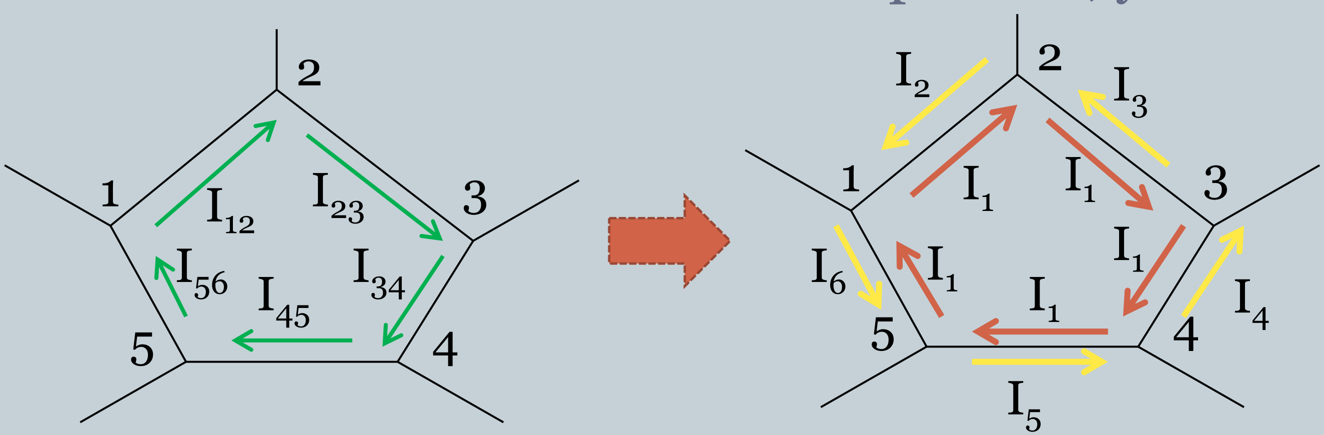
Electrotecnia

Prof. Ing. G. Belliski

- MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA
- MÉTODO DE LOS POTENCIALES DE NODO
- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN
- TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Método de las corrientes de Malla

