

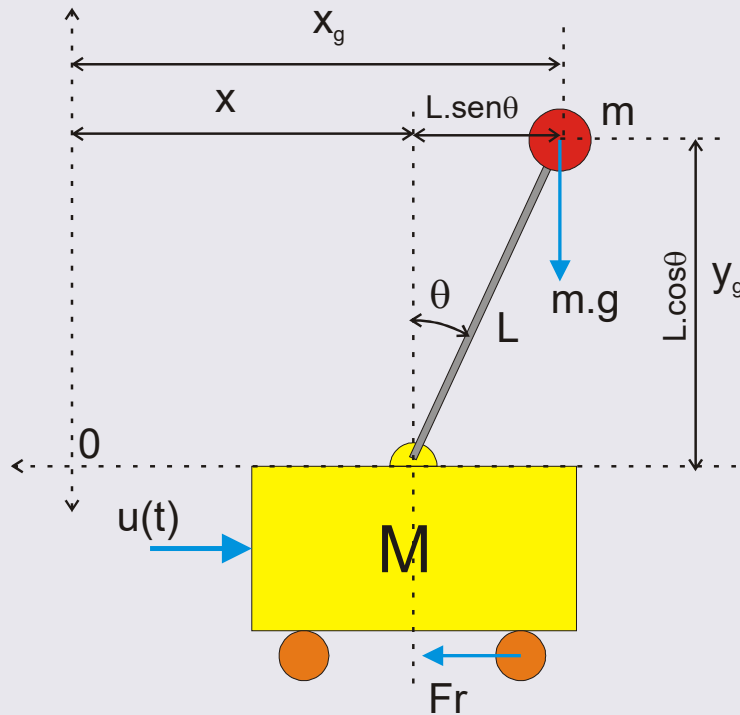
# TEORÍA DE CONTROL

---

Compensación  
Péndulo Invertido

# PÉNDULO INVERTIDO

El péndulo invertido es conocido por ser uno de los problemas más importantes y clásicos de la teoría de control. Se trata de un control inestable y no lineal. A menudo, es utilizado como ejemplo académico, principalmente por ser un sistema de control accesible, y por otro lado, permite mostrar las principales diferencias de control de lazo abierto y de su estabilización a lazo cerrado.



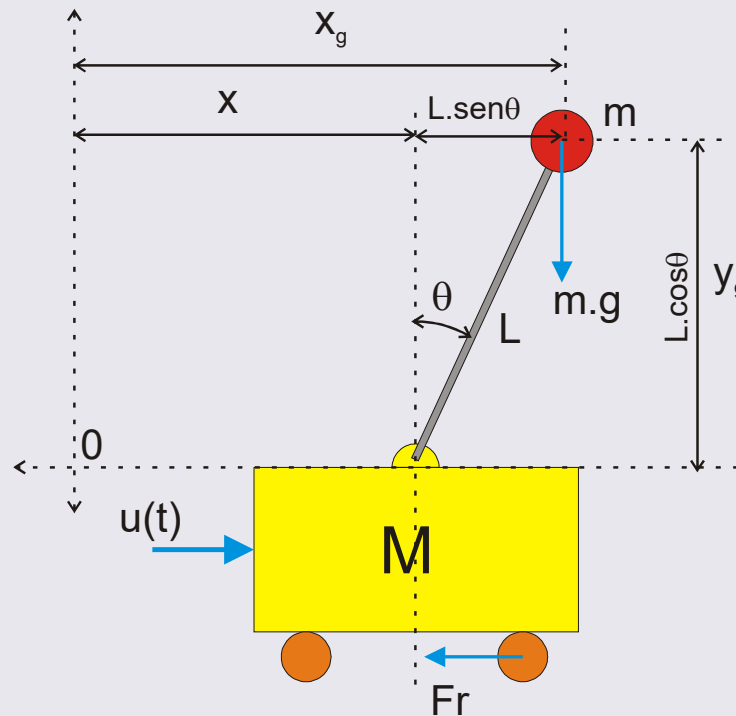
Se supone que la varilla no tiene masa, que la masa del carrito es  $M$  y la masa en el extremo superior del péndulo invertido es  $m$ . Hay una fuerza externa,  $u(t)$ , sobre el carrito en la dirección  $x$ , y una fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del péndulo en todo momento.

El sistema de coordenadas elegido se define en la figura, donde  $x(t)$  representa la posición del carrito y  $\theta(t)$  es el ángulo de inclinación que se mide respecto de la dirección vertical.



# PÉNDULO INVERTIDO

ECUACIONES BÁSICAS



$$(M + m) \cdot \ddot{x} + m \cdot L \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - m \cdot L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta + B \cdot \dot{x} = u \quad (1)$$

$$(J + m \cdot L^2) \cdot \ddot{\theta} = m \cdot L \cdot g \cdot \sin \theta - m \cdot L \cdot \ddot{x} \cdot \cos \theta \quad (2)$$



# PÉNDULO INVERTIDO

## MODELO DE ESTADO

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene el modelo de estado.

Las variables de estado son :  $x_1 = x$  ,  $x_2 = \dot{x}$  ,  $x_3 = \theta$  y  $x_4 = \dot{\theta}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{m^2 \cdot L^2 \cdot g \cdot \text{sen } x_3 \cdot \cos x_3 - (J + m \cdot L^2)(m \cdot L \cdot x_4^2 \cdot \text{sen } x_3 - B \cdot x_2 + u)}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{m \cdot L \cdot \cos x_3 \left[ B \cdot x_2 - m \cdot L \cdot x_4^2 \text{sen } x_3 + u \right] - g \cdot (m + M) \cdot \text{sen } x_3}{m^2 \cdot L^2 \cdot \cos^2 x_3 - (J + m \cdot L^2) \cdot (m + M)} \end{array} \right.$$

Considerando un punto de equilibrio en donde el carro se encuentra detenido en el origen de coordenadas y la barra se encuentra en la posición vertical, se halla el modelo lineal.



