Nm/A}$$

$$Kw=0.8 \text{ Vs}$$



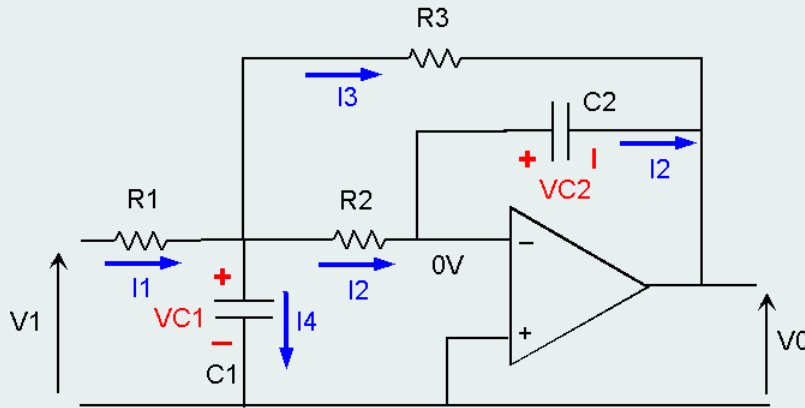
MODELO DE ESTADO



MODELO DE ESTADO

Elección de las Variables de Estado

EJEMPLO 2



$$V_1 - V_{C1} = I_1 R_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = \frac{V_{C1}}{R_2} + \frac{V_{C1} + V_{C2}}{R_3} + \dot{V}_{C1} C_1$$

$$\dot{V}_{C1} = \frac{V_1}{C_1 R_1} - \frac{V_{C1}}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_{C2}}{C_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_{C1}}{R_2} = \dot{V}_{C2} C_2$$

$$\dot{V}_{C2} = \frac{V_{C1}}{C_2 R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

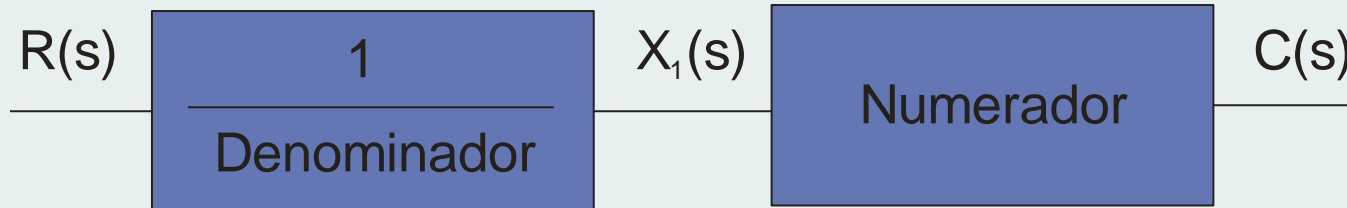
$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Elección de las Variables de Estado

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\beta_1 s^m + \beta_2 s^{m-1} + \dots + \beta_m s + \beta_{m+1}}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}$$



$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}$$

$$\frac{C(s)}{X_1(s)} = \beta_1 s^m + \beta_2 s^{m-1} + \dots + \beta_m s + \beta_{m+1}$$

$$s^n X_1(s) + \alpha_1 s^{n-1} X_1(s) + \dots + \alpha_{n-1} s X_1(s) + \alpha_n X_1(s) = R(s)$$

$$x_1^{(n)}(t) + \alpha_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} \dot{x}_1(t) + \alpha_n x_1(t) = r(t)$$

$$C(s) = \beta_1 s^m X_1(s) + \beta_2 s^{m-1} X_1(s) + \dots + \beta_m s X_1(s) + \beta_{m+1} X_1(s)$$



MODELO DE ESTADO

Elección de las Variables de Estado

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) = \ddot{x}_1(t)$$

....

$$\dot{x}_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) = x_1^{(n-2)}(t)$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) = x_1^{(n-1)}(t)$$

MODELO DE FASE

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$c(t) = [\beta_{m+1} \quad \beta_m \quad \dots \quad \beta_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(t)$$

$$x_1^{(n)}(t) + \alpha_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} \dot{x}_1(t) + \alpha_n x_1(t) = r(t)$$

$$\dot{x}_n(t) + \alpha_1 x_n(t) + \dots + \alpha_{n-1} x_2(t) + \alpha_n x_1(t) = r(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = -\alpha_1 x_n(t) - \dots - \alpha_{n-1} x_2(t) - \alpha_n x_1(t) + r(t)$$

$$c(t) = \beta_1 x_{m-1}(t) + \beta_2 x_{m-2}(t) + \dots + \beta_m x_2(t) + \beta_{m+1} x_1(t)$$