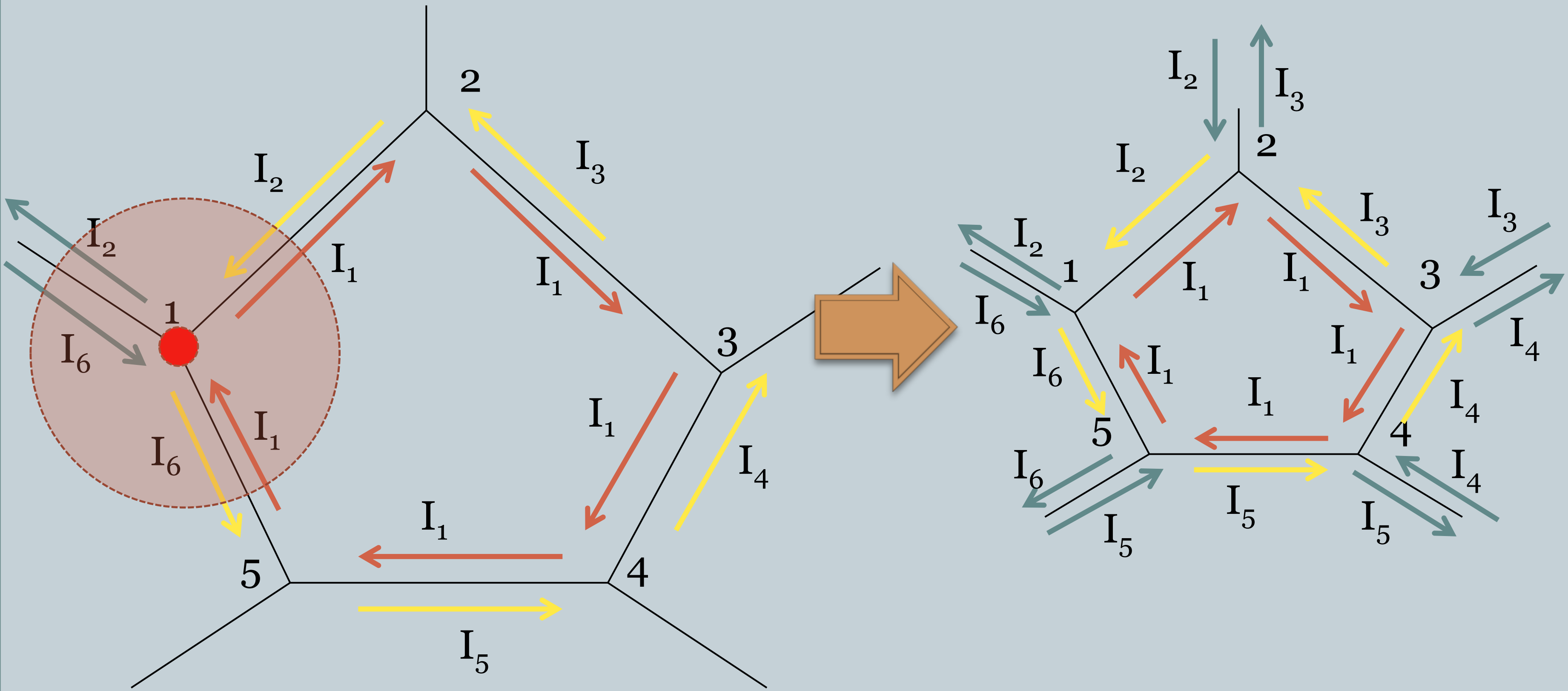
- Definiciones:
  - **<u>Lazo</u>:** Cualquier camino cerrado dibujado en un circuito eléctrico por el cual pueda circular una corriente
  - **<u>Malla esencial</u>:** cualquier lazo que no contiene otro (lazo) en su interior
- Propuesta: Dada una malla eléctrica esencial, descomponer cada corriente en dos de sentidos opuestos, y analizar sus nodos



$$I_{12} = I_1 - I_2$$
$$I_{23} = I_1 - I_3$$
$$I_{34} = I_1 - I_4$$
$$I_{45} = I_1 - I_5$$

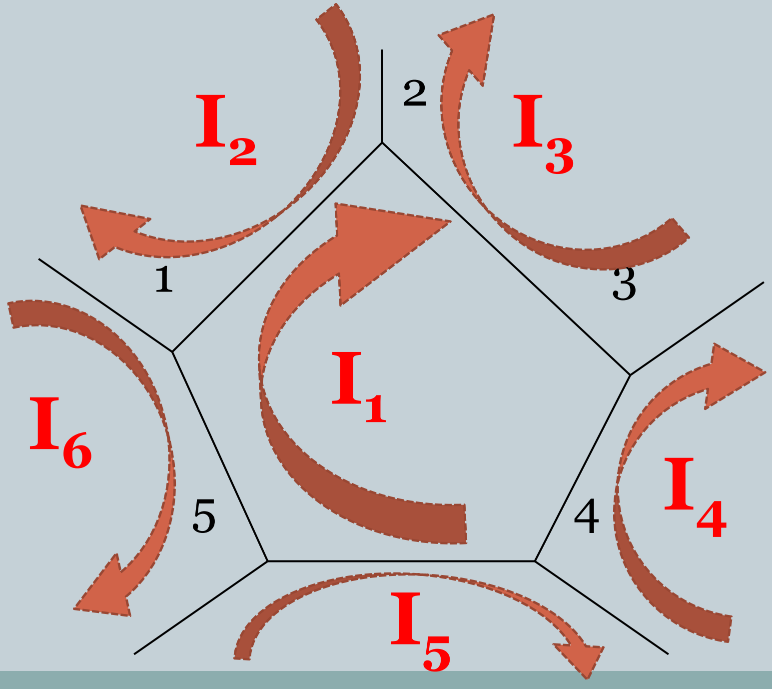
Método de las corrientes de Malla

- Si miramos cada nodo, podemos notar que, por LCK, deben salir las mismas corrientes que entran:



Método de las corrientes de Malla

Luego, podemos pensar en las corrientes como si cada una circulara por su propia malla, de modo tal que, al calcular la resultante de las *“corrientes de malla”* que circulan sobre una rama, nos permiten obtener la corriente **REAL** que circula sobre ella (las *“corrientes de malla”* son formulaciones *matemáticas*, no corrientes *reales*. Sólo circula **una** corriente por cada rama)



Método de las corrientes de Malla

- Este método matemático nos permite escribir ecuaciones de malla (seleccionando mallas a voluntad en un circuito dado), aplicando la **LVK** a cada malla en forma individual.
- Todos los elementos de un circuito bajo análisis deben tener circulando **al menos una** corriente de malla para poder aplicar el método
- Debe tenerse en cuenta que se deben escribir tantas ecuaciones de malla como corrientes de malla se tengan como incógnita.
- Escribir **más mallas** que las necesarias producirá un sistema de ecuaciones **redundante**, escribir **menos** producirá uno **insoluble**

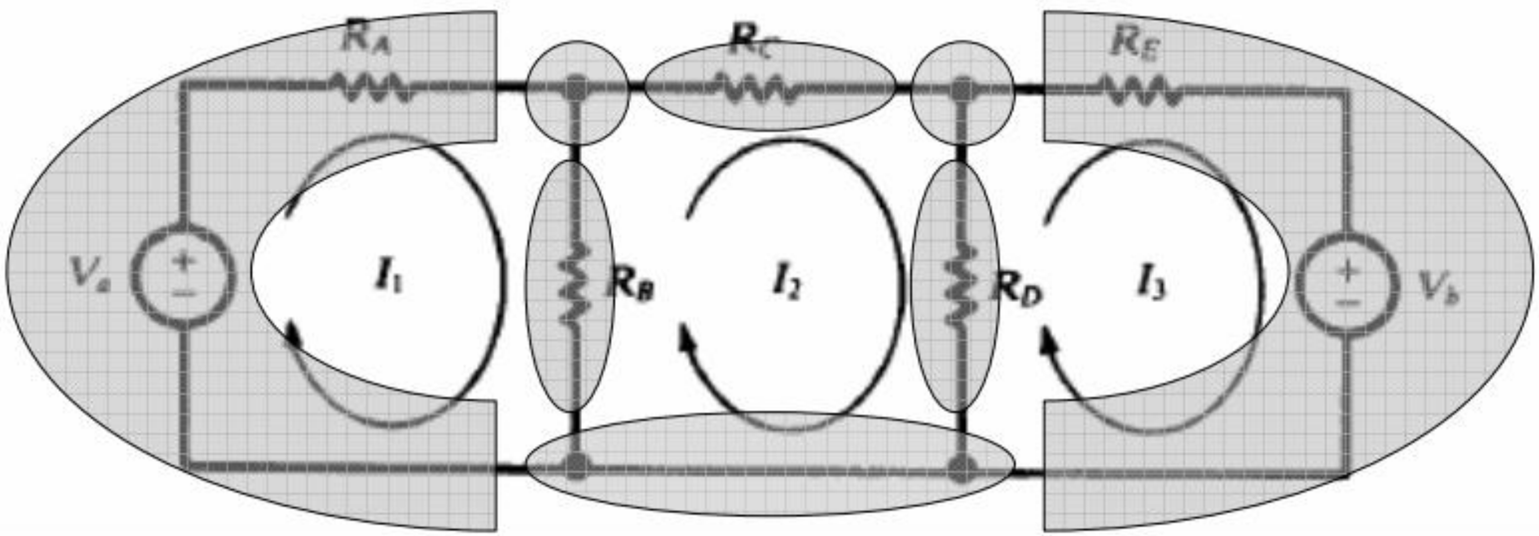
Cantidad Necesaria de Mallas

Identificación de Mallas

En un circuito hay r-(n-1) mallas independientes:

