Departamento de Ingeniería
Eléctrica

Universidad Nacional
de Mar del Plata

Área Electrotecnia

FACULTAD
DE INGENIERIA

Electrotecnia

(para la Carrera Ingeniería Mecánica)

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Profesor Adjunto: Ingeniero Electricista y Laboral Gustavo L. Ferro
Mail: gferro@fi.mdp.edu.ar
EDICION 2016

INDICE

Capitulo 4

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

4.1. INTRODUCCION

4.2. SENOIDES

4.3. FASORES

4.4. RELACIONES FASORIALES DE ELEMENTOS DE CIRCUITOS

4.5. IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

4.6. COMBINACIÓN DE IMPEDANCIAS

4.7. EL TEOREMA DE KENNELLY – STEINMETZ

4.8. PROBLEMAS RESUELTOS

- **BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:**

Fundamentos de Circuitos Eléctricos.
Autor: Charles K. Alexander – Mattheu N. O. Sadiku.
Capítulo 9

Circuitos Eléctricos y Magnéticos.
Autor: Marcelo Sobrevila.
Capítulo 3 /Capítulo 4

4.1. Introducción

Hasta ahora el análisis se ha limitado en su mayor parte a circuitos de cd: los circuitos excitados por fuentes constantes o invariantes en el tiempo.
Las fuentes de cd, fueron el principal medio de suministro de energía eléctrica hasta fines del siglo XIX, a finales de ese siglo comenzó la batalla de esa corriente contra la corriente alterna. A causa de que la “ca” es más eficiente y económica para la transmisión a grandes distancias, los sistemas de “ca” terminaron imponiéndose.
Ahora se inicia el análisis de los circuitos en los que la tensión o la corriente de la fuente varían con el tiempo.
En este capítulo nos interesará en particular la excitación senoidal variable con respecto al tiempo, o simplemente excitación por una ***“senoide”.***

Una senoide es una señal que tiene la forma de una función seno o coseno

Una corriente senoidal se conoce usualmente como corriente alterna (ca). Esta corriente se invierte a intervalos regulares y tiene valores alternadamente positivo y negativo. Los circuitos excitados por fuentes de corriente o tensión senoidal se llaman ***circuitos de ca.***
Las senoides interesan por varias razones. Primero, la propia naturaleza es característicamente senoidal. Hay variación senoidal en el movimiento de un péndulo, la vibración de una cuerda y la respuesta natural de sistemas subamortiguados de segundo orden (este tema lo desarrollaremos al estudiar la respuesta de los circuitos en la unidad siguiente)
Segundo, una señal senoidal es fácil de generar y transmitir. Es la forma de la tensión generada en todo el mundo y suministrada a hogares, fábricas, etc. Es la forma dominante de la señal en las industrias de comunicaciones y energía eléctrica.
Tercero, por medio del análisis de Fourier, cualquier señal práctica periódica puede representarse como una suma de senoides.
Por último, una senoide es fácil de manejar de manera matemática. La derivada y la integral de una senoide son ellas mismas senoides.

4.2. Senoides

Considere la tensión senoidal: $v(t) = V_m \, sen \, wt$
donde:

- V_m = amplitud de la senoide
- w = frecuencia angular en rad/seg
- wt = argumento de la senoide

La senoide se muestra en la figura 9.1 a) como función de su argumento, y en la figura 9.1 b) como función del tiempo. Una senoide se repite cada T segundos, así T se llama período de la senoide. En la figura se observa que w T = 2 π. Luego: $T = \dfrac{2\pi}{w}$

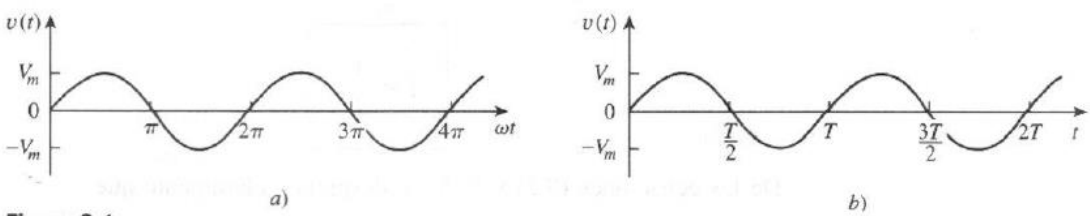


Figura 9.1
Gráfica de V_m sen ωt: *a*) como función de ωt, *b*) como función de *t*.

El hecho de que v(t) se repita cada T segundos se demuestra reemplazando t por t + T la ecuación. Así se obtiene:

$$v(t+T)=V_m \, sen \, w(t+T)=V_m \, sen \, w\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=V_m \, sen(wt+2\pi)=V_m \, sen \, wt=v(t)$$

$v(t+T)=v(t)$ lo cual quiere decir que v tiene el mismo valor en t + T que en t, y se dice que v(t) es periódica.

Una función periódica es aquella que satisface f (t) = f (t + nT) para cualquier t y para cualquier n entero.

Como ya se mencionó, el período T de la función periódica es el tiempo de un ciclo completo, o el número de segundos por ciclo. El recíproco de esta cantidad es el número de ciclos por segundo, conocido como frecuencia cíclica “f” de la senoide. Así, $f=\frac{1}{T}$. De las ecuaciones se desprende que: $w=2\pi f$. Mientras que w está en radianes por segundo (rad/s), f está en hertz (Hz).

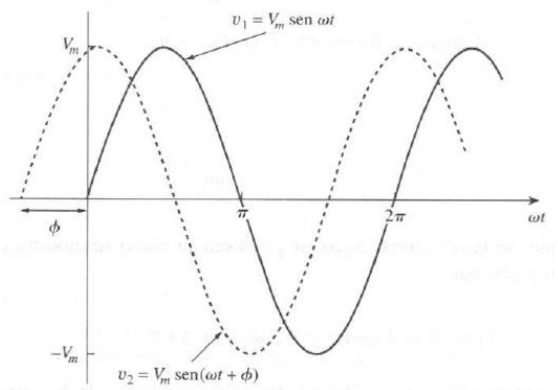


Figura 9.2
Dos senoides con diferentes fases.

Considérese ahora una expresión más general de la senoide: $v(t)=V_m \, sen \, wt+\phi)$

Donde (wt + ϕ) es el argumento y ϕ es la fase. Tanto el argumento como la fase pueden estar en radianes o en grados. Examínense las dos senoides: $v_1(t)=V_m \, sen \, wt$ y $v_2(t)=V_m \, sen(wt+\phi)$ que aparecen en la figura 9.2.