# PÉNDULO INVERTIDO

## MODELO DE ESTADO LINEAL

$$\dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B(J+m \cdot L^2)}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} & -\frac{m^2 \cdot g \cdot L^2}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m \cdot L \cdot B}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} & \frac{m \cdot g \cdot L \cdot (M+m)}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J+m \cdot L^2}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} \\ 0 \\ \frac{m \cdot L}{J \cdot (M+m) + m \cdot M \cdot L^2} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \theta(t) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] x^*(t)$$



# PÉNDULO INVERTIDO

## MODELO DE ESTADO LINEAL

Considerando los siguientes valores  $M = 0.5 \text{ Kg}$ ;  $m = 0.2 \text{ Kg}$ ;  $B = 0.1 \text{ N.m/s}$ ;  $J = 0.006 \text{ N.m/s}^2$ ;  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  y  $L = 0.3 \text{ m}$  el modelo queda:

$$\dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & -2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ -4.545 \end{bmatrix} u^*(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] x^*(t)$$

La función de transferencia del ángulo de inclinación es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-4.5455s}{(s - 5.565)(s + 5.604)(s + 0.1428)}$$

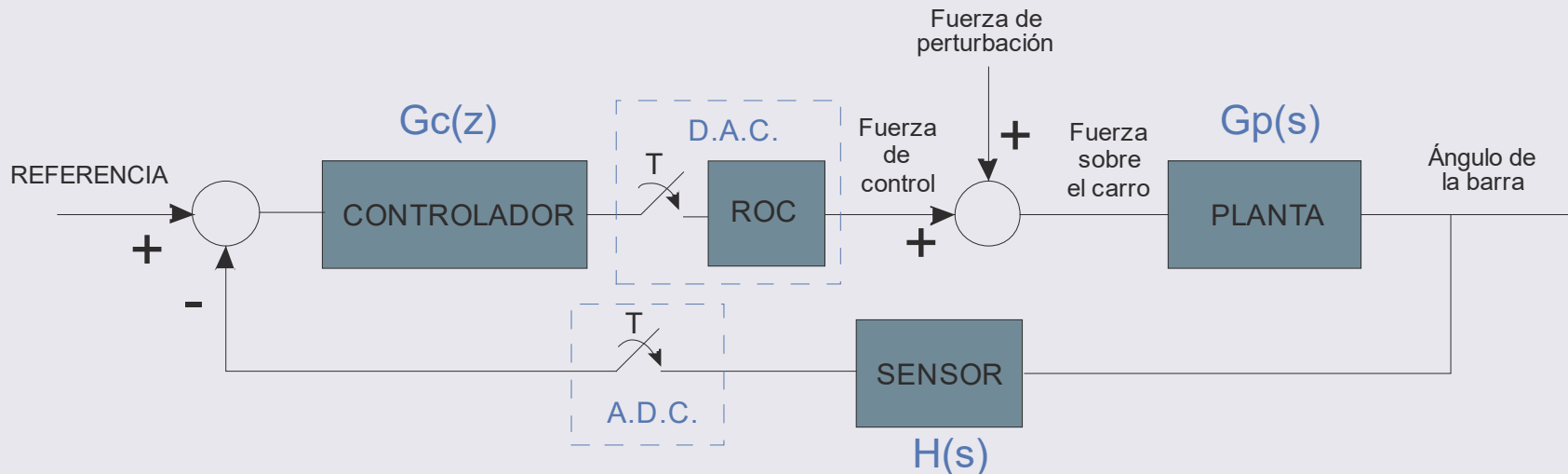
Como puede verse el sistema es inestable



# PÉNDULO INVERTIDO

## DISEÑO:

Se va a diseñar un control para mantener la barra del péndulo en posición vertical. Se considera en el diseño, una perturbación en la fuerza aplicada sobre el carro. Se plantea para ello el siguiente esquema de control:



Para determinar las condiciones de diseño, se va a utilizar la función de transferencia del sistema linealizado. Para el diseño, se analiza la estabilidad para un controlador con transferencia

$$G_c(z) = 1$$



# PÉNDULO INVERTIDO

DISEÑO:

Se considera para el diseño que la transferencia del sensor es:  $H(s)=1$ .

Se va a utilizar una plataforma digital que muestrea a una frecuencia de 50 Hz.

A partir de estos datos se calcula la transferencia discreta de la planta:

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)H(s)}{s} \right\} = \frac{-0,0009089(z + 0,9988)(z - 1)}{(z - 0,9971)(z - 1,118)(z - 0,894)}$$

Aplicando la transformación BILINEAL se llega a :

$$GH(w) = GH \left\{ \frac{\left(1 + \frac{wT}{2}\right)}{\left(1 - \frac{wT}{2}\right)} \right\} = \frac{2,751 \times 10^{-7} w(w + 1,649 \times 10^5)(w - 100)}{(w + 0,1428)(w - 5,559)(w + 5,598)}$$





# PÉNDULO INVERTIDO

$$GH(w) = \frac{2,751 \times 10^{-7} w(w + 1,649 \times 10^5)(w - 100)}{(w + 0,1428)(w - 5,559)(w + 5,598)}$$

Los diagramas de Bode y Nyquist se muestra a continuación:

Diagrama de Bode

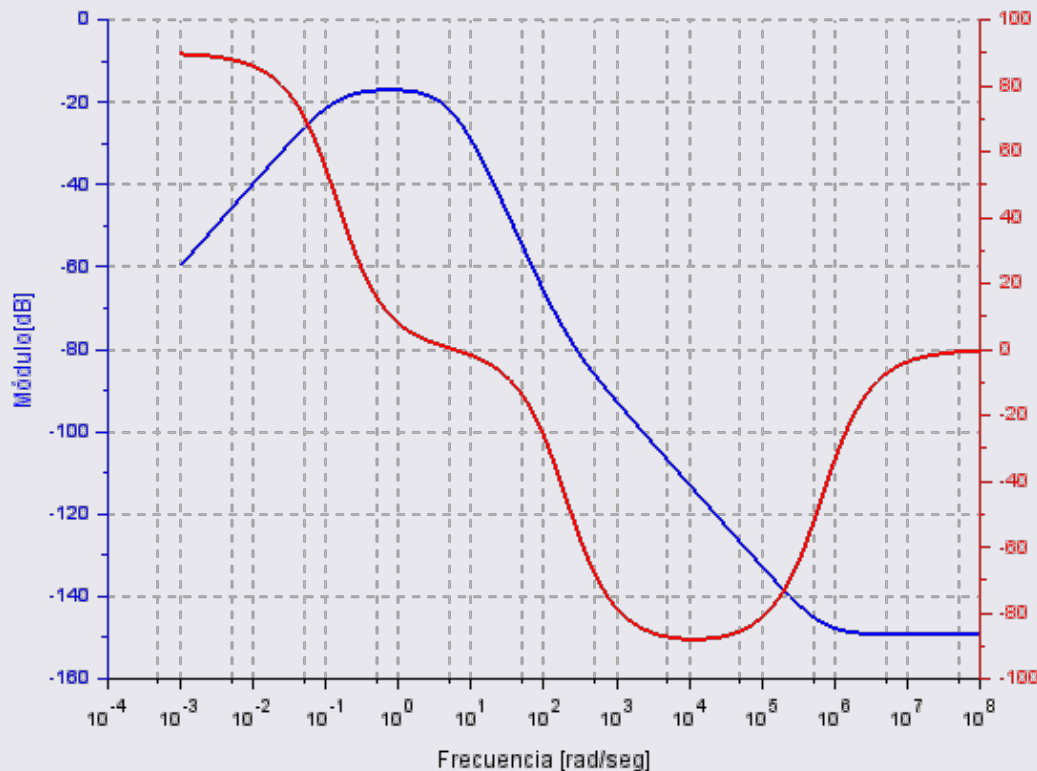
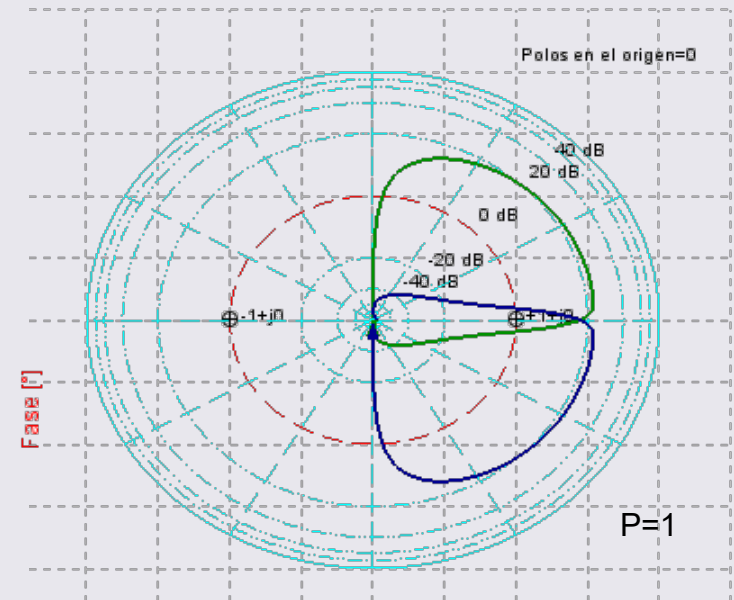