MODELO DE ESTADO

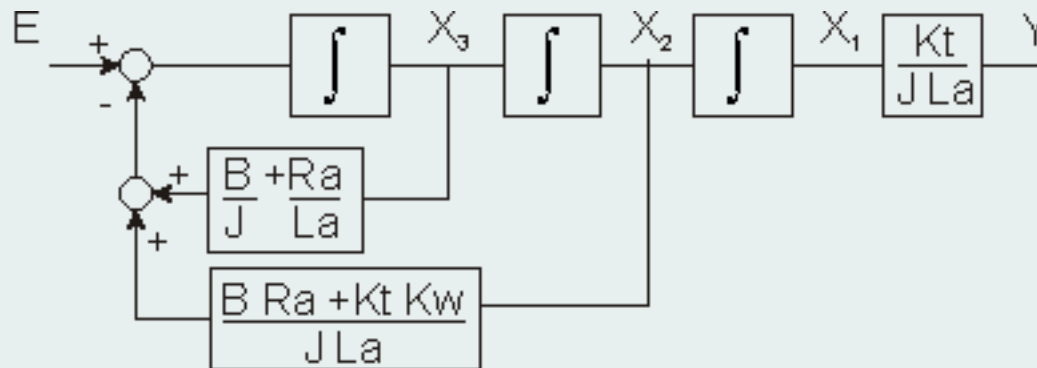
Elección de las Variables de Estado

EJEMPLO 1

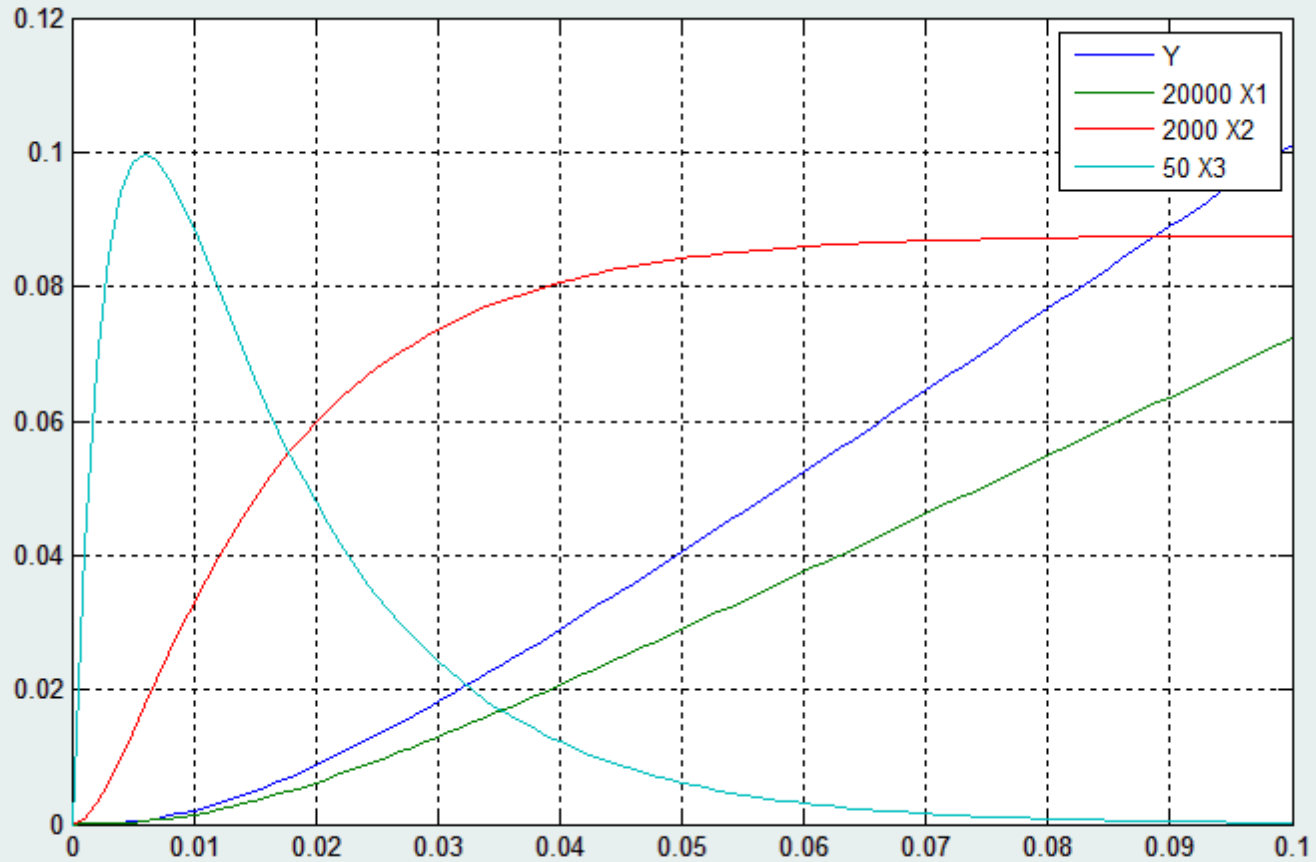
Para el caso del motor

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{\frac{Kt}{JLa}}{s^3 + \left(\frac{Ra}{La} + \frac{B}{J}\right)s^2 + \left(\frac{Ra B + Kt Kw}{La J}\right)s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{Ra B + Kt Kw}{La J} & -\frac{Ra}{La} + \frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} \frac{Kt}{JLa} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO



MODELO DE ESTADO

Función de Transferencia

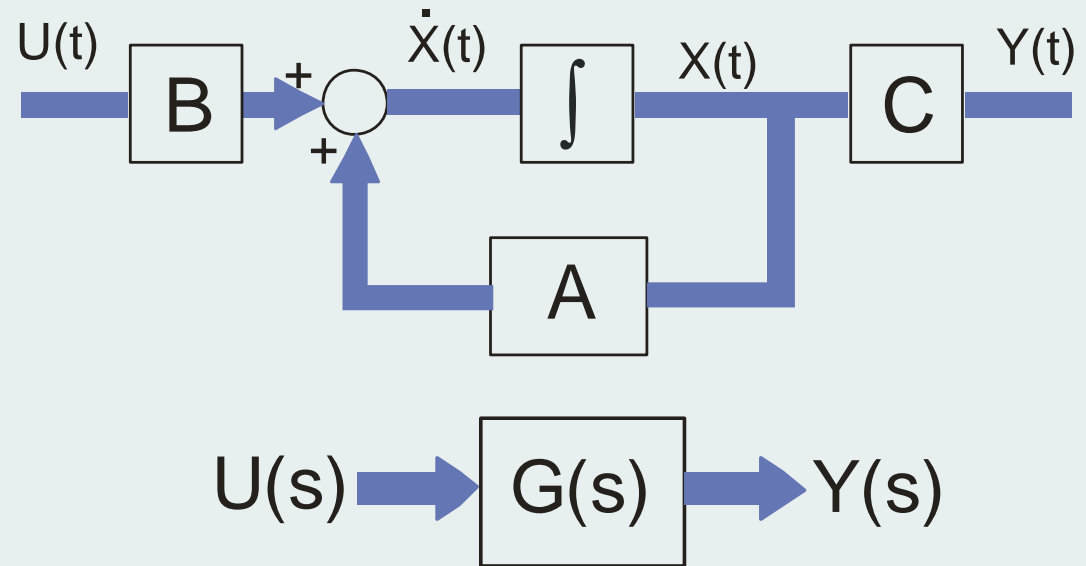
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s) \\ g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) \\ g_{31}(s)u_1(s) + g_{32}(s)u_2(s) \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Función de Transferencia

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Aplicando Transformada de Laplace

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad ; \quad x(0) = 0$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] U(s)$$

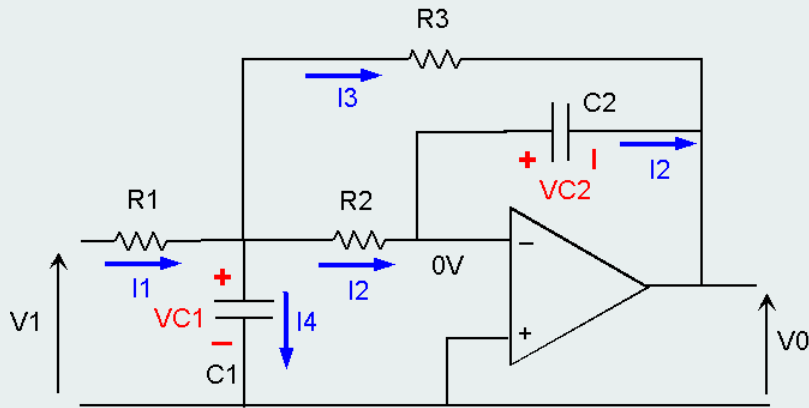
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$