El punto de partida de v_2 en la figura 9.2 ocurre primero en el tiempo. Por lo tanto, se dice de v_2 se adelanta a v_1 en ϕ o que v_1 se atrasa de v_2 en ϕ. Si $\phi \neq 0$, también se dice que v_1 y v_2 están desfasadas. Si $\phi = 0$ se dice que v_1 y v_2 están en fase. Se puede comparar v_1 y v_2 de esta manera porque operan a la misma frecuencia, no es necesario que tengan la misma amplitud.

Una senoide puede expresarse en forma de seno o de coseno. Cuando se comparan dos senoides, es útil expresar ambas como seno o coseno con amplitudes positivas. Esto se realiza usando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}\, A \cos B \pm \cos A \,\text{sen}\, B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen}\, A \,\text{sen}\, B$$

Con estas identidades, es fácil demostrar que

$$\text{sen}(\omega t \pm 180^\circ) = -\text{sen}\,\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t$$
$$\text{sen}(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\text{sen}\,\omega t$$

Ejemplo 9.1: Halle la amplitud, fase, período y frecuencia de la senoide: v(t) = 12 cos (50 t + 10º)

Solución:

La amplitud es $V_m = 12$ V.
La fase es $\phi = 10°$.
La frecuencia angular es $\omega = 50$ rad/s.
El periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{50} = 0.1257$ s.

La frecuencia es $f = \dfrac{1}{T} = 7.958$ Hz.

Ejemplo 9.2: Calcule el ángulo de fase entre $v_1 = -10 \cos(wt + 50º)$ y $v_2 = 12 \operatorname{sen}(wt - 10º)$. Indique cual de ambas senoides está adelantada.

■ MÉTODO 1 Para comparar v_1 y v_2 se debe expresar en la misma forma. Si se expresa en la forma coseno con amplitudes positivas,

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50°) = 10\cos(\omega t + 50° - 180°)$$
$$v_1 = 10\cos(\omega t - 130°) \quad \text{o} \quad v_1 = 10\cos(\omega t + 230°) \qquad \textbf{(9.2.1)}$$

y

$$v_2 = 12\operatorname{sen}(\omega t - 10°) = 12\cos(\omega t - 10° - 90°)$$
$$v_2 = 12\cos(\omega t - 100°) \qquad \textbf{(9.2.2)}$$

De las ecuaciones (9.2.1) y (9.2.2) puede deducirse que la diferencia de fase entre v_1 y v_2 es de 30°. Puede escribirse v_2 como

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 130° + 30°) \quad \text{o} \quad v_2 = 12\cos(\omega t + 260°) \qquad \textbf{(9.2.3)}$$

La comparación de las ecuaciones (9.2.1) y (9.2.3) indica claramente que v_2 se adelanta a v_1 en 30°.

4.3. Fasores

Las senoides se expresan fácilmente en términos de fasores, con los que es más cómodo trabajar que con las funciones seno y coseno.

Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una senoide.

Los fasores brindan un medio sencillo para analizar circuitos lineales excitados por fuentes senoidales, las soluciones de tales circuitos serían impracticables de otra manera. La noción de resolver circuitos de “ca” usando fasores la propuso originalmente Charles Steinmetz en 1893. La definir los fasores y aplicarlos al análisis de circuitos, hay que recordar todo lo conocido del algebra de los números complejos.
La idea de la representación fasorial se basa en la identidad de Euler.
En general: $e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\operatorname{sen}\phi$. Lo que indica que se puede considerar a $\cos\phi$ y $\operatorname{sen}\phi$ como las partes real e imaginaria de $e^{j\phi}$, se puede escribir:

$$\cos\phi = \operatorname{Re}(e^{j\phi}) \qquad \operatorname{sen}\phi = \operatorname{Im}(e^{j\phi})$$

donde Re e Im significan la parte real de y la parte imaginaria de. Dada una senoide $v(t) = V_m \cos(wt + \varnothing)$, podemos expresar a v (t) como :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) \qquad (9.21)$$

o sea

$$v(t) = \mathrm{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \qquad (9.22)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{v(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t})} \qquad (9.23)$$

donde

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi \qquad (9.24)$$

"V" es entonces la representación fasorial de la senoide v (t), como ya se dijo.

Un fasor es una representación compleja de la magnitud y fase de una senoide.

La ecuación 9.23 establece que para obtener la senoide correspondiente a un fasor V dado, se multiplica el fasor por el factor de tiempo e^{jwt} y se toma la parte real. Como cantidad compleja, un fasor puede expresarse en forma rectangular, forma polar o forma exponencial.
Dado que un fasor posee magnitud y fase, se comporta como un vector y se representa en negrita.
Por ejemplo, los fasores **V** = $V_m \angle \varnothing$ e **I** = $I_m \angle -\theta$ se representan gráficamente en la figura 9.8. Esta representación de fasores se conoce como diagrama fasorial.
Las ecuaciones 9.21 a 9.23 revelan que para obtener el fasor correspondiente a una senoide, primero se expresa la senoide en la forma de coseno para que sea posible escribirla como la parte real de un número complejo.

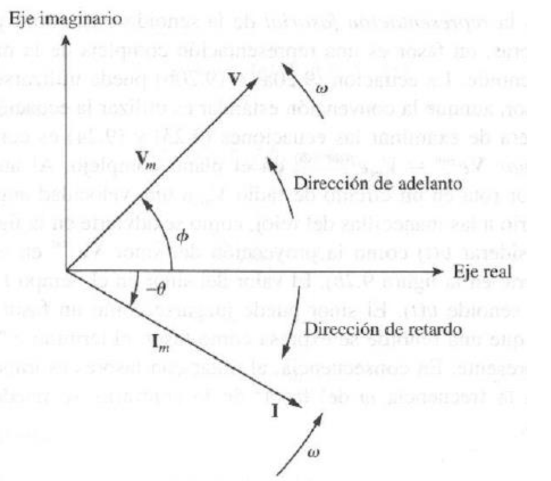


Figura 9.8
Diagrama fasorial de $\mathbf{V} = V_m \angle \phi$ e $\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$.

Después se elimina el factor de tiempo e^{jwt}, y lo que resta es el fasor correspondiente a la senoide. Al suprimir el factor de tiempo, se transforma la senoide del dominio temporal al dominio fasorial. Esta transformación se resume del siguiente modo:

$$\boxed{\underset{\text{(Representación en el dominio temporal)}}{v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(Representación en el dominio fasorial)}}{\mathbf{V} = V_m \angle \phi}} \qquad (9.25)$$

Dada una senoide v(t) = V_m cos (wt + ∅), se obtiene el fasor correspondiente como **V** = $V_m \angle \varnothing$. La ecuación 9.25 se demuestra asimismo en la tabla 9.1 donde se considera la función seno además de la función coseno. En la ecuación 9.25 se advierte que para obtener la representación fasorial de una senoide, esta se expresa en la forma coseno y se toman la magnitud y fase. Dado un fasor, la representación en el dominio temporal se obtiene como la función coseno con la misma magnitud que el fasor y el argumento como wt más la fase del fasor. La idea de expresar información en dominios alternos es fundamental en todas las áreas de la ingeniería.