Grafico de Nyquist Logaritmico

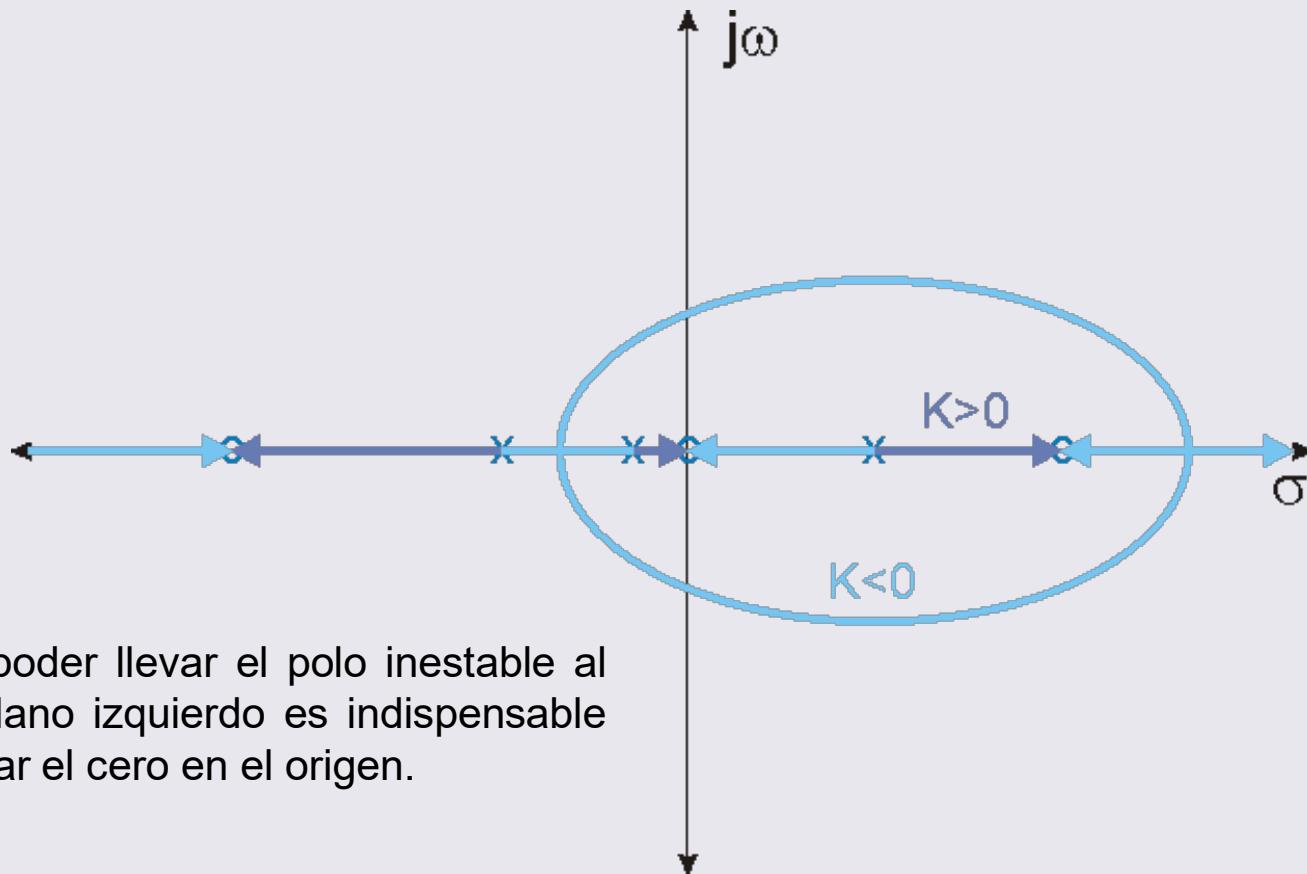


El sistema resulta inestable para cualquier valor de ganancia.



# PÉNDULO INVERTIDO

Analizando el lugar de raíces se puede desarrollar una técnica que permita llevar el sistema, a lazo cerrado, a una condición de estabilidad. Se analiza, en forma cualitativa, el movimiento de las raíces en el plano complejo.



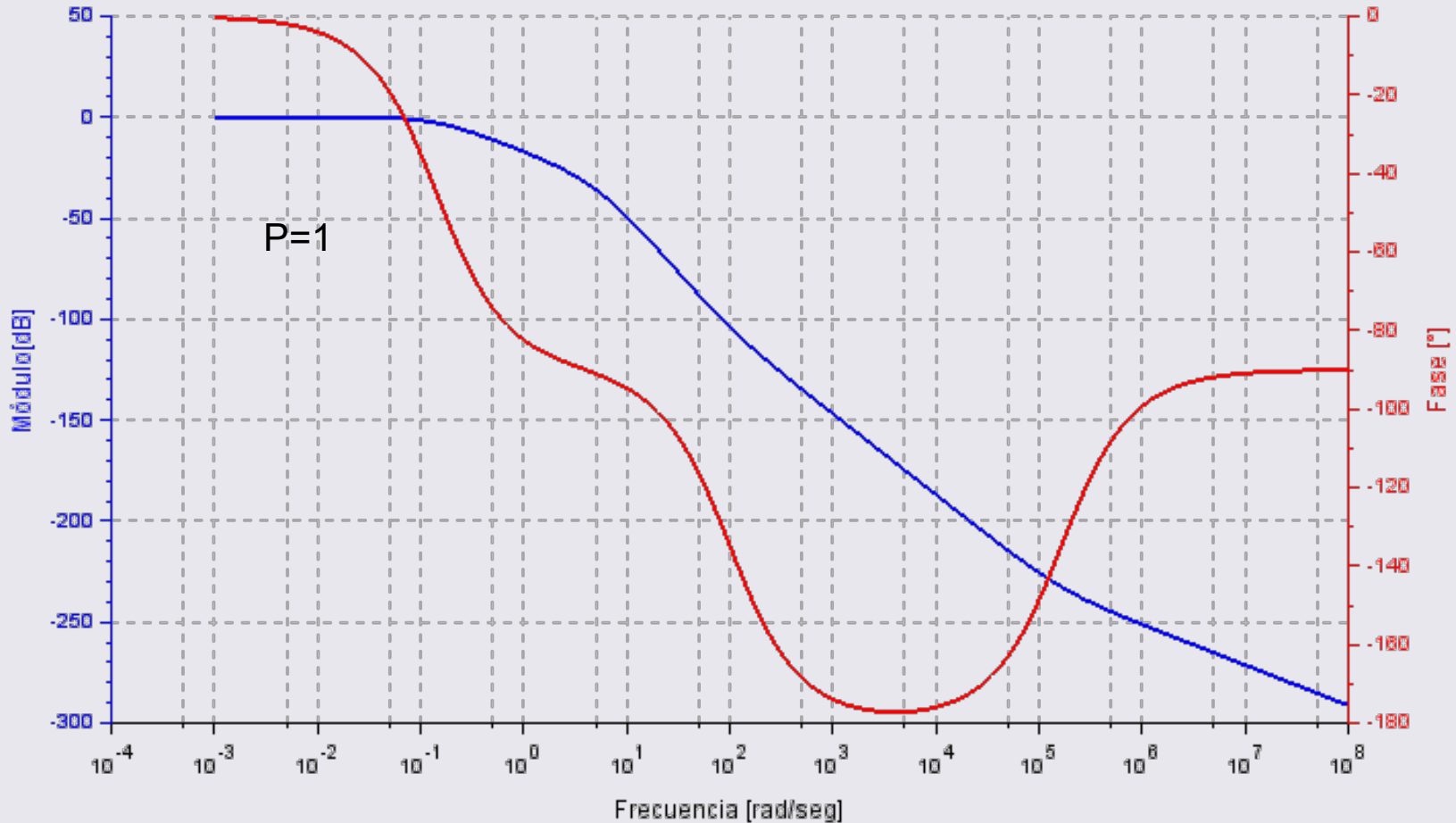
Para poder llevar el polo inestable al semiplano izquierdo es indispensable eliminar el cero en el origen.