MODELO DE ESTADO

EJEMPLO 2



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega ; C_1 = 0.9\mu F ; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.33 & -11.11 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

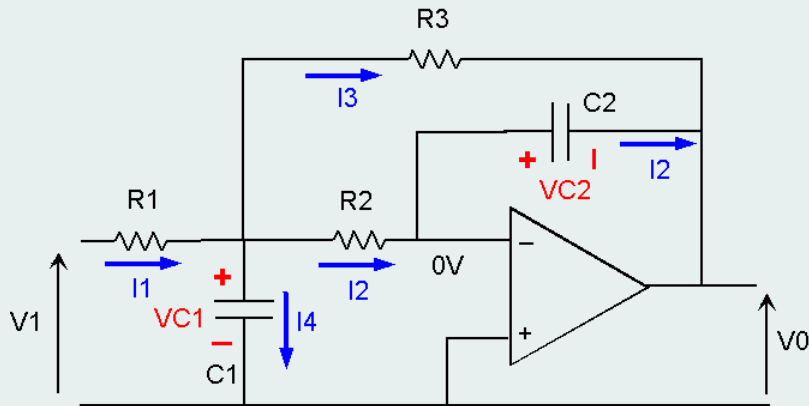
$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s + 33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s + 33.33 & 11.11 \\ -100 & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{C1}(s) \\ V_{C2}(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s + 33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111} \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$



MODELO DE ESTADO



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega ; C_1 = 0.9\mu F ; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & -11.11 \\ 100 & s + 33.33 \end{bmatrix}}{s^2 + 33.33s + 1111} \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1111}{s^2 + 33.33s + 1111} \\ \frac{0.0001111(s + 100)}{s^2 + 33.33s + 1111} \end{bmatrix} U(s)$$

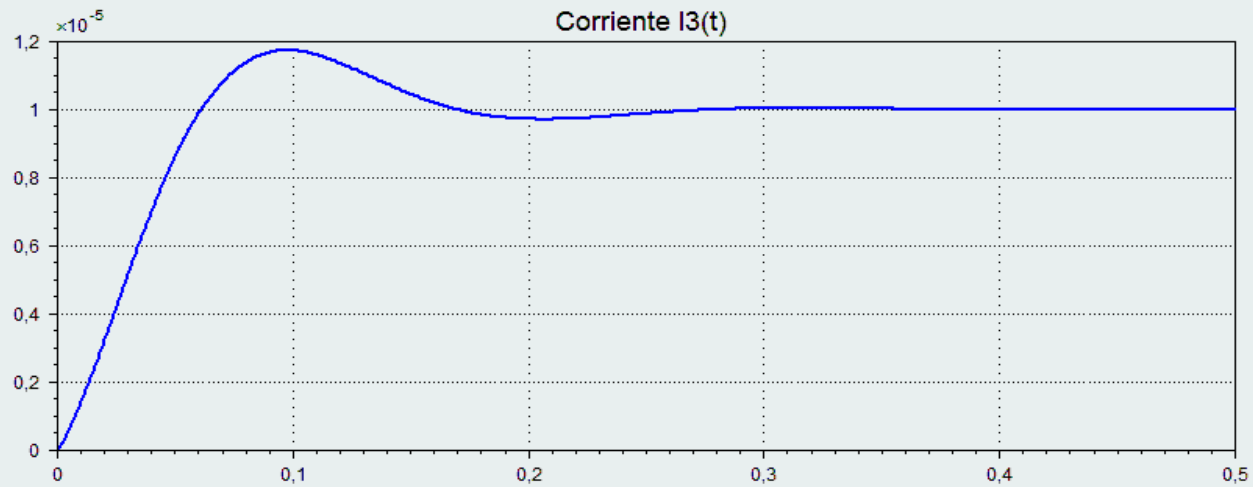
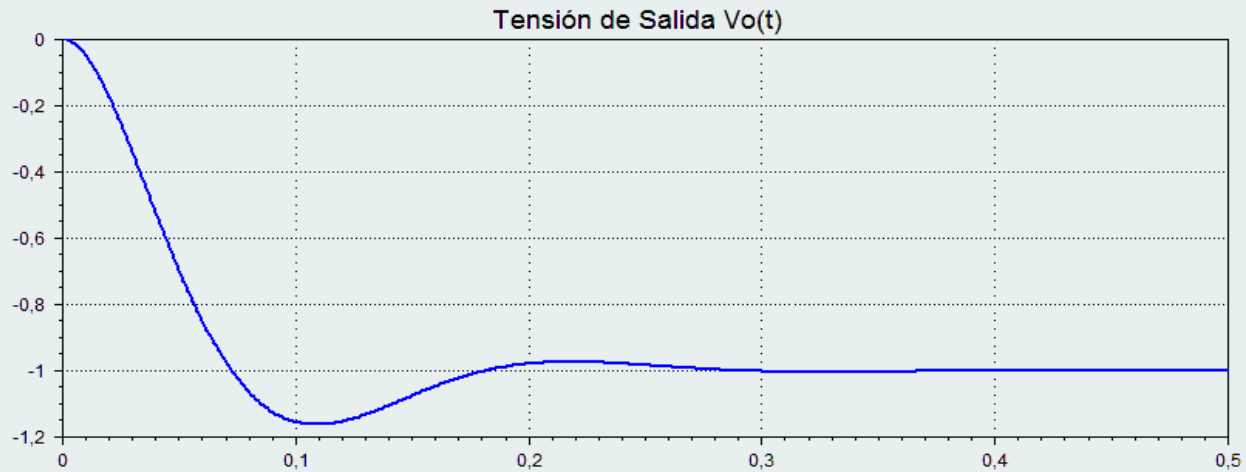
$$\text{Si } U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1111}{s^3 + 33.33s^2 + 1111s} \\ \frac{0.0001111(s + 100)}{s^3 + 33.33s^2 + 1111s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0(t) \\ I_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 1.155 \cos(28.87t - 0.5236) * e^{-16.67t} \\ 10^{-5} - 1.018 \cdot 10^{-5} \cos(28.87t - 0.1901) e^{-16.67t} \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.

Si se considera una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a x(t) + b u(t)$$

La solución resulta:
$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Ahora para el vector $\mathbf{x}(t)$ se ensaya la siguiente solución:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau$$

Se debe cumplir que:

$$\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}(0)$$

y

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)$$



Solución del Vector de Estado.

