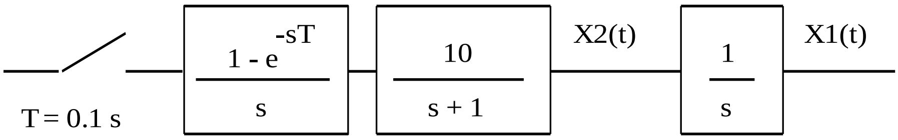
7-1) En la figura se muestra un sistema de control discreto donde x1(t) y x2(t) representan sus variables de estado.



a)Hallar el modelo de estados con variables x1(k) y x2(k).
b)Encontrar el vector de realimentación Kt para llegar a lazo cerrado a una transferencia con un coeficiente de amortiguamiento ξ de 0.46 y una constante de tiempo τ de 0.5 seg.

---

a) Lo primero que se necesita es el modelo de estado continuo del sistema. Las ecuaciones son:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 10 \cdot u(t) - x_2(t)$$

En forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Se debe hallar el modelo de estado discreto, para ello necesito conocer $\left(s \cdot I - A\right)^{-1}$.

$$\left(s \cdot I - A\right) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \;;\; \mathrm{Det}\left(s \cdot I - A\right) = s \cdot \left(s+1\right) \;;\; \mathrm{Adj}\left(s \cdot I - A\right) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\left(s \cdot I - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

La matriz exponencial resulta:

$$e^{At} = L^{-1}\left\{\left(s \cdot I - A\right)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Las matrices del modelo de estado discreto resultan:

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0951626 \\ 0 & 0{,}9048374 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} B \, d\tau = \begin{bmatrix} 0{,}0483742 \\ 0{,}9516258 \end{bmatrix}$$

Finalmente el modelo de estado discreto resulta:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0951626 \\ 0 & 0{,}9048374 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0{,}0483742 \\ 0{,}9516258 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

b) Para calcular el vector de realimentación primero debo determinar si el sistema es controlable.

$$U = \left[B \middle| AB\right] = \begin{bmatrix} 0{,}0483742 & 0{,}1389334 \\ 0{,}9516258 & 0{,}8610666 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det\left(U\right) = -0{,}0905592 \quad \rightarrow \text{ El modelo es controlable}$$

Ahora se debe conocer el polinomio característico deseado, para ello se calculan los autovalores discretos deseados :

$$\xi = 0.46 \qquad \tau = \frac{1}{\xi\omega_n} \quad \Rightarrow \omega_n = 4.34$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1{,}9964 \pm 3{,}8536\, j$$

Los autovalores discretos son: $z_{1,2} = 0{,}75896 \pm 0{,}30786\, j$

Por lo tanto el polinomio deseado resulta: $z^2 - \alpha_2 z + \alpha_1 = z^2 - 1{,}57958z + 0{,}67032$

Ahora se procede a encontrar el polinomio característico:

$$\det(zI - A_d) = \det\begin{bmatrix} z-1 & -0{,}0951626 \\ 0 & z-0{,}9048374 \end{bmatrix} = z^2 - 1{,}905z + 0{,}9048 = z^2 - a_2 z + a_1$$

Las matrices del modelo canónico controlable se calculan a partir de los coeficientes del polinomio característico;

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}9048 & 1{,}905 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{cc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz controlabilidad del modelo canónico es:

$$U_{cc} = \left[B_{cc} \middle| A_{cc} B_{cc} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}9048374 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación al modelo canónico es:

$$Q_{cc}^{-1} = \bar{U}_{cc} U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}9048374 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9{,}5083319 & 1{,}5341721 \\ 10{,}508332 & -0{,}5341721 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}508332 & -0{,}5341721 \\ 10{,}508332 & 0{,}5166611 \end{bmatrix}$$

El vector de realimentación de estado para el modelo canónico resulta:

$$k_{cc}^T = \left[(\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \right] = \left[-0{,}234 \quad 0{,}3869 \right]$$

$$k^T = k_{cc}^T Q_{cc}^{-1} = \left[1{,}6065 \quad 0{,}3249 \right]$$

El modelo realimentado resulta:

$$x(k+1) = \left(A_d - B_d k^T \right) x(k) + B_d u(k) = \begin{bmatrix} 0{,}9222866 & 0{,}0794449 \\ -1{,}5287926 & 0{,}5956370 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0{,}0483742 \\ 0{,}9516258 \end{bmatrix} u(k)$$