TABLA 9.1 Transformación senoide-fasor.

Representación en el dominio temporal	Representación en el dominio fasorial
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90°$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90°$

Obsérvese que en la ecuación 9.25 se ha suprimido el factor de frecuencia (o de tiempo) e^{jwt} y que la frecuencia no se muestra explícitamente en la representación en el dominio fasorial, porque w es constante. Sin embargo la respuesta depende de w. Por esa razón el dominio fasorial también se lo conoce como dominio frecuencial.
A partir de las ecuaciones 9.23 y 9.24, v(t) = Re (V e^{jwt}) = V_m cos (wt + ∅), de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90°) \\ &= \operatorname{Re}(\omega V_m e^{j\omega t} e^{j\phi} e^{j90°}) = \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{V} e^{j\omega t}) \end{aligned} \tag{9.26}$$

Esto indica que la derivada de $v(t)$ se transforma al dominio fasorial como $j\omega\mathbf{V}$,

$$\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad j\omega\mathbf{V} \tag{9.27}$$

(Dominio temporal) **(Dominio fasorial)**

De igual modo, la integral de $v(t)$ se transforma al dominio fasorial como $\mathbf{V}/j\omega$,

$$\int v\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{V}}{j\omega} \tag{9.28}$$

(Dominio temporal) **(Dominio fasorial)**

La ecuación 9.27 permite el reemplazo de una derivada respecto al tiempo por la multiplicación de **jw** en el dominio fasorial, mientras que la ecuación 9.28 permite el reemplazo de una integral respecto al tiempo por la división entre **jw** en el dominio fasorial.
Las ecuaciones 9.27 y 9.28 son útiles en la determinación de la solución en estado estable, la cual no requiere conocer los valores iniciales de las variables implicadas. Esta es una de las aplicaciones importantes de los fasores.
Además de la derivación e integración respecto del tiempo, otro importante uso de los fasores reside en la suma de senoides de la misma frecuencia.
Conviene subrayar las diferencias entre v(t) y V:

1. v(t) es la representación instantánea o en el dominio temporal, mientras que **V** es la representación de frecuencia o en el dominio fasorial.
2. v(t) depende del tiempo, mientras que **V** no.
3. v(t) siempre es real y no tiene ningún término complejo, mientras que **V** es generalmente compleja.

Finalmente, se debe tener presente que ***el análisis fasorial solo se aplica cuando la frecuencia es constante***; se aplica en la manipulación de dos o más señales senoidales sólo si son de la misma frecuencia.

Ejemplo 9.3

Evalúe estos números complejos:

a) $(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2}$

b) $\dfrac{10\angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*}$

Solución:

a) Al aplicar la transformación de coordenadas polares a rectangulares,

$$40\angle 50^\circ = 40(\cos 50^\circ + j\,\mathrm{sen}\,50^\circ) = 25.71 + j30.64$$

$$20\angle -30^\circ = 20[\cos(-30^\circ) + j\,\mathrm{sen}(-30^\circ)] = 17.32 - j10$$

La suma da por resultado

$$40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ = 43.03 + j20.64 = 47.72\angle 25.63^\circ$$

Calculando la raíz cuadrada de esta expresión,

$$(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2} = 6.91\angle 12.81^\circ$$

b) Al aplicar la transformación polar-rectangular, suma, multiplicación y división,

$$\frac{10\angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*} = \frac{8.66 - j5 + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 + j5)}$$

$$= \frac{11.66 - j9}{-14 + j22} = \frac{14.73\angle -37.66^\circ}{26.08\angle 122.47^\circ}$$

$$= 0.565\angle -160.13^\circ$$

Ejemplo 9.4: Transforme estas senoides en fasores:

a) $i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ A
b) $v = -4\,\mathrm{sen}(30t + 50^\circ)$ V

Solución:

a) $i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ tiene el fasor

$$\mathbf{I} = 6\angle -40^\circ \text{ A}$$

b) Puesto que $-\mathrm{sen}\,A = \cos(A + 90^\circ)$,

$$v = -4\,\mathrm{sen}(30t + 50^\circ) = 4\cos(30t + 50^\circ + 90^\circ) = 4\cos(30t + 140^\circ) \text{ V}$$

La forma fasorial de v es

$$\mathbf{V} = 4\angle 140^\circ \text{ V}$$

Ejemplo 9.5: Halle las senoides representadas por estos fasores: a) I = -3 + j 4 A , b) V = j 8 e^{-j20°

Solución:

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 = 5\angle 126.87°$. Transformando al dominio del tiempo

$$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87°)\ \text{A}$$

b) Puesto que $j = 1\angle 90°$,

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = j8\angle -20° &= (1\angle 90°)(8\angle -20°)\\ &= 8\angle 90° - 20° = 8\angle 70°\ \text{V}\end{aligned}$$

La transformación de esto al dominio temporal da por resultado

$$v(t) = 8\cos(\omega t + 70°)\ \text{V}$$

Ejemplo 9.6

Dadas $i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30°)$ A e $i_2(t) = 5\,\text{sen}(\omega t - 20°)$ A, halle su suma.

Solución:
Éste es un uso importante de los fasores: para la suma de senoides de la misma frecuencia. La corriente $i_1(t)$ está en la forma estándar. Su fasor es

$$\mathbf{I}_1 = 4\angle 30°$$

Se debe expresar $i_2(t)$ en la forma de coseno. La regla para convertir el seno en coseno es restar 90°. Así,

$$i_2 = 5\cos(\omega t - 20° - 90°) = 5\cos(\omega t - 110°)$$

y su fasor es

$$\mathbf{I}_2 = 5\angle -110°$$

Si se concede que $i = i_1 + i_2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 &= 4\angle 30° + 5\angle -110°\\ &= 3.464 + j2 - 1.71 - j4.698 = 1.754 - j2.698\\ &= 3.218\angle -56.97°\ \text{A}\end{aligned}$$

Al transformar esto al dominio temporal se obtiene

$$i(t) = 3.218\cos(\omega t - 56.97°)\ \text{A}$$

Desde luego que se puede hallar $i_1 + i_2$ mediante la ecuación (9.9), pero ése es el método difícil.