Propiedades de e^{At}

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

$$e^{A0} = I$$

e^{At} Es no singular para todo t finito

$$e^{At_1} e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

$$(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$$

$$(e^{At})^n = e^{A(nt)}$$



Solución del Vector de Estado.

$$x(t=0) = x(0) \quad x(0) = \underbrace{e^{A0}}_I x(0) + \underbrace{\int_0^0 e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_0 = x(0)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau \right) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) \right] d\tau + f(t, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right)$$

$$\dot{x}(t) = A e^{At} x(0) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \Big|_{\tau=t}$$

$$\dot{x}(t) = A \underbrace{\left(e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right)}_{x(t)} + B u(t)$$



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad \text{Aplicando transformada de Laplace}$$

$$sX(s) - x(0) = A X(s) + B U(s) \quad (sI - A) X(s) = x(0) + B U(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s)$$

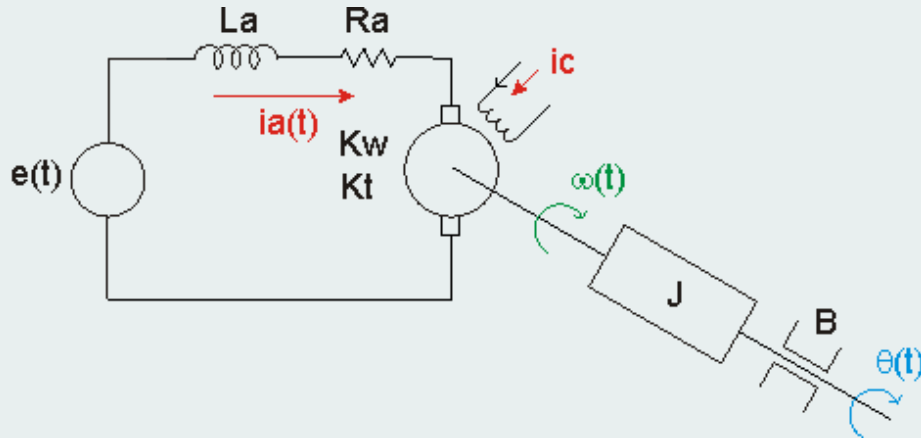
$$\text{Antitransformando } (sI - A)^{-1} \quad \Phi(t) = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau \quad \Phi(t) = e^{At}$$



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.



$$\begin{aligned} R_a &= 2 \, \Omega \\ L_a &= 5 \, \text{mHy} \\ J &= 0.005 \, \text{Nms}^2 \\ B &= 0.005 \, \text{Nms} \\ K_t &= 0.7 \, \text{Nm/A} \\ K_w &= 0.8 \, \text{Vs} \end{aligned}$$

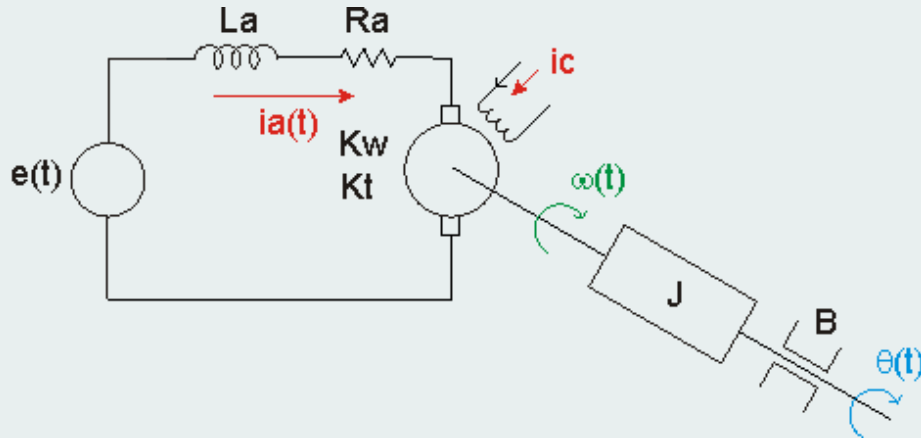
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -160 & 0 \\ 140 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & -160 & 0 \\ 140 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} s+400 & 160 & 0 & & & \\ -140 & s+1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & s & & & \end{array} \right]$$

$$Adj[sI - A] = \begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4) \end{bmatrix}$$

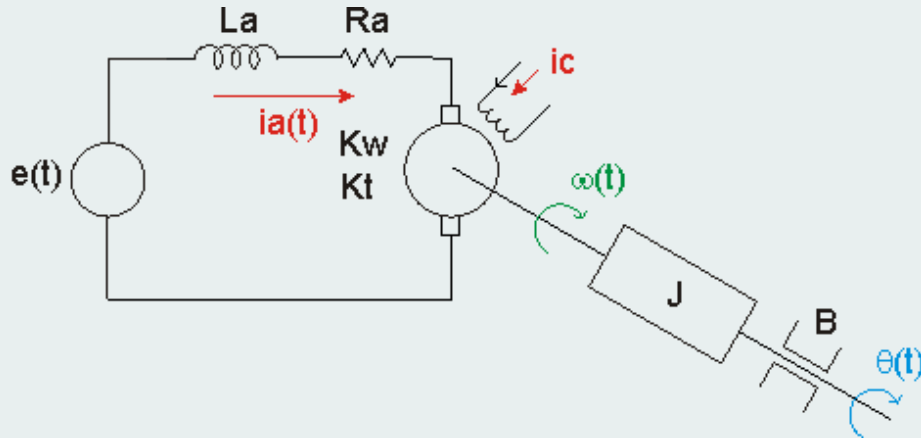
$$Det[sI - A] = s(s+1)(s+400) - (160)(-140)s = s(s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4)$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s(s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4)}$$



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.



$$\begin{bmatrix} I_a(0) \\ \omega(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \text{ Amp} \\ 122.5 \text{ rad/s} \\ 2.0 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

$$U(s) = 100/s$$

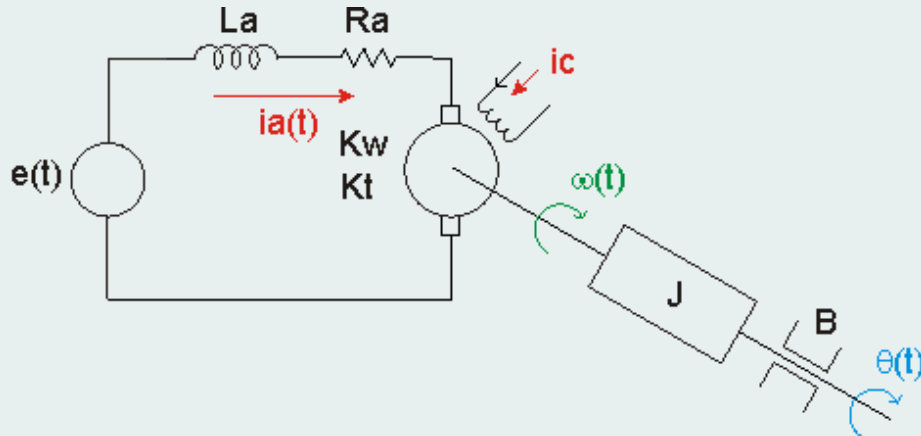
$$\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (s) = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s(s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4)} \left(\begin{bmatrix} I_a(0) \\ \omega(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \right)$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (s) = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & -160s & 0 \\ 140s & s(s+400) & 0 \\ 140 & (s+400) & (s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4) \end{bmatrix}}{s(s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4)} \begin{bmatrix} 1.3 + \frac{20000}{s} \\ 122.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Solución del Vector de Estado.