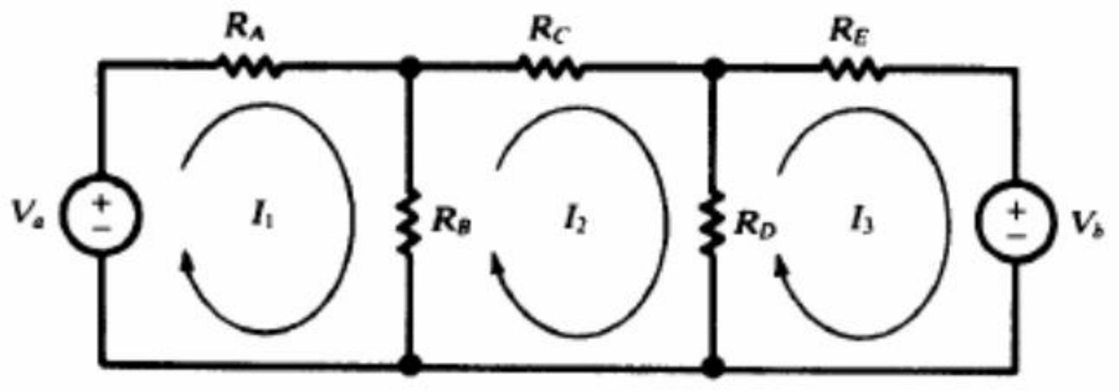
n: nodos principales

r: ramas principales



Ejemplo

- Escribir las ecuaciones de malla para el siguiente circuito:



Sistema de Ecuaciones

$$V_a = R_A I_1 + R_B(I_1 - I_2)$$

$$0 = R_C I_2 + R_B(I_2 - I_1) + R_D(I_2 - I_3)$$

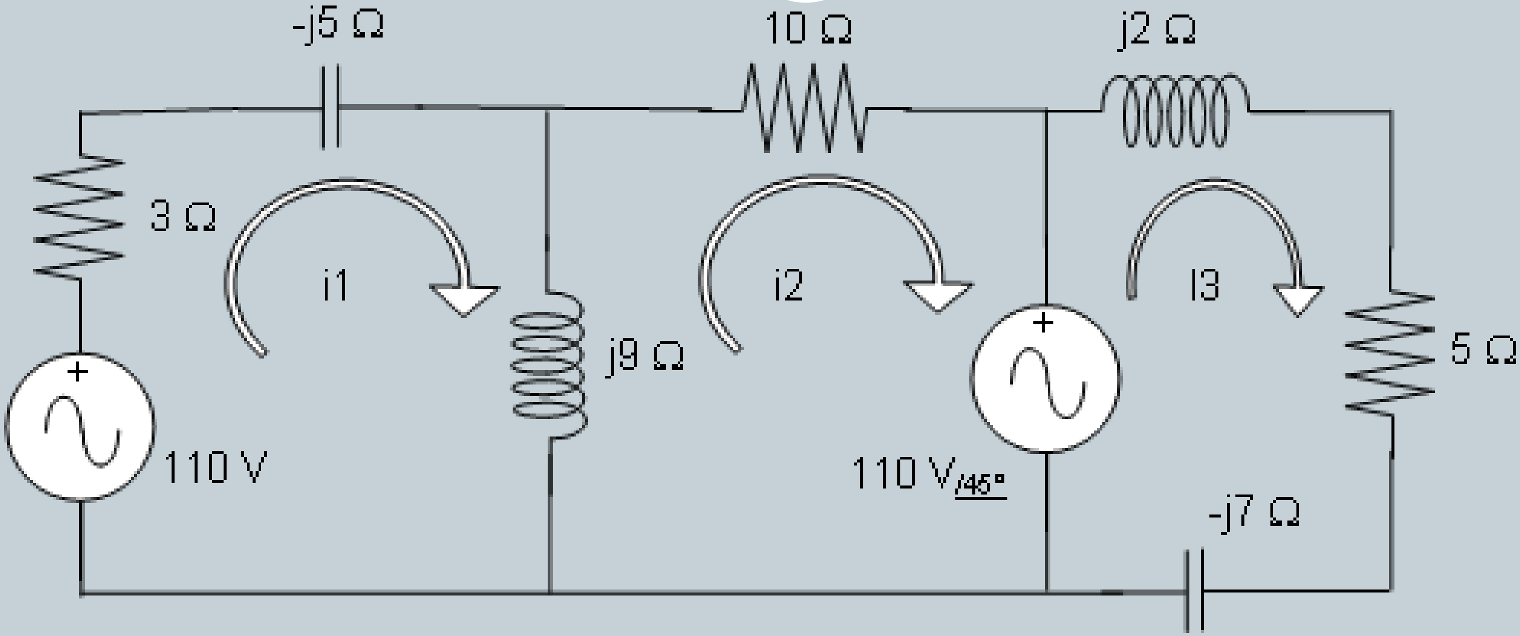
$$-V_b = R_E I_3 + R_D(I_3 - I_2)$$

Escribiendo el ejemplo en matrices

$$\begin{aligned}
(R_A + R_B)I_1 \quad & - R_B I_2 & & = V_a \\
- R_B I_1 \quad & + (R_B + R_C + R_D)I_2 & - R_D I_3 & = 0 \\
& - R_D I_2 & + (R_D + R_E)I_3 & = - V_B
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & - R_B & 0 \\ - R_B & R_B + R_C + R_D & - R_D \\ 0 & - R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ - V_b \end{bmatrix}$$

En Alterna, sólo cambia el cuerpo de números



$$110V = i_1(3 - j5 + j9)\Omega + i_2(-j9)\Omega + i_3.(0)\Omega$$

$$-110V_{/45º} = i_1(-j9)\Omega + i_2(10 + j9)\Omega + i_3.(0)\Omega$$

$$+110V_{/45º} = i_1(0)\Omega + i_2(0)\Omega + i_3.(5 + j2 - j7)\Omega$$

Mallas en alterna en forma matricial

Las ecuaciones de malla se escriben en forma análoga a lo hecho en continua, sólo quedan algo más complicadas de resolver. Escribimos que:

$$[\boldsymbol{Z}].[\boldsymbol{I}] = [\boldsymbol{V}]$$

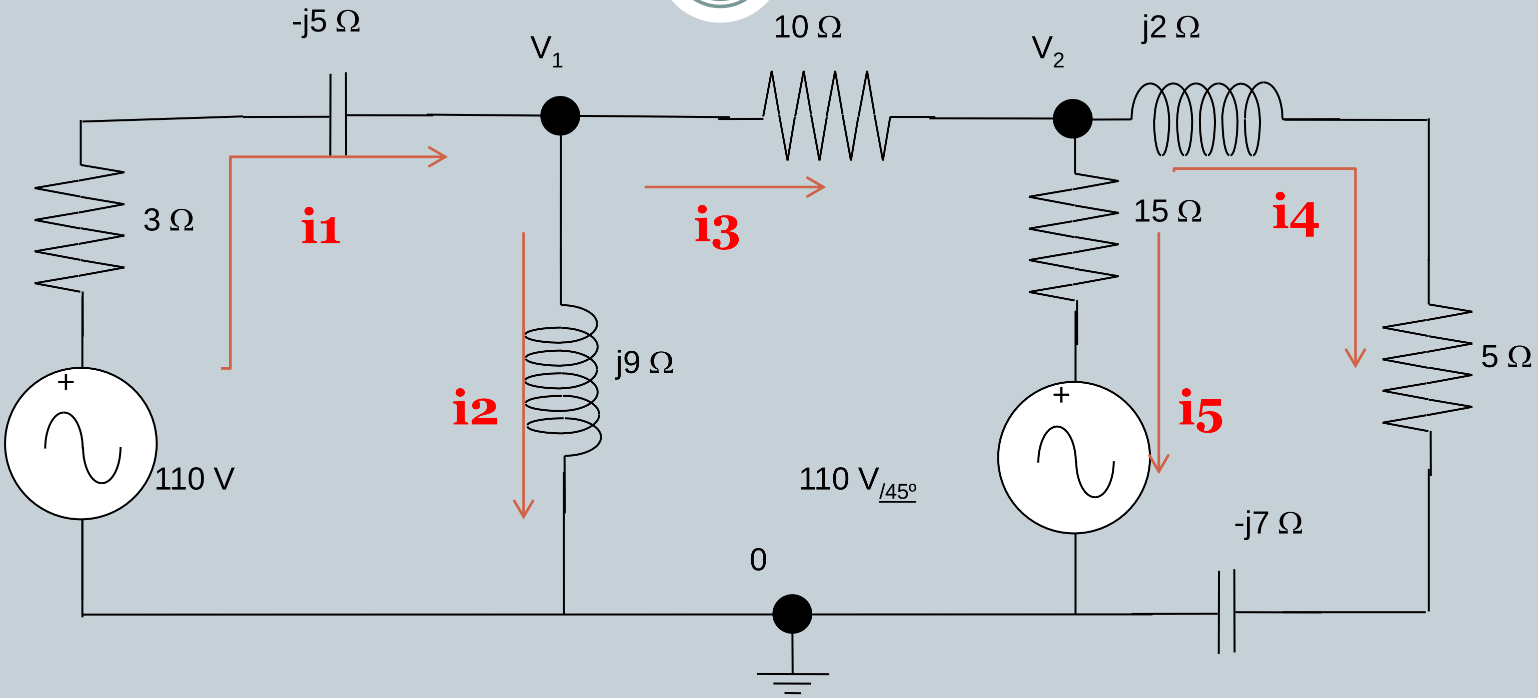
Con esta notación (a esta escritura suele llamársele "*ley de Ohm matricial*"), podemos escribir las *impedancias propias y de cruce o relación* entre mallas en la matriz de impedancias, las corrientes de malla en el vector corrientes y las fuentes en su vector, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} (3-j5+j9) & (-j9) & (0) \\ (-j9) & (10+j9) & (0) \\ (0) & (0) & (5+j2-j7) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110V \\ -110V_{/45º} \\ +110V_{/45º} \end{bmatrix}$$

Método de Nodos

- Proviene de la ***LCK***: La suma algebraica de corrientes en un ***nodo*** *(concurrencia de dos o más elementos conectables de un circuito)* es cero.
- Para reducir la cantidad de ecuaciones que se deben resolver, a ***uno*** de los nodos del circuito *(preferiblemente aquel que toma contacto con más elementos, para optimizar el método)* se le asigna arbitrariamente el ***valor cero***.
- Todos los nodos se identifican con su valor de tensión Vn y se escriben todas las ***ecuaciones de suma de corrientes nodo por nodo***.
- Debido a la ley de Ohm, las corrientes pueden escribirse como ***I=(Vn – Vm)/R***, donde Vn es la tensión del nodo a mayor potencial, e I viaja desde Vn hacia Vm.
- Veamos un ejemplo de aplicación…