Ejemplo 9.7

Aplicando el método fasorial, determine la corriente $i(t)$ en un circuito descrito por la ecuación integrodiferencial

$$4i + 8\int i\,dt - 3\frac{di}{dt} = 50\cos(2t + 75°)$$

Solución:
Se transforma cada término de la ecuación del dominio temporal al fasorial. Teniendo en cuenta las ecuaciones (9.27) y (9.28), se obtiene la forma fasorial de la ecuación dada como

$$4\mathbf{I} + \frac{8\mathbf{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbf{I} = 50\angle 75°$$

Pero $\omega = 2$, así que

$$\mathbf{I}(4 - j4 - j6) = 50\angle 75°$$

$$\mathbf{I} = \frac{50\angle 75°}{4 - j10} = \frac{50\angle 75°}{10.77\angle -68.2°} = 4.642\angle 143.2°\ \text{A}$$

Al convertir esto al dominio temporal,

$$i(t) = 4.642\cos(2t + 143.2°)\ \text{A}$$

Tenga presente que ésta es sólo la solución de estado estable, y que no se requiere conocer los valores iniciales.

4.4. Relaciones fasoriales de elementos de circuitos

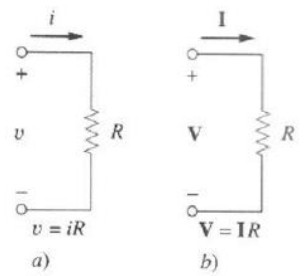


Figura 9.9
Relaciones de tensión-corriente de un resistor en el: *a*) dominio temporal, *b*) dominio frecuencial.

Ahora que ya se sabe como representar una tensión o una corriente en el dominio fasorial o frecuencial, nos podríamos preguntar cómo aplicar eso a circuitos que implican a los elementos pasivos R, L y C.
Lo que se debe hacer es transformar la relación de tensión – corriente del dominio temporal al dominio frecuencial en cada elemento. Hay que adoptar de nuevo la convención pasiva de signos.

- ***Comencemos por el resistor R.***

Si la corriente que circula por el resistor R es $i(t) = I_m \cos(wt + \varnothing)$, la tensión a través de él está dada por la ley de Ohm como:
$v(t) = i R = R I_m \cos(wt + \varnothing)$
La forma fasorial de esta tensión es: $\mathbf{V} = R\,\mathbf{I_m} \angle \varnothing$
Pero la representación fasorial de la corriente es $\mathbf{I} = \mathbf{I_m} \angle\varnothing$.
Así : $\mathbf{V} = R\,\mathbf{I}$
Lo que indica que la relación tensión – corriente del resistor en el dominio fasorial sigue siendo la ley de Ohm, como en el dominio temporal. La figura 9.9 ilustra las relaciones de tensión – corriente de un resistor. Cabe señalar respecto de la ecuación que tensión y corriente están en fase, como se ilustra en el diagrama fasorial de la figura 9.10.

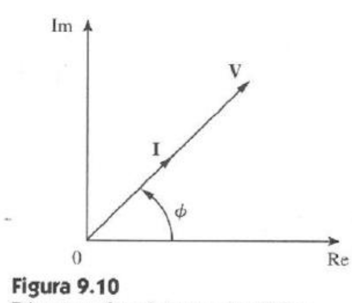


Figura 9.10
Diagrama fasorial para el resistor.

- ***En cuanto al inductor L,*** supóngase que la corriente que circula por él es i = I_m cos (wt + ∅). Así, la tensión a través del inductor es:

$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{9.32}$$

Recuérdese que – sen A = cos (A + 90º). Se puede escribir la tensión como:

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90°) \tag{9.33}$$

Lo que al transformar en la forma fasorial da por resultado:

$$\mathbf{V} = \omega L I_m e^{j(\phi+90°)} = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90°} = \omega L I_m \underline{/\phi + 90°} \tag{9.34}$$

Pero I_m ∠∅ = I, y con base en la ecuación $e^{j\,90°}$ = j. Por lo tanto, **V** = *jwL* **I**
Lo cual indica que la tensión tiene una magnitud de wLI_m y una fase de ∅ + 90º. La tensión y la corriente están desfasadas 90º. Específicamente, la corriente se atrasa de la tensión en 90º. En la figura 9.11 se muestran las relaciones tensión – corriente del inductor. En la figura 9.12 se muestra el diagrama fasorial.

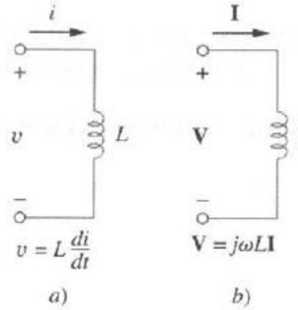


Figura 9.11
Relaciones de tensión-corriente de un inductor en el: *a*) dominio temporal, *b*) dominio de frecuencia.

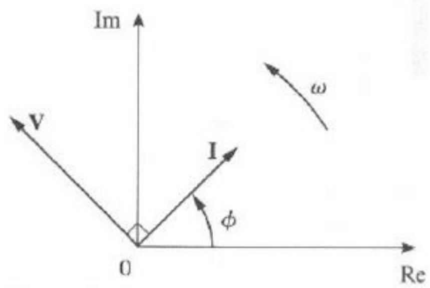


Figura 9.12
Diagrama fasorial para el inductor; **I** se atrasa de **V**.

- ***En cuanto al capacitor C***, supóngase que la tensión a través de él es v (t) = V_m cos (wt + ∅). La corriente a través del capacitor:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Al seguir los mismos pasos dados en el caso del inductor, la corriente en forma fasorial resulta:

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

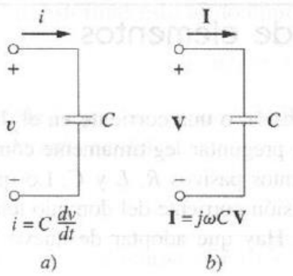


Figura 9.13
Relaciones de tensión-corriente del capacitor en el: *a*) dominio temporal, *b*) dominio frecuencial.

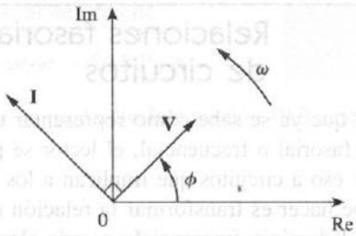


Figura 9.14
Diagrama fasorial para el capacitor; **I** se adelanta a **V**.

Lo que indica que la corriente y la tensión están desfasadas 90º. Para ser más específicos, la corriente se adelanta a la tensión en 90º. En la figura 9.13 aparecen las relaciones tensión – corriente del capacitor, y en la figura 9.14 el diagrama fasorial.
En la tabla 9.2 se resumen las representaciones en el dominio temporal y en el dominio fasorial de estos elementos de circuitos.

TABLA 9.2 Resumen de relaciones de tensión-corriente.

Elemento	Dominio temporal	Dominio de frecuencia
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

Ejemplo 9.8

La tensión $v = 12\cos(60t + 45°)$ se aplica a un inductor de 0.1 H. Halle la corriente en estado estable que circula por el inductor.