$$\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (s) = \frac{\begin{bmatrix} s(0.13s^2 - 1.93987 \cdot 10^4 + 200) \\ s(122.5s^2 + 4.9182 \cdot 10^4 s + 28000) \\ 2s^3 + 924.5s^2 + 9.4782 \cdot 10^4 s + 28000 \end{bmatrix}}{s^2(s^2 + 401s + 2,28 \cdot 10^4)}$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} 0.008772 - 73.88e^{(-68,59t)} + 75.17e^{(-332,4t)} \\ 1.228 + 153e^{(-68,59t)} - 31.75e^{(-332,4t)} \\ (1.228t + 4.136) - 2.231e^{(-68,59t)} + 0.09553e^{(-332,4t)} \end{bmatrix}$$

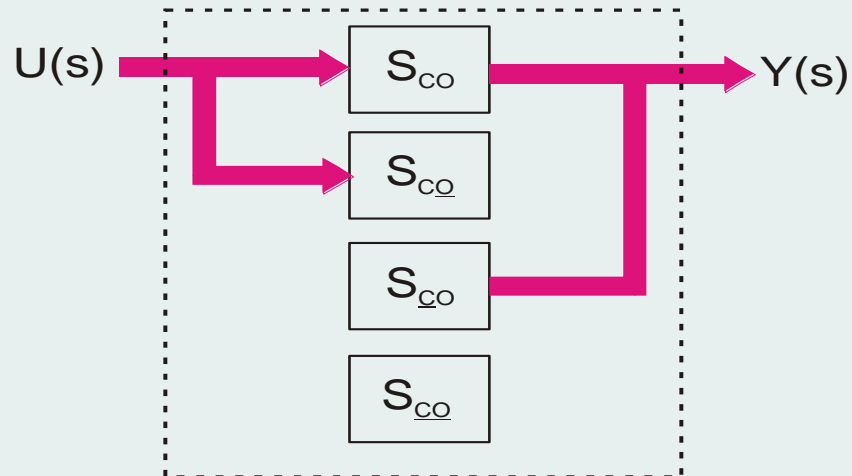


MODELO DE ESTADO

Controlabilidad y observabilidad. (Ogata)

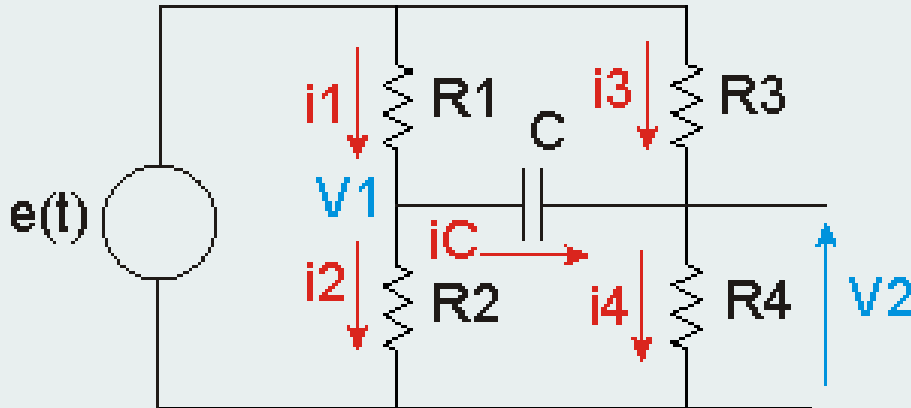
Se dice que un sistema es **controlable** en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que un sistema es **observable** en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. Se supone que la entrada $u(t)$ es conocida en el intervalo.



MODELO DE ESTADO

Controlabilidad y Observabilidad.



$$\frac{e - V_1}{R_1} = I_c + \frac{V_1}{R_2}$$

$$\frac{e - V_2}{R_3} + I_c = \frac{V_2}{R_4}$$

$$V_1 - V_2 = X$$

$$I_c = C\dot{X}$$

$$\dot{X} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)X + (R_1R_4 - R_2R_3)e}{C(R_1(R_2(R_4 + R_3) + R_3R_4) + R_2R_3R_4)}$$

$$V_2 = \frac{R_4R_2 \cdot (R_1 + R_3)e - R_4R_3(R_1 + R_2)X}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2 \cdot R_3 \cdot R_4}$$

Si $R_1=R_2=R_3=R_4=R$

$$\dot{X} = \frac{X}{CR}$$

X no es controlable desde e(t)

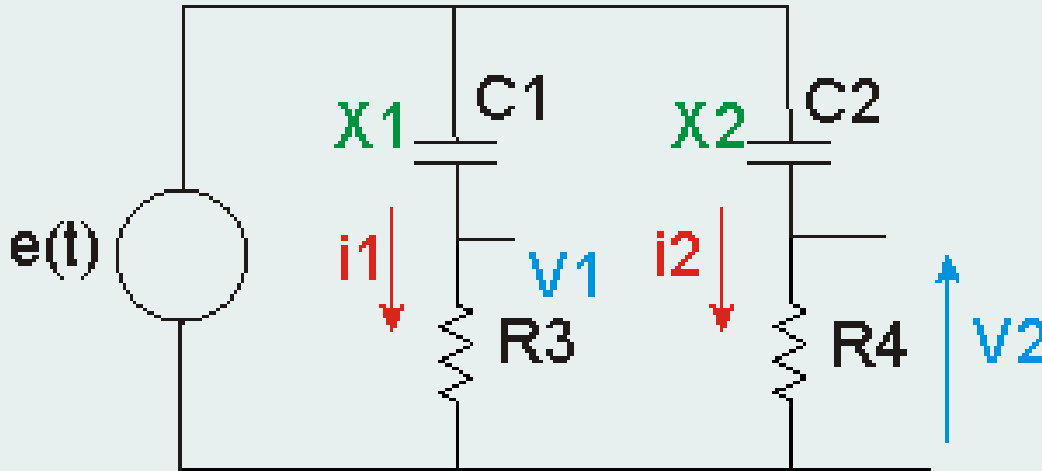
$$V_2 = \frac{e - X}{2}$$

X es observable desde V2(t)