# PÉNDULO INVERTIDO

De acuerdo a lo analizado, se agrega un polo en el origen para mejorar la estabilidad. El gráfico respuesta en frecuencia se muestra a continuación.

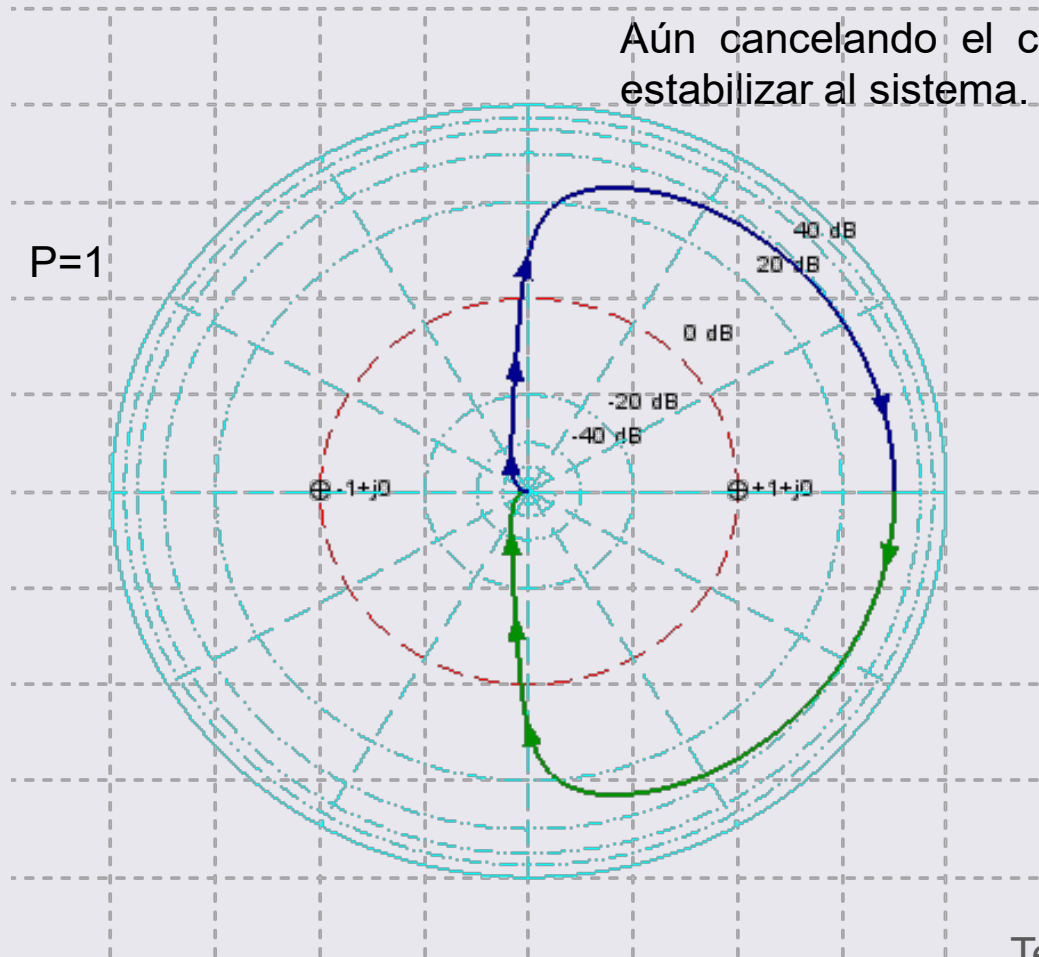
Diagrama de Bode



# PÉNDULO INVERTIDO

De acuerdo a lo analizado, se agrega un polo en el origen para mejorar la estabilidad. El gráfico respuesta en frecuencia se muestra a continuación.

