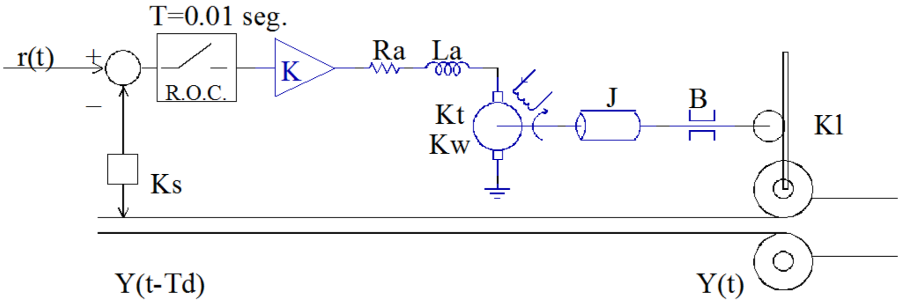
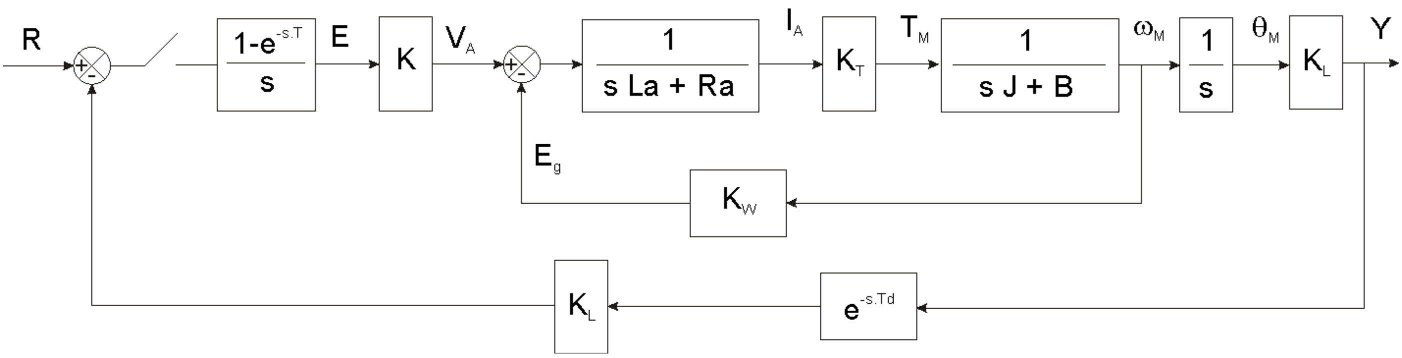
4-5) En el sistema discreto de control de espesor mostrado en la figura, hallar los valores límite de la ganancia para un funcionamiento estable.

Datos:
Ra= 5 Ω .
La= 0
Kt= 0.721 N.m/A
Kw= 0.721 N.m/A
J = 10-3 Kg.m^2
B= 0.01 N.m.seg/rad
Kl= 0.01 m/rev =
= 0.01/2 π m/rad.
Td= 0.01 seg
Ks= 100 V/m.



La característica del modelo es similar al del ejercicio 3-5) . El mismo consta de una planta a lazo abierto que incluye un retardo debido al desplazamiento del sensor y de la velocidad de la cinta.
El diagrama en bloques de la planta realimentada se muestra a continuación:



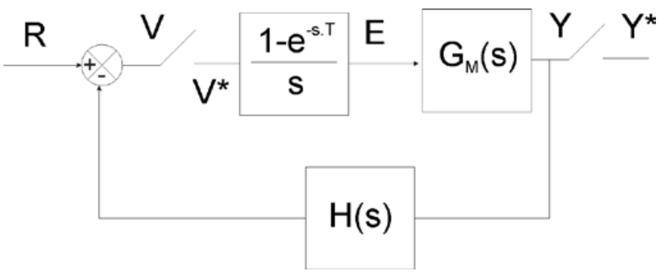
Como el sistema tiene un muestreador se debe analizar a partir de la transformada Z.

Si se calcula la transferencia en avance: $G_M(s)=\dfrac{Y(s)}{E(s)}=\dfrac{K\cdot K_L}{s}\cdot\dfrac{K_t}{s^2L_aJ+s\left(L_aB+R_aJ\right)+\left(R_aB+K_tK_w\right)}$

y considerando La=0 , la transferencia resulta: $G_M(s)=\dfrac{Y(s)}{E(s)}=\dfrac{0.2295\cdot K}{s(s+114)}$

La transferencia de la realimentación es: $H(s)=K_s e^{-sT_d}=100\,e^{-0.01s}$

Para discretizar el modelo se tiene en cuenta el siguiente diagrama en bloques:



A partir del diagrama en bloques se calcula la transferencia discreta a lazo cerrado: $T(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{G(z)}{1+GH(z)}$

donde $G(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G_M(s)}{s}\right\}$ y $GH(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G_M(s)\cdot H(s)}{s}\right\}$

Para determinar las condiciones de estabilidad se debe analizar el denominador de la transferencia a lazo cerrado, en este caso: $1+GH(z)$

Se va a calcular $GH(z)$:

$$GH(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{ \frac{22.95 \cdot K}{s^2\left(s+114\right)} e^{-0.01s} \right\} = \left(1 - z^{-1}\right) z^{-1} \mathcal{Z}\left\{ \frac{0.2014}{s^2} - \frac{0.001767}{s} + \frac{0.001767}{(s+114)} \right\}$$

Se tuvo en cuenta que el valor del retardo equivale a un periodo de muestreo.
Transformando queda:

$$GH(z) = \left(1 - z^{-1}\right) z^{-1} \left(\frac{0.002014 z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} - \frac{0.001767}{\left(1 - z^{-1}\right)} + \frac{0.001767}{\left(1 - e^{-1.14} z^{-1}\right)} \right) = \frac{\left(z-1\right)}{z^2} \left(\frac{0.0008121 z (z+0.6864)}{(z-0,3199)(z-1)^2} \right)$$

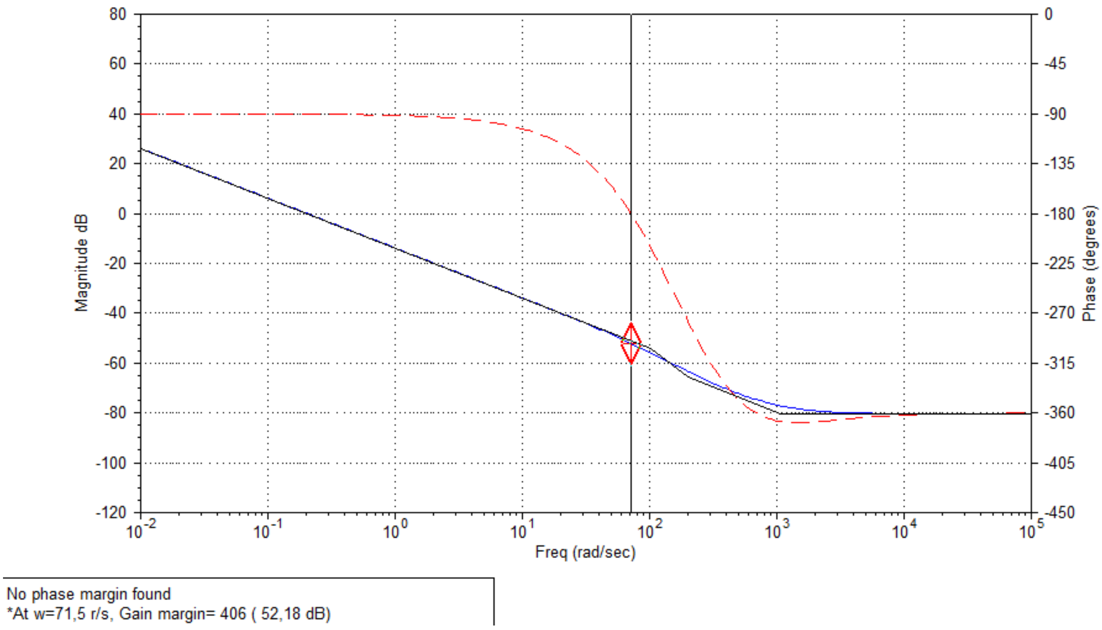
Finalmente:

$$GH(z) = \frac{0.0008121(z+0.6864)}{z(z-0,3191)(z-1)}$$

Para poder aplicar los métodos de análisis de estabilidad de los sistemas continuos se debe aplicar la transformación bilineal: $z = \dfrac{\left(1 + \dfrac{wT}{2}\right)}{\left(1 - \dfrac{wT}{2}\right)}$

Reemplazando se llega a: $GH(w) = \dfrac{9.6471 \times 10^{-5}(w+1076)(w-200)^2}{w(w+103)(w+200)}$

Ahora se puede analizar la estabilidad por ejemplo por diagrama de Bode:



El margen de ganancia es $MG = 52.18\ dB = 406$, por lo tanto los valores que hacen estable al sistema cumplen con: $K \leq 406$

La transferencia de lazo cerrado en z para la ganancia máxima es:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{32.97\left(z + 0.6864\right)}{\left(z + 0.2264\right)\left[\left(z - 0.7732\right)^2 + 0.634^2\right]}$$

Los polos complejos conjugados se encuentran sobre la circunferencia de radio uno.