MODELO DE ESTADO

Controlabilidad y observabilidad.



$$E = X_1 + \dot{X}_1 C_1 R_3$$

$$E = X_2 + \dot{X}_2 C_2 R_4$$

$$\dot{X}_1 = \frac{E - X_1}{C_1 R_3}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{E - X_2}{C_2 R_4}$$

El circuito permite controlar las variables de estado salvo el caso en que las constantes de tiempo de ambas ramas sean iguales. En este caso las dos variables se comportan de la misma manera para una dada entrada y no puedo diferenciarlas y el sistema resulta incontrolable desde $e(t)$

Si planteo la salida en V_2 no se puede obtener información del valor de la variable X_1 por que las dos ramas están desacopladas. El sistema resulta inobservable desde V_2



MODELO DE ESTADO

Verificación de Controlabilidad y Observabilidad.

Sistemas MIMO

Un sistema de orden n con r entradas y q salidas

es controlable , si y sólo si , la matriz compuesta $U [n \times nr]$, denominada matriz controlabilidad, es de rango n .

$$\text{Matriz Controlabilidad: } U = \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-2}B \mid A^{n-1}B \right]$$

es observable , si y sólo si , la matriz compuesta $V [nq \times n]$, denominada matriz observabilidad, es de rango n .

Matriz Observabilidad:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Para un modelo de orden n :

Si el rango de la matriz controlabilidad U (matriz observabilidad V) es $j < n$ entonces, habrá j variables de estado controlables (observables) y $(n-j)$ no controlables (no observables)

Sistemas SISO

Para un sistema SISO, tanto la matriz controlabilidad U como la matriz observabilidad V , son matrices cuadradas. Por lo tanto, para que resulten de rango igual a n , las matrices deben ser *no singulares*.

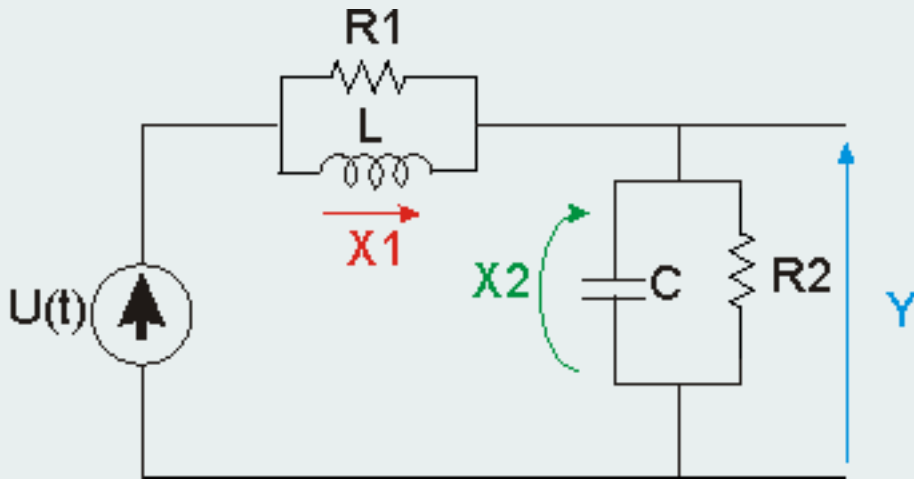
Entonces:

$$\det[U] = \det \left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-2}B \mid A^{n-1}B \right] \neq 0$$

$$\det[V] = \det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$



MODELO DE ESTADO



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] x(t)$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{R_1^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C^2} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(V) = 0$$

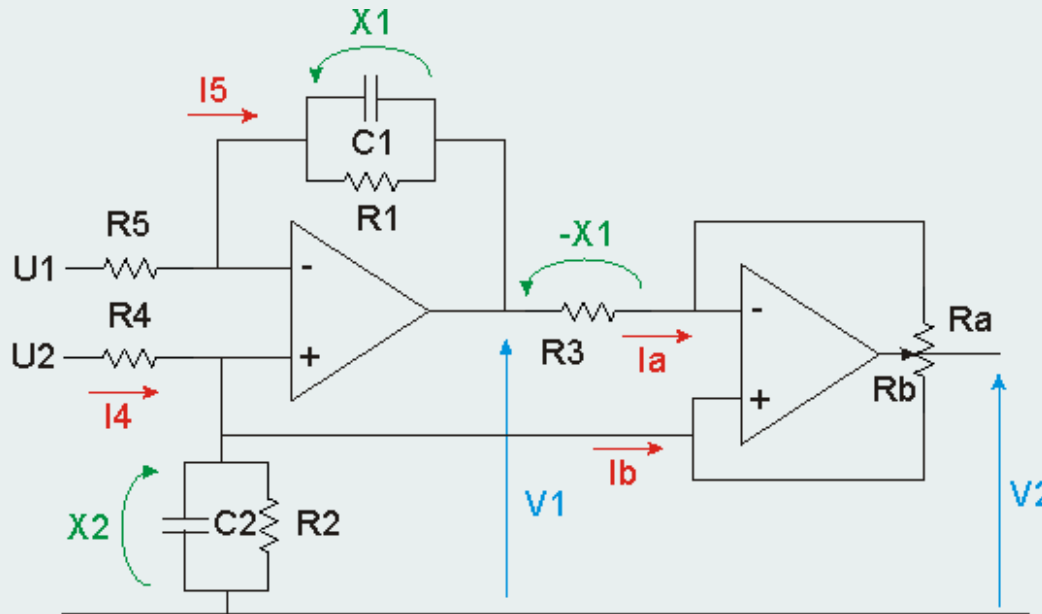
$$\det(U) = \frac{R_1}{LC} \left(\frac{R_1}{L} - \frac{1}{R_2 C} \right)$$