Grafico de Nyquist Logaritmico

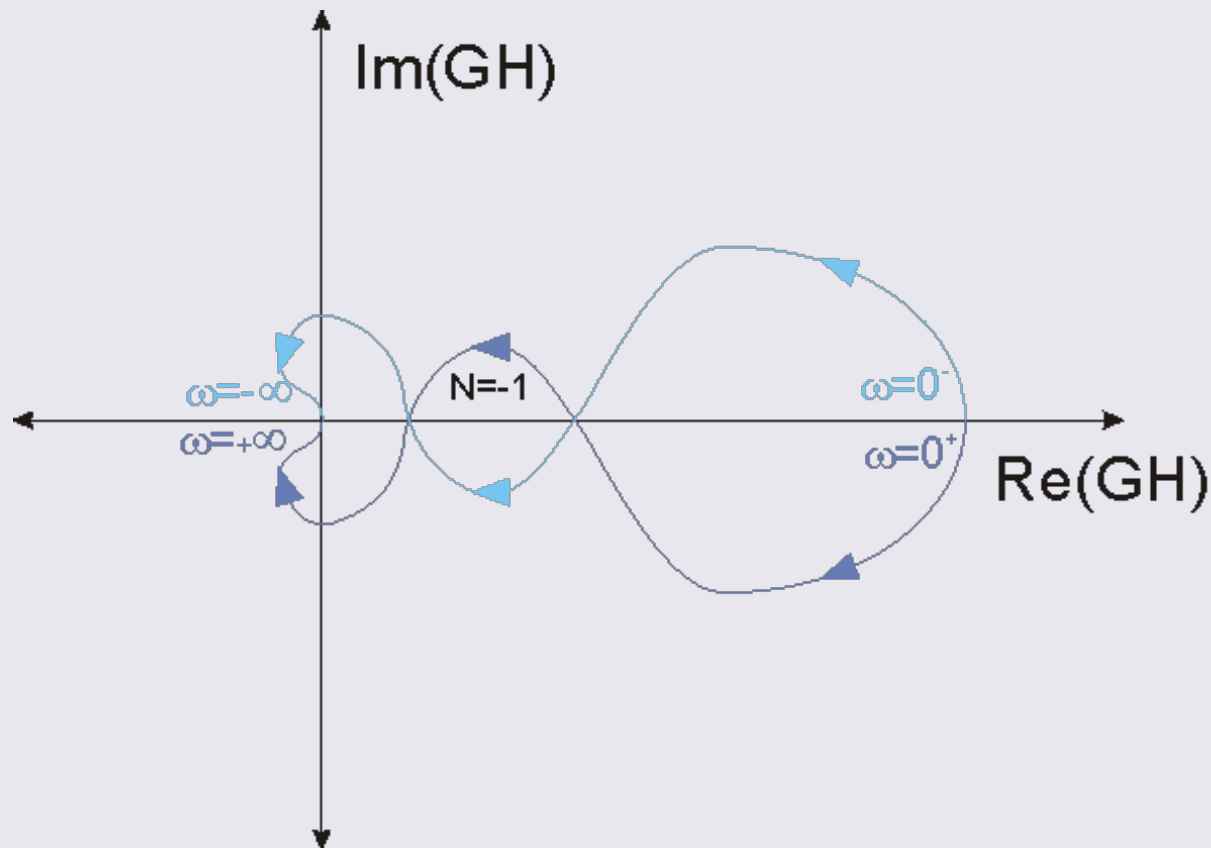


Aún cancelando el cero, resulta imposible estabilizar al sistema.



# PÉNDULO INVERTIDO

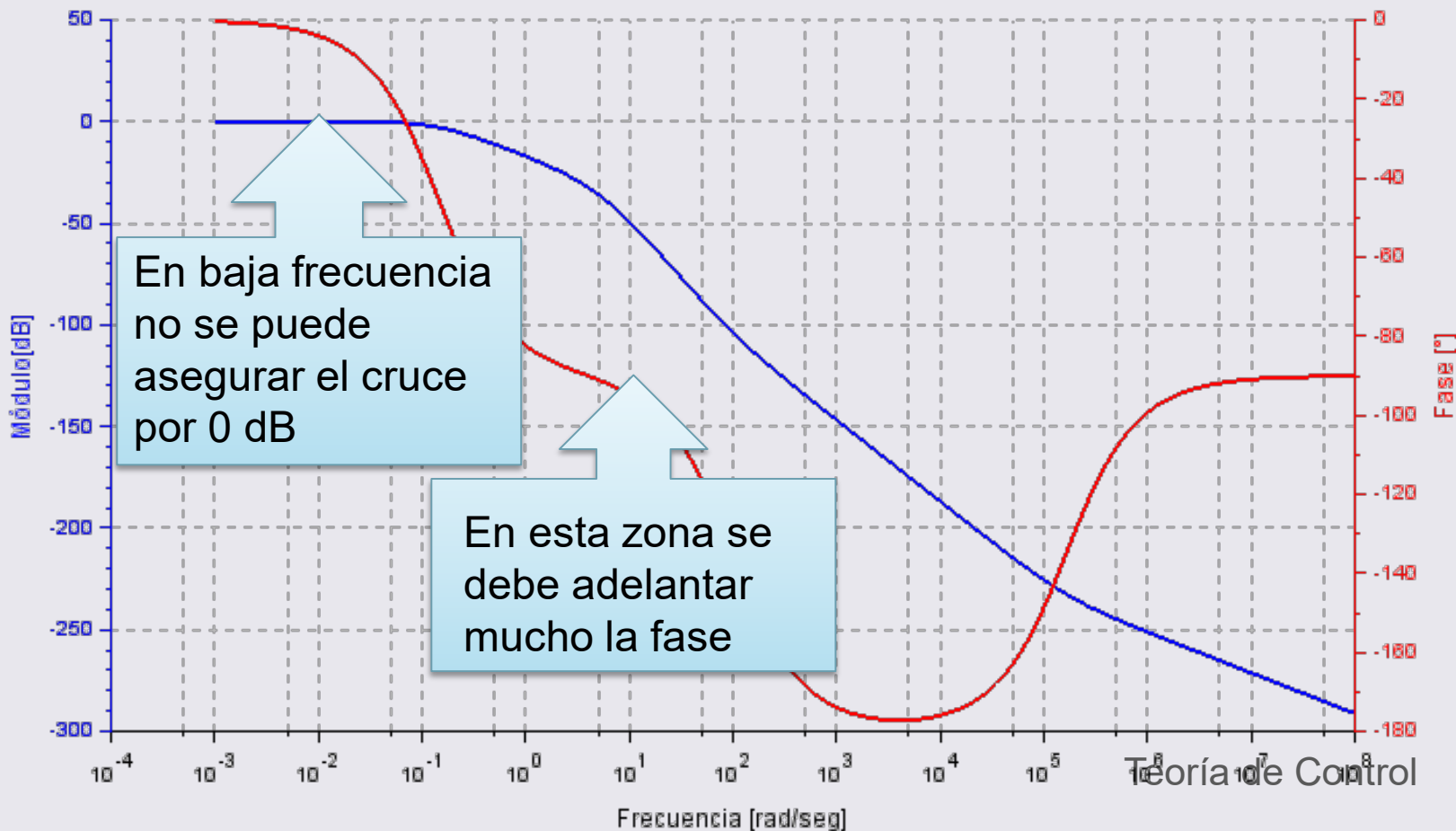
La condición para poder estabilizar el sistema es realimentar positivamente y generar una zona del diagrama de Nyquist en donde  $N=-1$ . Para eso se necesita levantar la fase, para poder superar el valor de  $0^\circ$ . De este modo, el diagrama de Nyquist sería de la siguiente forma:



# PÉNDULO INVERTIDO

Se va a utilizar la técnica de adelanto de fase para modificar la respuesta en frecuencia de acuerdo a lo analizado. Se tener en cuenta que el módulo en el primer cruce por  $0^\circ$  debe ser mayor a uno y en el segundo cruce, menor que la unidad. Por lo tanto, el avance de fase debe hacerse en donde la curva de ganancia tenga un valor que asegure el cruce por cero dB.

Diagrama de Bode



# PÉNDULO INVERTIDO

Se decide realizar el avance de fase centrado en  $\omega=10$  r/s, pero resulta que a esa frecuencia se debe avanzar más de  $90^\circ$ . Se va a utilizar una red doble de avance de  $65^\circ$ . Se procede al diseño de la red:

$$\omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \phi_{\max} = 65^\circ$$

$$\text{sen } \Phi_{MAX} = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = \frac{1 + \text{sen } \Phi_{MAX}}{1 - \text{sen } \Phi_{MAX}} = 20.34$$

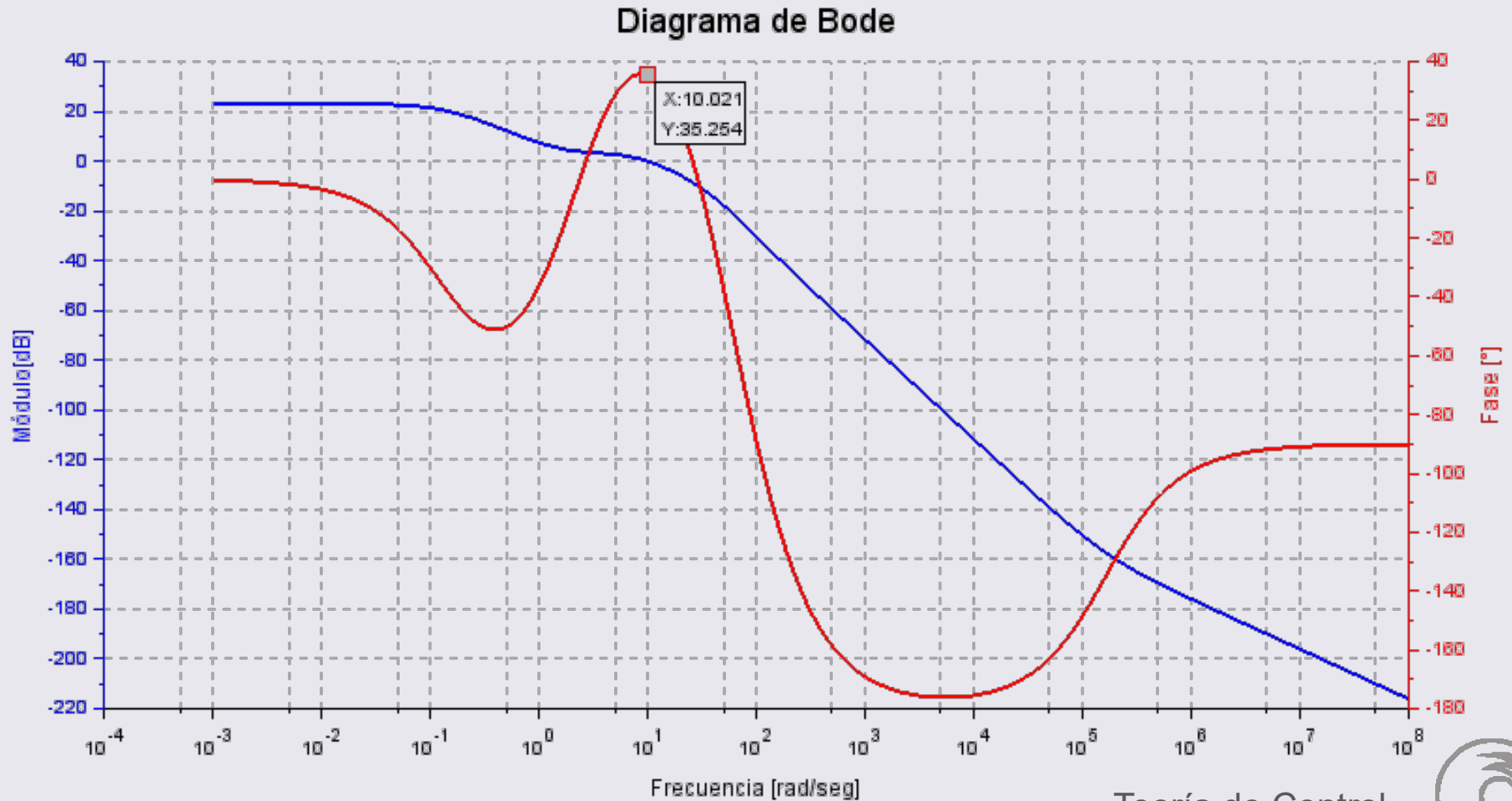
$$\omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{a}} = 2.2169 \quad \omega_p = \sqrt{a} \omega_0 = 45.107$$

$$G_{c1}(w) = \left[ \frac{20,35(w + 2.217)}{(w + 45.11)} \right]^2$$



# PÉNDULO INVERTIDO

Luego, se debe ajustar la ganancia para que el cruce por 0 dB quede dentro de la zona de estabilidad.