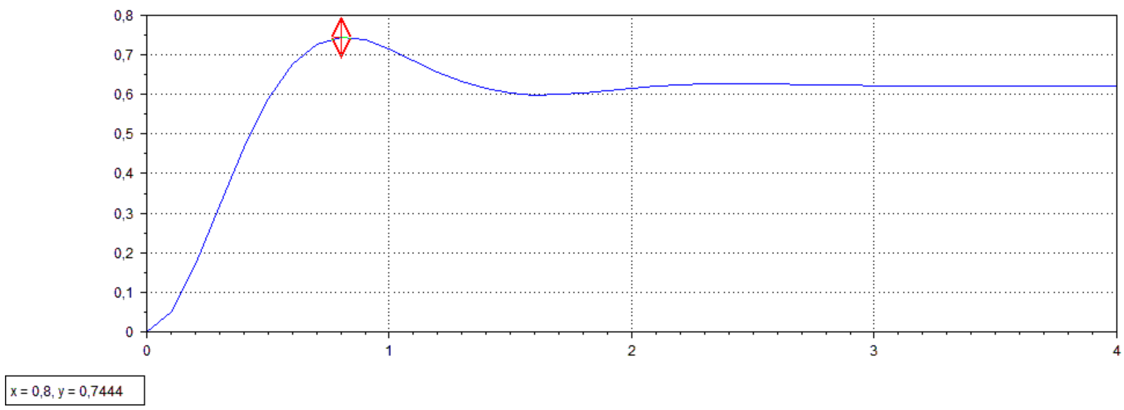
$$y(k) = \left[1 \quad 0 \right] x(k)$$

Y, como no podía ser de otra manera, el modelo realimentado posee los autovalores deseados.

El sobrepico esperado para los autovalores discretos será:

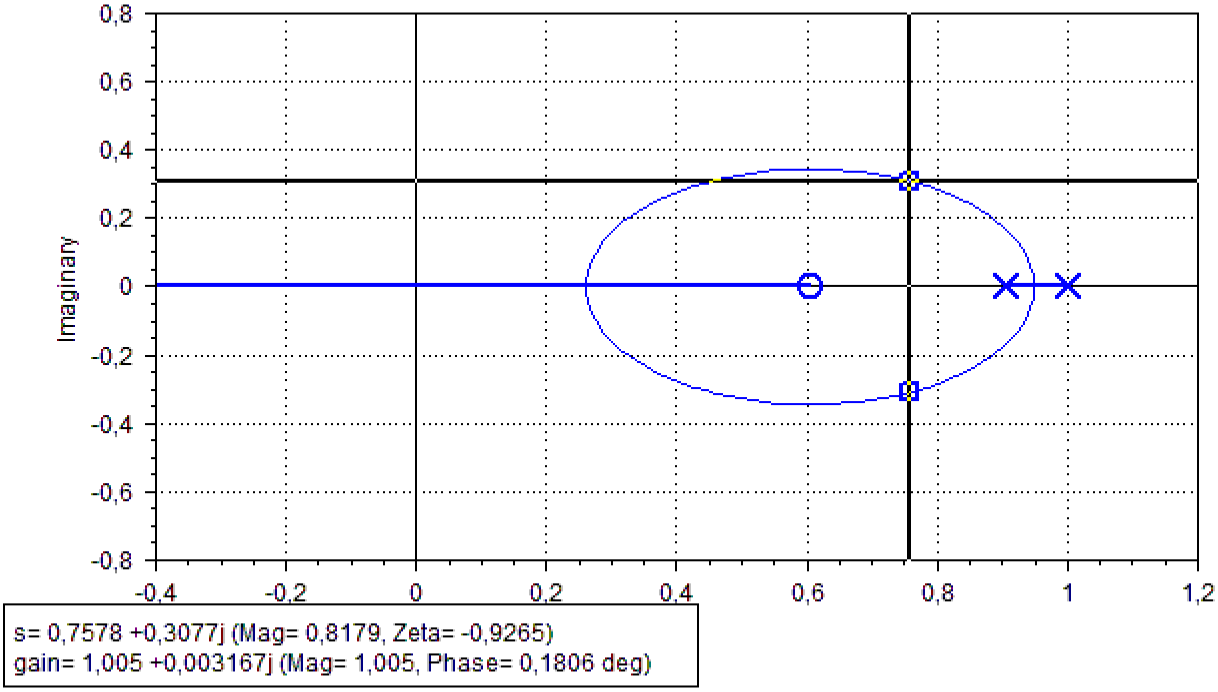
$$SP\ [\%] = 100\ e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 19{,}64\ \%$$

La respuesta del sistema realimentado es la siguiente:



La función de transferencia de lazo abierto se puede calcular como: $GH = k^T \cdot \left(zI - A_d\right)^{-1} \cdot B_d = \dfrac{0,3869(z-0,6049)}{(z-0,9048)(z-1)}$

La transferencia calculada tiene los autovalores de la planta a lazo abierto pero coloca un cero en 0,6049. El efecto del cero puede verse en la trayectoria de las raíces en el plano z. A continuación se va a mostrar el lugar de raíces del sistema discreto:



Puede verse que para ganancia unitaria de lazo abierto K=1 (es decir si el agregado de ganancia adicional) los autovalores pasan por la posición desdeada.