Solución:
En el caso del inductor, $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$, donde $\omega = 60$ rad/s y $\mathbf{V} = 12\underline{/45°}$ V. Así,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12\underline{/45°}}{j60 \times 0.1} = \frac{12\underline{/45°}}{6\underline{/90°}} = 2\underline{/-45°} \text{ A}$$

Al convertir esto al dominio temporal,

$$i(t) = 2\cos(60t - 45°) \text{ A}$$

4.5. Impedancia y Admitancia

En la anterior se obtuvieron las relaciones de tensión – corriente de los tres elementos pasivos como:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}, \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \tag{9.38}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en términos de la razón entre la tensión fasorial y la corriente fasorial como:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R, \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L, \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} \tag{9.39}$$

De estas tres expresiones se obtiene la ley de Ohm en forma fasorial para cualquier tipo de elemento como:

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \text{o sea} \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}} \tag{9.40}$$

Donde Z es una cantidad dependiente de la frecuencia conocida como impedancia, medida en ohms.

La **impedancia Z** de un circuito es la razón entre la tensión fasorial **V** y la corriente fasorial **I**, medida en ohms (Ω).

La impedancia representa la oposición que exhibe el circuito al flujo de la corriente senoidal. Aunque es la relación entre dos fasores, la impedancia NO ES UN FASOR, porque no corresponde a una cantidad que varíe senoidalmente.
Las impedancias de resistores, inductores y capacitores pueden obtenerse fácilmente de la ecuación 9.39.

En la tabla 9.3 se resumen esas impedancias. De ella se desprende que **Z_L = j wL y Z_C = - j /wC.**

TABLA 9.3

Impedancias y admitancias de elementos pasivos.

Elemento	Impedancia	Admitancia
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

Considérense dos casos extremos de frecuencia angular. Cuando w = 0 (es decir circuitos alimentados por fuentes de cc), $Z_L = 0$ y $Z_C \to \infty$, lo que confirma lo que ya se sabe:

a) un inductor actúa como un cortocircuito, en tanto que el capacitor lo hace como un circuito abierto.
b) Cuando $w \to \infty$ (es decir para las altas frecuencias) $Z_C = 0$ y $Z_L \to \infty$, lo que indica que el inductor es un circuito abierto en altas frecuencias, en tanto el capacitor es un cortocircuito.

En la figura 9.15 pueden verse estas relaciones.

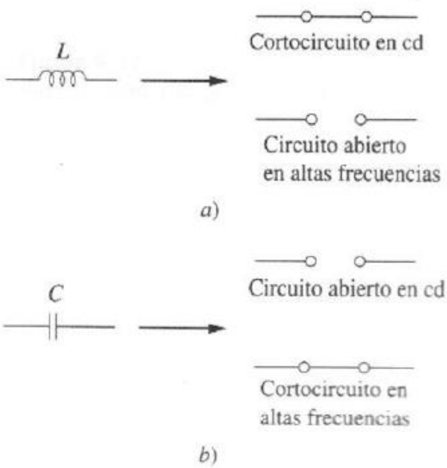


Figura 9.15
Circuitos equivalentes en cd y altas frecuencias: *a*) inductor, *b*) capacitor.

Como cantidad compleja, la impedancia puede expresarse en forma rectangular como:

$$\mathbf{Z = R + j\,X}$$

Donde **R = Re Z** es ***la resistencia*** y **X = Im Z** es la ***reactancia***.
La reactancia X puede ser positiva o negativa. Se dice que la impedancia es inductiva cuando X es positiva y capacitiva cuando X es negativa.
Así, se dice que la impedancia Z = R + j X es inductiva o de retardo, puesto que la corriente atrasa a la tensión, mientras que la impedancia Z = R – j X es capacitiva o en adelanto, puesto que la corriente adelanta a la tensión. La impedancia, la resistencia y las reactancias se miden en ohms. La impedancia también puede expresarse en forma polar como.

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta \qquad (9.42)$$

Al comparar las ecuaciones (9.41) y (9.42) se infiere que

$$\boxed{\mathbf{Z} = R + jX = |\mathbf{Z}|\angle\theta} \qquad (9.43)$$

donde

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{X}{R} \qquad (9.44)$$

y

$$R = |\mathbf{Z}|\cos\theta, \qquad X = |\mathbf{Z}|\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (9.45)$$

A veces resulta conveniente trabajar con el inverso de la impedancia, conocido como admitancia.

La admitancia Y es el inverso de la impedancia, medido en siemens (S)

La admitancia **Y** de un elemento (o circuito) es la razón entre la corriente fasorial y la tensión fasorial a través de él, o sea

$$\boxed{\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}} \qquad (9.46)$$

Las admitancias de resistores, inductores y capacitores pueden obtenerse de la ecuación (9.39). También se resumen en la tabla 9.3.

Como cantidad compleja, se puede escribir **Y** como

$$\boxed{\mathbf{Y} = G + jB} \qquad (9.47)$$

donde $G = \text{Re}\,\mathbf{Y}$ se llama *conductancia* y $B = \text{Im}\,\mathbf{Y}$ se llama *susceptancia*. La admitancia, la conductancia y la susceptancia se expresan en siemens (o mhos). Con base en las ecuaciones (9.41) y (9.47),

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \tag{9.48}$$

Por racionalización,

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \tag{9.49}$$

La igualación de las partes real e imaginaria da como resultado

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \tag{9.50}$$

lo que indica que $G \neq 1/R$ como en los circuitos resistivos. Por supuesto que si $X = 0$, entonces $G = 1/R$.

Ejemplo 9.9

Halle $v(t)$ e $i(t)$ en el circuito que aparece en la figura 9.16.

Solución:

A partir de la fuente de tensión $10 \cos 4t$, $\omega = 4$,

$$\mathbf{V}_s = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

La impedancia es

$$\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = 5 - j2.5\ \Omega$$

Así, la corriente,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2} = 1.6 + j0.8 = 1.789\angle 26.57^\circ \text{ A} \tag{9.9.1}$$

La tensión a través del capacitor es

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789\angle 26.57^\circ}{j4 \times 0.1} = \frac{1.789\angle 26.57^\circ}{0.4\angle 90^\circ} = 4.47\angle -63.43^\circ \text{ V} \tag{9.9.2}$$

Al convertir **I** y **V** de las ecuaciones (9.9.1) y (9.9.2) al dominio temporal se obtiene

$$i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) \text{ A}$$

$$v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ) \text{ V}$$

Nótese que $i(t)$ se adelanta a $v(t)$ en 90°, como era de esperar.

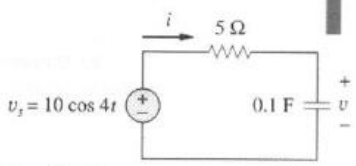


Figura 9.16
Para el ejemplo 9.9.