Desde la salida solamente es observable X2

No será controlable si las ctes de tiempo son iguales



MODELO DE ESTADO



$$I_a R_a = I_b R_b \quad K = \frac{R_a}{R_b} = \frac{I_b}{I_a}$$

$$R_b = \frac{1}{1+K} R_p \quad R_a = \frac{K}{1+K} R_p$$

$$I_a = -\frac{x_1}{R_3} \quad I_b = -\frac{K}{R_3} x_1$$

$$C_1 \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R_1} = \frac{u_1 - x_2}{R_5}$$

$$C_2 \dot{x}_2 + \frac{x_2}{R_2} = I_4 - I_b = \frac{u_2 - x_2}{R_4} - \frac{K}{R_3} x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1 R_1} x_1 - \frac{1}{C_1 R_5} x_2 + \frac{1}{C_1 R_5} u_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{K}{C_2 R_3} x_1 - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) x_2 + \frac{1}{C_2 R_4} u_2 \end{cases}$$

$$V_1 = x_2 - x_1$$

$$V_2 = x_2 - \frac{I_b}{R_b} = x_2 - \frac{K}{1+K} \frac{R_p}{R_3} x_1$$



MODELO DE ESTADO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{C_1 R_5} \\ \frac{K}{C_2 R_3} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K}{1+K} \frac{R_p}{R_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_5} & 0 & -\frac{1}{C_1^2 R_1 R_5} & -\frac{1}{C_1 C_2 R_4 R_5} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_4} & \frac{K}{C_1 C_2 R_3 R_5} & -\frac{(R_2 + R_4)}{C_2^2 R_2 R_4^2} \end{bmatrix} \quad Rg[U] = 2$$

$$U(U_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_5} & -\frac{1}{C_1^2 R_1 R_5} \\ 0 & \frac{K}{C_1 C_2 R_3 R_5} \end{bmatrix}$$

Si $K=0$ entonces

$$Rg[U(U_1)] = 1$$



MODELO DE ESTADO

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K}{1+K} \frac{R_p}{R_3} & 1 \\ \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{K}{C_2 R_3} & \frac{1}{C_1 R_5} - \frac{R_2 + R_4}{C_2 R_2 R_4} \\ \frac{K}{C_2 R_3} - \frac{K R_p}{C_1 R_1 R_3 (1+K)} & -\frac{K R_p}{C_1 R_5 R_3 (1+K)} - \frac{R_2 + R_4}{C_2 R_2 R_4} \end{bmatrix}$$

$$Rg[V] = 2$$

$$V(V_2) = \begin{bmatrix} \frac{K}{1+K} \frac{R_p}{R_3} & 1 \\ \frac{K}{C_2 R_3} - \frac{K R_p}{C_1 R_1 R_3 (1+K)} & -\frac{K R_p}{C_1 R_5 R_3 (1+K)} - \frac{R_2 + R_4}{C_2 R_2 R_4} \end{bmatrix}$$

Si $K=0$ entonces

$$Rg[V(V_2)] = 1$$

Si $K=0$ entonces $G_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{U_1(s)} = 0$



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.

Suponga una planta descrita por el siguiente modelo de estado:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad ; \quad y(t) = C x(t) + D u(t)$$

Y considere una transformación lineal a través de una matriz no singular T , tal que:

$$x(t) = T \bar{x}(t) \quad ; \quad \bar{x}(t) = T^{-1} x(t)$$

Reemplazando en el modelo:

$$T \dot{\bar{x}}(t) = A T \bar{x}(t) + B u(t) \quad ; \quad y(t) = C T \bar{x}(t) + D u(t)$$

Despejando la derivada:

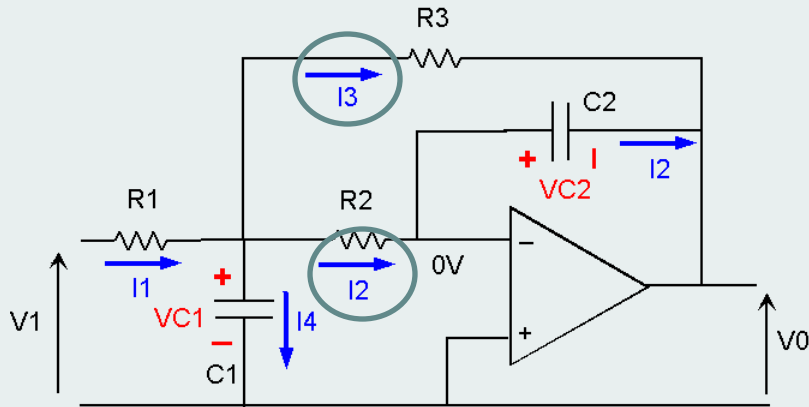
$$\dot{\bar{x}}(t) = T^{-1} A T \bar{x}(t) + T^{-1} B u(t) \quad ; \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t)$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T \quad \bar{B} = T^{-1} B \quad \bar{C} = C T \quad \bar{D} = D$$



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.



$$V_1 - V_{C1} = I_1 R_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 = \frac{V_{C1}}{R_2} + \frac{V_{C1} + V_{C2}}{R_3} + \dot{V}_{C1} C_1$$

$$\dot{V}_{C1} = \frac{V_1}{C_1 R_1} - \frac{V_{C1}}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_{C2}}{C_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_{C1}}{R_2} = \dot{V}_{C2} C_2$$

$$\dot{V}_{C2} = \frac{V_{C1}}{C_2 R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & -\frac{1}{C_1 R_3} \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100K\Omega ; C_1 = 0.9\mu F ; C_2 = 0.1\mu F$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33.33 & -11.11 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.11 \\ 0 \end{bmatrix} V_1$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_3 & 1/R_3 \\ 1/R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 10^5 \\ 10^5 & -10^5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -33,33 & -11,11 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10^5 \\ 10^5 & -10^5 \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -11,11 & 77,78 \\ -11,11 & -22,22 \end{bmatrix}$$

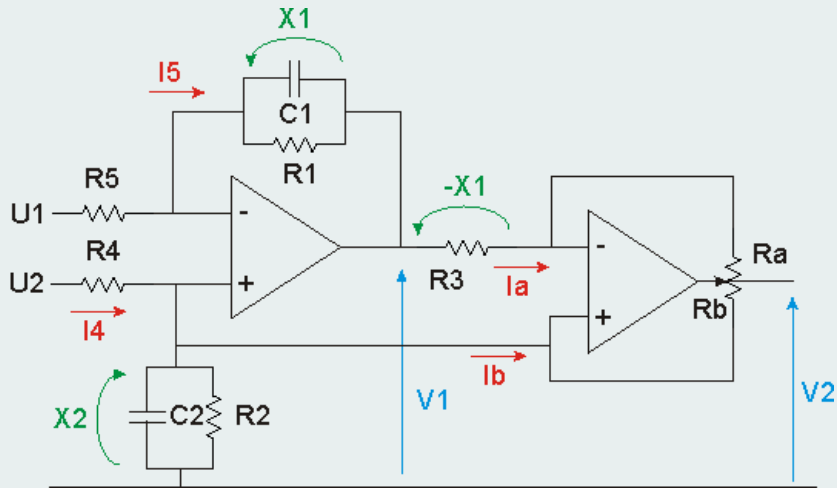
$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,11 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -3,33 * 10^{-4} \\ -3,33 * 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10^{-5} & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10^5 \\ 10^5 & -10^5 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} -10^5 & 10^5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,11 & 77,78 \\ -11,11 & -22,22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,33 * 10^{-4} \\ -3,33 * 10^{-4} \end{bmatrix} V_1 \quad ; \quad \begin{bmatrix} V_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^5 & 10^5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO



Si $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10K\Omega$

$C_1 = C_2 = 0.01\mu F$

$R_a + R_b = R_p = 10K\Omega \quad K = 4$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^4 & -10^4 \\ 4 \cdot 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10^4 & -10^4 \\ 4 \cdot 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5556 & 0,5556 \\ 0,4444 & 0,5556 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3,222 \cdot 10^4 & 2,222 \cdot 10^4 \\ -3,0222 \cdot 10^4 & 2222,22 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^4 & 10^4 \\ 8 \cdot 10^3 & 10^4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5556 & 0,5556 \\ 0,4444 & 0,5556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.