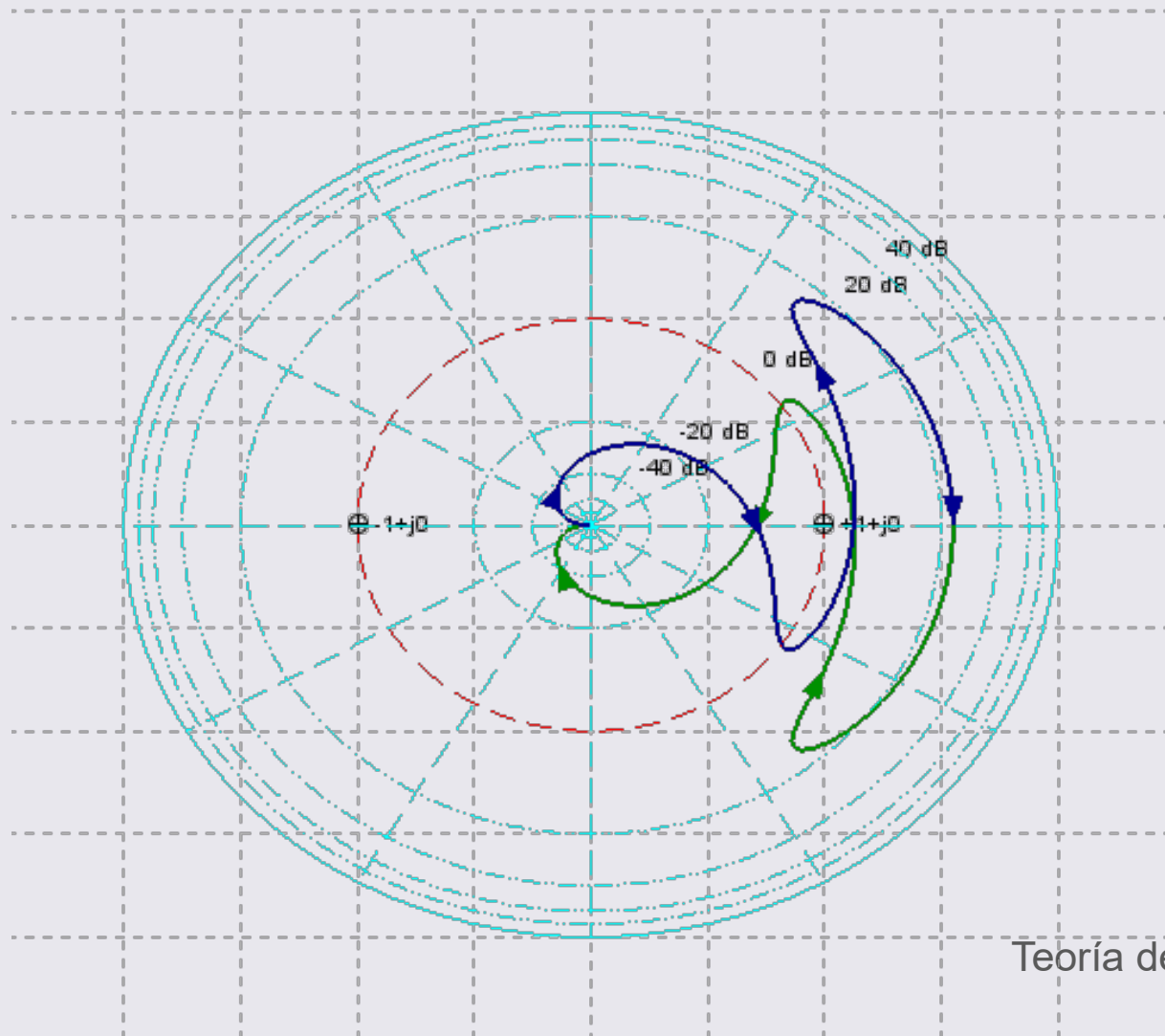




# PÉNDULO INVERTIDO

Finalmente, se muestra el gráfico de Nyquist del sistema compensado.

Grafico de Nyquist Logaritmico



# PÉNDULO INVERTIDO

Se debe aumentar la ganancia aproximadamente 14 veces.  
Finalmente el compensador total queda:

$$G_{CT}(w) = \frac{5796(w + 2.217)^2}{w(w + 45.11)^2}$$

Transformando el compensador a Z:

$$G_{CT}(z) = \frac{28.76(z - 0,9566)^2 (z + 1)}{(z - 0,3783)^2 (z - 1)}$$

El algoritmo de control resulta:

$$u(k) = 28.76 \cdot e(k) - 26.26 \cdot e(k-1) - 28.71 \cdot e(k-2) + 26.32 \cdot e(k-3) + \dots \\ \dots + 1.757 \cdot u(k-1) - 0.8997 \cdot u(k-2) + 0.1431 \cdot u(k-3)$$



# PÉNDULO INVERTIDO

Simulación:

## Simulación del Péndulo Invertido Lazo Cerrado