4.6. Combinación de impedancias

Considérense las N impedancias conectadas en serie que aparecen en la figura 9.18. A través de ellas fluye la misma corriente $\mathbf{I}$. La aplicación de la LTK a lo largo del lazo da

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_N) \tag{9.58}$$

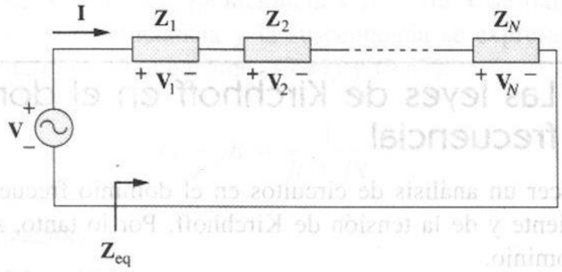


Figura 9.18
N impedancias en serie.

La impedancia equivalente en las terminales de entrada es

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_N$$

o sea

$$\boxed{\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_N} \tag{9.59}$$

lo que indica que la impedancia total o equivalente de impedancias conectadas en serie es la suma de cada una de las impedancias individuales. Esto se asemeja a la conexión de resistencias en serie.

Si $N = 2$, como se muestra en la figura 9.19, la corriente que circula por las impedancias es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{9.60}$$

Puesto que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}$, entonces

$$\boxed{\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}} \tag{9.61}$$

la cual es la relación de *división de tensión*.

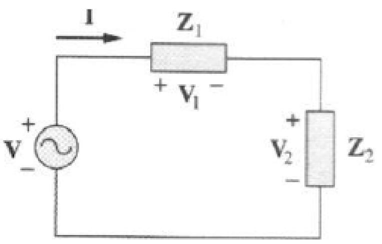


Figura 9.19
División de tensión.

De la misma manera, se puede obtener la impedancia o admitancia equivalente de las N impedancias conectadas en paralelo que se presentan en la figura 9.20. La tensión en cada impedancia es la misma. Al aplicar la LCK al nodo superior,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_N = \mathbf{V}\left(\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N}\right) \tag{9.62}$$

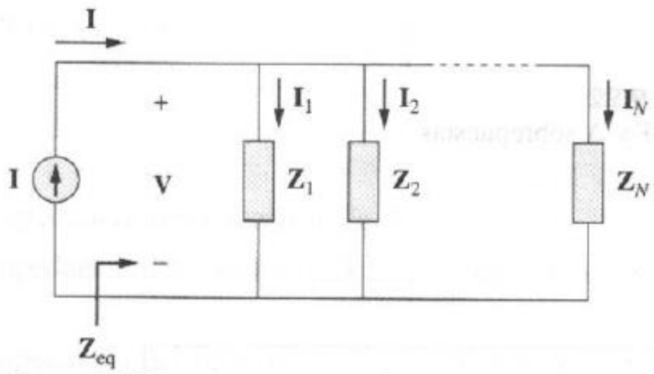


Figura 9.20
N impedancias en paralelo.

La impedancia equivalente es

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N} \tag{9.63}$$

y la admitancia equivalente es

$$\boxed{\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_N} \tag{9.64}$$

Esto indica que la admitancia equivalente de una conexión de admitancias en paralelo es la suma de las admitancias individuales.

Cuando $N = 2$, como se muestra en la figura 9.21, la impedancia equivalente se convierte en

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} = \frac{1}{1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{9.65}$$

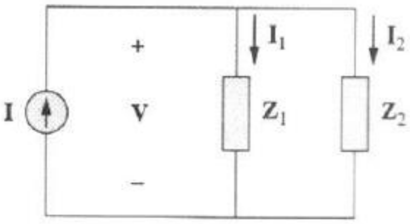


Figura 9.21
División de corriente.

Asimismo, puesto que

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2$$

las corrientes en las impedancias son

$$\boxed{\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}} \tag{9.66}$$

que es el principio del *divisor de corriente.*

Ejemplo 9.10

Halle la impedancia de entrada del circuito de la figura 9.23. Suponga que el circuito opera a $\omega = 50$ rad/s.

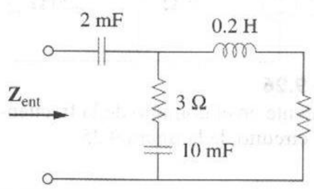


Figura 9.23
Para el ejemplo 9.10.

Solución:
Sean

$\mathbf{Z}_1$ = Impedancia del capacitor de 2 mF

$\mathbf{Z}_2$ = Impedancia del resistor de 3 Ω en serie con el capacitor de 10 mF

$\mathbf{Z}_3$ = Impedancia del inductor de 0.2 H en serie con el resistor de 8 Ω

Así,

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \times 2 \times 10^{-3}} = -j10\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \times 10 \times 10^{-3}} = (3 - j2)\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \times 0.2 = (8 + j10)\ \Omega$$

La impedancia de entrada es

$$\mathbf{Z}_{en} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}_3 = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{11 + j8}$$

$$= -j10 + \frac{(44 + j14)(11 - j8)}{11^2 + 8^2} = -j10 + 3.22 - j1.07\ \Omega$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_{ent} = 3.22 - j11.07\ \Omega$$

Ejemplo 9.11

Determine $v_o(t)$ en el circuito de la figura 9.25.

Solución:

Para hacer el análisis en el dominio de la frecuencia, primero se debe transformar el circuito en el dominio temporal de la figura 9.25 al equivalente en el dominio fasorial de la figura 9.26. Esta transformación produce

$$v_s = 20\cos(4t - 15^\circ) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_s = 20\underline{/-15^\circ}\ \text{V}, \qquad \omega = 4$$

$$10\ \text{mF} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4 \times 10 \times 10^{-3}} = -j25\ \Omega$$

$$5\ \text{H} \quad \Rightarrow \quad j\omega L = j4 \times 5 = j20\ \Omega$$

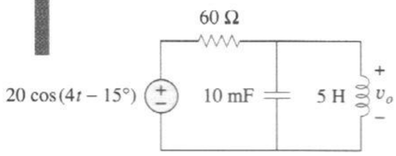


Figura 9.25
Para el ejemplo 9.11.

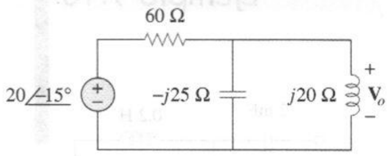


Figura 9.26
Equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito de la figura 9.25.