Autovalores: $\det(sI - A) = 0$

$$\det(sI - \bar{A}) = \det(sI - T^{-1}AT) = \det(sI T^{-1}T - T^{-1}AT) = 0$$

Como sI es una matriz diagonal se cumple: $sI T^{-1} = T^{-1}sI$

$$\det(sI - \bar{A}) = \det(T^{-1}sI T - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(sI - A)T) = 0$$

$$\det(sI - \bar{A}) = \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) = \det(sI - A) = 0$$

Esto significa que los autovalores de \bar{A} son los mismos que los de A , es decir que la transformación lineal no modifica los autovalores del modelo.



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.

Controlabilidad:

$$\bar{U} = \left[\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \dots \mid \bar{A}^{n-1}\bar{B} \right] = \left[T^{-1}B \mid T^{-1}A \underbrace{TT^{-1}}_I B \mid \dots \mid T^{-1}AT \dots T^{-1}B \right]$$

$$\bar{U} = T^{-1} \left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] = T^{-1}U$$

Como el rango de una matriz no cambia si se premultiplica o posmultiplica por una matriz no singular .

$$\text{Rango} \left[T^{-1}U \right] = \text{Rango} \left[U \right]$$

Por lo tanto:

$$\text{Rango} \left[\bar{U} \right] = \text{Rango} \left[U \right]$$

Entonces la controlabilidad no es afectada por la transformación del modelo.



MODELO DE ESTADO

Transformación de Modelo de Estado.

Observabilidad:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \dots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ C\underbrace{TT^{-1}}_I AT \\ \dots \\ CT\dots T^{-1}AT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = VT$$

Como el rango de una matriz no cambia si se premultiplica o posmultiplica por una matriz no singular .

Por lo tanto:

$$Rango[VT] = Rango[V]$$

$$Rango[\bar{V}] = Rango[V]$$

Entonces la observabilidad no es afectada por la transformación del modelo.



MODELO DE ESTADO

Formas Canónicas de Modelos de Estado

Modelos de estado en donde las matrices tienen formas especiales. En general, se llega a estas formas aplicando una transformación lineal al vector de estado.

Modelo Canónico Controlable

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] x(t) + d u(t)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_m s^{m-1} + c_{m-1} s^{m-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} + d$$

$$D(s) = \det[sI - A]$$



MODELO DE ESTADO

Formas Canónicas de Modelos de Estado

Modelo Canónico Observable

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 1] x(t) + d u(t)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^{m-1} + b_{m-1} s^{m-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} + d$$

$$D(s) = \det[sI - A]$$



MODELO DE ESTADO

Formas Canónicas de Modelos de Estado

Modelo Canónico Diagonal

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1} \quad c_n] x(t) + d u(t)$$

$$G(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{s - \lambda_{n-1}} + \frac{c_n}{s - \lambda_n} + d$$

Todos los λ_i distintos



MODELO DE ESTADO

Formas Canónicas de Modelos de Estado

Matrices de Transformación

Dado un modelo de estado controlable y observable:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad ; \quad y(t) = C x(t) + D u(t)$$

$$\text{Con } \det[sI - A] = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1$$

Transformación a Modelo Canónico Controlable

$$A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \quad B_c = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = CP$$



MODELO DE ESTADO

Formas Canónicas de Modelos de Estado

Puesto que el modelo es controlable las matrices U y Uc resultarán no singulares :

$$Uc = \left[Bc \mid AcBc \mid \dots \mid Ac^{n-1}Bc \right] = P^{-1}U$$

Por lo tanto resulta: $P^{-1} = UcU^{-1}$ y $P = UUc^{-1}$

Dada la topología de Ac y Bc , resulta:

$$Uc^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Transformación a Modelo Canónico Observable

$$A_o = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} ; C_o = CQ = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] ; B_o = Q^{-1}B$$

Puesto que el modelo es observable las matrices V y V_o resultarán no singulares :

$$V_o = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ \dots \\ C_o A_o^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} Q = VQ$$



MODELO DE ESTADO

Por lo tanto resulta: $Q = V^{-1}V_o$ y $Q^{-1} = V_o^{-1}V$

Dada la topología de A_o y C_o , resulta:

$$V_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformación a Modelo Canónico Diagonal

Sea $x = T \tilde{x}$ y $\tilde{x} = T^{-1}x$ entonces $\tilde{A} = T^{-1}AT$

Premultiplicando por T resulta

$$AT = T\tilde{A} = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}\lambda_1 & t_{12}\lambda_2 & \dots & t_{1n}\lambda_n \\ t_{21}\lambda_1 & t_{22}\lambda_2 & \dots & t_{2n}\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}\lambda_1 & t_{n2}\lambda_2 & \dots & t_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}$$



MODELO DE ESTADO

Si se designa a cada columna de T como un vector: $v_i = \begin{bmatrix} t_{1i} & t_{2i} & \dots & t_{(n-1)i} & t_{ni} \end{bmatrix}^T$

Entonces cada columna de AT será

$$Av_i = A \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \dots \\ t_{(n-1)i} \\ t_{ni} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \dots \\ t_{(n-1)i} \\ t_{ni} \end{bmatrix} = \lambda_i v_i$$

Desarrollando se llega a: $Av_i = \lambda_i v_i$ o sea $(\lambda_i I - A)v_i = 0$

Este sistema tiene solución si la matriz $(\lambda_i I - A)$ es singular, en este caso se debe cumplir que:

$$\text{Det}(\lambda_i I - A) = 0$$

Y por lo tanto los λ_i son los autovalores de la matriz A



MODELO DE ESTADO

Entonces la matriz T esta formada por los autovectores de A .

Dado que, para obtener el modelo transformado se necesita T^{-1} , la matriz T debe ser no singular y por lo tanto todos los autovectores deben ser linealmente independientes. Esto se cumple solamente si los λ_i son todos distintos.