Sean

$\mathbf{Z}_1$ = Impedancia del resistor de 60 Ω

$\mathbf{Z}_2$ = Impedancia de la combinación en paralelo del capacitor de 10 mF y el inductor de 5 H

Así, $\mathbf{Z}_1 = 60\ \Omega$ y

$$\mathbf{Z}_2 = -j25 \parallel j20 = \frac{-j25 \times j20}{-j25 + j20} = j100\ \Omega$$

Por el principio de división de tensión,

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}_s = \frac{j100}{60 + j100}(20\underline{/-15^\circ})$$
$$= (0.8575\underline{/30.96^\circ})(20\underline{/-15^\circ}) = 17.15\underline{/15.96^\circ}\ \text{V}$$

Se convierte esto al dominio temporal y se obtiene

$$v_o(t) = 17.15\cos(4t + 15.96^\circ)\ \text{V}$$

4.7. El Teorema de Kennelly – Steinmetz

La ley de Ohm en corriente continua se expresa por U = R I e indica la proporcionalidad entre la tensión y la intensidad de corriente impresas a una resistencia.
Análogamente vimos que en corriente alterna se cumple que U = Z I, que señala la proporcionalidad entre los mismos elementos en una impedancia.
Estas dos expresiones nos indican que la ley de Ohm vale en corriente alterna si las magnitudes se expresan en forma compleja.
Como consecuencia de esto valen en corriente alterna todas las relaciones deducidas a partir de la Ley de Ohm o por su intermedio.
El Teorema de Kennelly – Steinmetz dice:

“Cualquier problema relativo a corriente alterna sinusoidal se puede resolver considerando la fórmula resolutiva en corriente continua, y sustituyendo las magnitudes escalares por los complejos respectivos en las intensidades y tensiones, y la resistencia y conductancia por impedancia y admitancia respectivamente”

Ley	En corriente continua	En corriente alternada
Ley de Ohm	$U = R\,I$	$\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I}$
1ra. ley de Kirchhoff	$\Sigma\, I = 0$	$\Sigma\, \overline{I} = 0$
2da. ley de Kirchhoff	$\Sigma\, E - \Sigma\, R\, I = 0$	$\Sigma\, \overline{E} - \Sigma\, \overline{Z}\,\overline{I} = 0$
Agrupamiento en serie	$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$	$\overline{Z}_S = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \cdots + \overline{Z}_n$
Agrup. en paralelo	$G_P = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$	$\overline{Y}_P = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \cdots + \overline{Y}_n$

4.8. Problemas Resueltos

Problema 1. El voltaje a través de una inductancia de L = 0,2 H es v_L = 100 sin (400 t + 70º) V. Determinar el valor de la corriente i_L que circula.

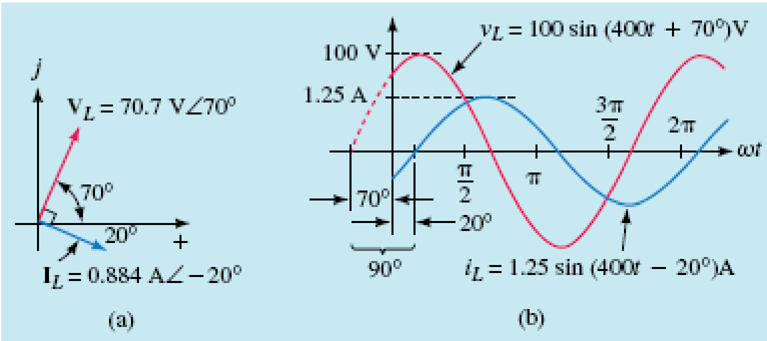
Dado que w = 400 rad/seg, la reactancia inductiva valdrá:

X_L = w L = 400 x 0,2 = 80 Ω.

La corriente valdrá:

$I_m = V_m / X_L$ = 100 / 80 = 1,25 A

La corriente atrasa a la tensión en 90º.



Luego la corriente será: i_L = 1,25 sin (400 t – 20º) A

En la figura vemos en (a) el diagrama fasorial y en (b) la representación en el dominio del tiempo.

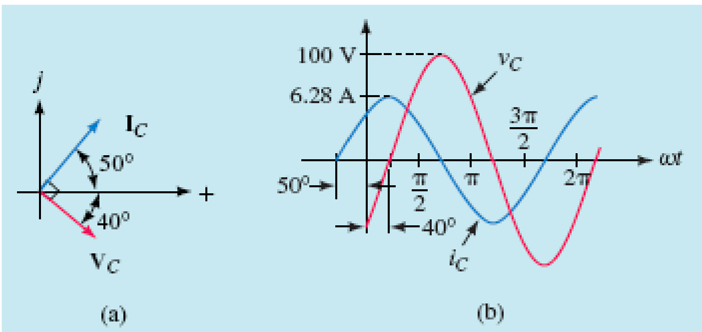
Problema 2. El voltaje a través de un capacitor de C = 10 μF es v_C = 100 sin (w t - 40º) V y la frecuencia f = 1000 Hz. Determinar el valor de la corriente i_C que circula.

Dado que w = 1000 rad/seg, la reactancia capacitiva valdrá: X_C = 1/ w C = 15,92 Ω.

La corriente valdrá: $I_m = V_m / X_C$ = 100 / 15,92 = 6,28 A. La corriente adelanta a la tensión en 90º.

Luego la corriente será: i_C = 6,28 sin (6283 t + 50º) A

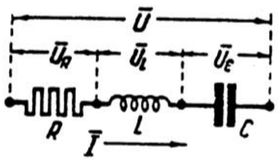
En la figura vemos en (a) el diagrama fasorial y en (b) la representación en el dominio del tiempo.



Problema 3. Calcular las corrientes que toman, conectadas a una tensión U = 220 V eficaces y f = 50 Hz, las siguientes cargas:
a) Una estufa de 50 Ω, carga prácticamente resistiva pura.
b) Una bobina de 100 mH de autoinducción, carga puramente inductiva.
c) Un capacitor de 50 µF de capacidad, carga puramente capacitiva.

a) I = U/ R = 220 V / 50 Ω = 4,40 A.
b) w = 2 π f = 314 rad/seg.
   L = 100 mH = 0,1 H
   X_L = w L = 31,4 Ω
   I = U/X_L = 220 / 31,4 = 7 A
c) C = 50 µF = 50 x 10^{-6} F = 5 x 10^{-5} F.
   X_C = 1/ wC = 63,68 Ω
   I = 220 / 63,68 = 3,43 A

Problema 4. Los tres elementos del problema anterior se conectan en serie, como se indica en la figura, a una tensión de 220 V eficaces y f = 50 Hz.
Determinar:
a) La impedancia total;
b) La corriente que circula;
c) La tensión en cada elemento.



a) Z = R + j (X_L – X_C) = 50 + j (31,4 – 63,68) =50 – j 32,28 Ω
   Mod Z = $\sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{50^2 + 32{,}28^2}$ = 59,2 Ω.
   φ = tg^{-1} (X/R) = tg^{-1} (- 32,28 / 50) = - 32,85º
   Z = 59,2 ∠ - 32,85º Ω

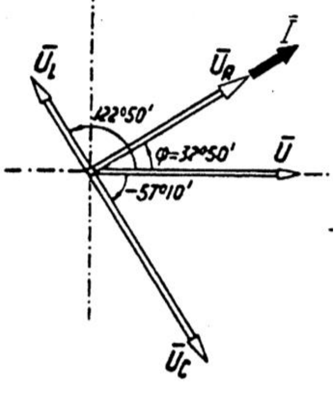
b) La corriente será: I = U/Z, donde debemos expresar la tensión como un fasor, conociendo su módulo que es un dato (220 V) debemos fijar el argumento, por lo que adoptamos la tensión como referencia fijando el ángulo en 0º. Numéricamente será:
I = 220 ∠ 0º / 59,2 ∠ - 32,85º = 3,69 ∠ 32,85º

En virtud de lo expresado la corriente resulta adelantada en 32,85º con respecto a la tensión, tal como es de esperar siendo un circuito capacitivo (reactancia capacitiva mayor que la reactancia inductancia)

c) Las tensiones resultarán:

U_R = I . R = 3,69 ∠ 32,85º x 50 = 184,5 ∠ - 32,85º
U_L = I . X_L = 3,69 ∠ 32,85º x 31,4 ∠ 90º = 115,87∠ 122,85º
U_C = I . X_C = 3,69 ∠32,85º x 63,68 ∠ - 90º = 235∠ - 57,15º

En el diagrama fasorial hemos representado las magnitudes calculadas.



Problema 5. A través de una impedancia formada por R = 10 Ω, L = 50 mH y C= 100 µF circula una corriente eficaz de 10 A y f = 50 Hz.
Determinar:

a) La tensión necesaria entre extremos y el desafaje total;
b) Las tensiones parciales;
c) El diagrama fasorial y la expresión simbólica de la tensión.

a) R = 10 Ω

$X_L = w\ L = 2\pi\ f\ L = 15{,}70\ \Omega$

$X_C = 1/wC = 32{,}10\ \Omega$

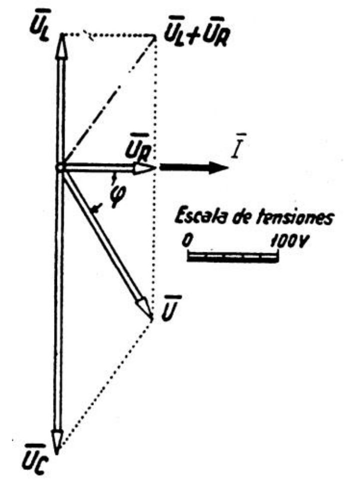
$Z = R + j\ (X_L - X_C) = 10 + j\ (15{,}70 - 32{,}10) = 10 - j\ 16{,}40\ \Omega$

Mod $Z = \sqrt{}\ R^2 + X^2 = 19{,}20$

$\varphi = tg^{-1}\ (X/R) = -\ 58{,}63º$

$Z = 19{,}20\ \angle\ -\ 58{,}63º\ \Omega$

$U = Z\ .\ I = 19{,}20\ .\ 10 = 192{,}0\ V$



b)

$U_R = I\ .\ R = 10\ \angle\ 0º \times 10 = 100\ \angle\ 0º$

$U_L = I\ .\ X_L = 10\ \angle\ 0º \times 15{,}70\ \angle\ 90º = 157{,}0\ \angle\ 90º$

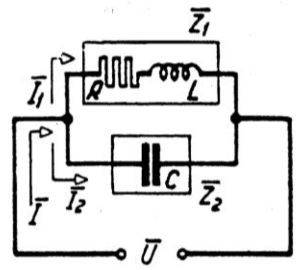
$U_C = I\ .\ X_C = 10\ \angle\ 0º \times 32{,}10\ \angle\ -\ 90º = 321{,}0\angle\ -\ 90º$

c) En el diagrama fasorial que sigue se ha tomado como referencia la corriente, que es el dato. Como en el problema anterior se eligió como ángulo 0º. La expresión de la tensión total será:

$U = Z\ .\ I = 19{,}20\ \angle\ -\ 58{,}63º \times 10\ \angle\ 0º = 192{,}0\ \angle\ -\ 58{,}63º$

$U = 100 - j\ 163\ V$

Problema 6. Una bobina de R = 10 Ω y L = 20 mH se coloca en paralelo con un capacitor de 100 µF y se le aplican 220 V a una f = 50 Hz, según puede verse en la figura.
Calcular la corriente total, las corrientes parciales y dibujar el diagrama fasorial.



$w = 2\ \pi\ 50 = 314$ rad/seg

$X_L = 314 \times 0{,}02 = 6{,}28\ \Omega$

$X_C = 1\ /\ 314 \times 10^{-4} = 32{,}1\ \Omega$

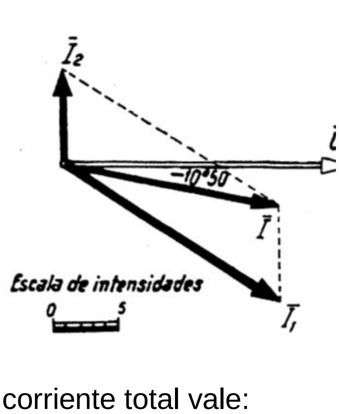
$G_1 = R\ /\ (R^2 + X_L\ ^2) = 0{,}071$ Si

$B_1 = -\ X_L\ /\ (R^2 + X_L\ ^2) = -\ 0{,}045$ Si

$Y_1 = 0{,}071 - j\ 0{,}045$

$G_2 = 0$ $\qquad B_2 = 1/X_C = 0{,}0314$ Si

$Y_2 = G_2 + j\ B_2 = 0{,}0314\ \angle\ 90º$



$Y = Y_1 + Y_2 = 0{,}071 - j\ 0{,}0136 = 0{,}0723\ \angle\ -\ 10{,}84º$

$Z = 1\ /\ Y = 13{,}85\ \angle 10{,}84º = 13{,}58 + j\ 2{,}58$

Con la impedancia total así obtenida y tomando un ángulo de referencia y tomando un ángulo de referencia 0º para la tensión, la corriente total vale:

$I = U/Z = 220\ \angle\ 0º\ /\ 13{,}83\ \angle\ 10{,}84º = 15{,}90\ \angle\ -\ 10{,}84º$

Para calcular las corrientes parciales tomamos las impedancias:

$Z_1 = 10 + j\ 6{,}28 = 11{,}8 \angle 32º\ 10´$
$Z_2 = -\ j\ 32{,}1 = 32{,}1 \angle -90º$

$I_1 = 220 \angle 0º / 11{,}8 \angle 32º\ 10´ = 18{,}64 \angle -32º\ 10´ = 15{,}76 – j\ 9{,}91$

$I_2 = 220 \angle 0º / 32{,}1 \angle -90º = 6{,}85 \angle 90º = j\ 6{,}85$

Sumando: $I = I_1 + I_2 = 15{,}90 \angle -10º\ 50´$

Glf/2015