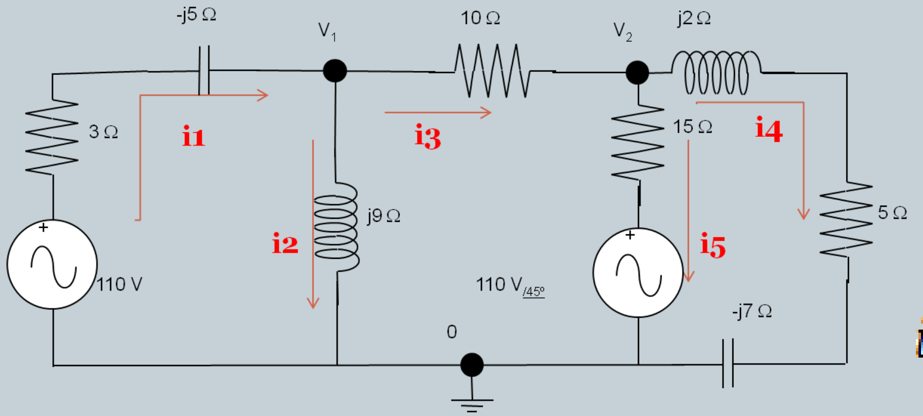
Un ejemplo del método de Nodos



La suma de las corrientes en el nodo V1 es: $i_1 = i_2 + i_3$

La suma de las corrientes en el nodo V2 es: $i_3 = i_4 + i_5$

Teorema de nodos



Además: $$i_1 = \frac{110 - V_1}{3 - j5}$$

$$i_2 = \frac{V_1}{j9} \qquad i_3 = \frac{V_1 - V_2}{10}$$

$$i_4 = \frac{V_2}{5 + j2 - j7} \qquad i_5 = \frac{V_2 - 110_{/45º}}{15}$$

Reescribiendo las sumas de corrientes:

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{110 - V_1}{3 - j5} = \frac{V_1}{j9} + \frac{V_1 - V_2}{10}$$

$$i_3 = i_4 + i_5 \Rightarrow \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{V_2}{5 + j2 - j7} + \frac{V_2 - 110_{/45º}}{15}$$

Teorema de nodos

Reordenando las ecuaciones anteriores, obtenemos un sistema:

Ecuación del nodo 1

$$\frac{110}{3-j5} = V_1\left(\frac{1}{j9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3-j5}\right)+V_2\left(-\frac{1}{10}\right)$$

Ecuación del nodo 2

$$\frac{110_{/45^\circ}}{15} = V_1\left(-\frac{1}{10}\right)+V_2\left(\frac{1}{5+j2-j7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$$

A los términos que aparecen en las ecuaciones anteriores como "1 sobre algo" se los denomina ***conductancia de la rama*** y así, en el primer paréntesis junto a v1 aparece la ***suma de las conductancias que concurren al nodo 1***, mientras que en la misma ecuación, junto a **V2** y con signo negativo aparece la ***conductancia compartida entre los nodos V1 y V2.*** Algo análogo pasa en la segunda ecuación.

El término que aparece a la izquierda del signo igual es la corriente que las fuentes provocarían si estuvieran aplicadas sobre la impedancia hasta el nodo, conectado éste a masa.

Teorema de nodos en matrices

Si escribimos las ecuaciones anteriores en forma matricial, podemos decir que:

$$[\boldsymbol{Y}].[\boldsymbol{V}] = [\boldsymbol{I}]$$

que leemos como "la matriz de admitancias (Y) multiplicada por la matriz de tensiones (V) nos dan la matriz de corrientes independientes (I)". En nuestro caso:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{j9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3 - j5}\right) & (-\frac{1}{10}) \\ \left(-\frac{1}{10}\right) & (\frac{1}{5 + j2 - j7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{3 - j5} \\ \frac{110_{/45º}}{15} \end{bmatrix}$$

Como fácilmente puede deducirse, la resolución de esta matriz requiere un repaso de conocimientos sobre resolución de matrices en el campo complejo, lo que queda por cuenta del lector

Principio de Superposición

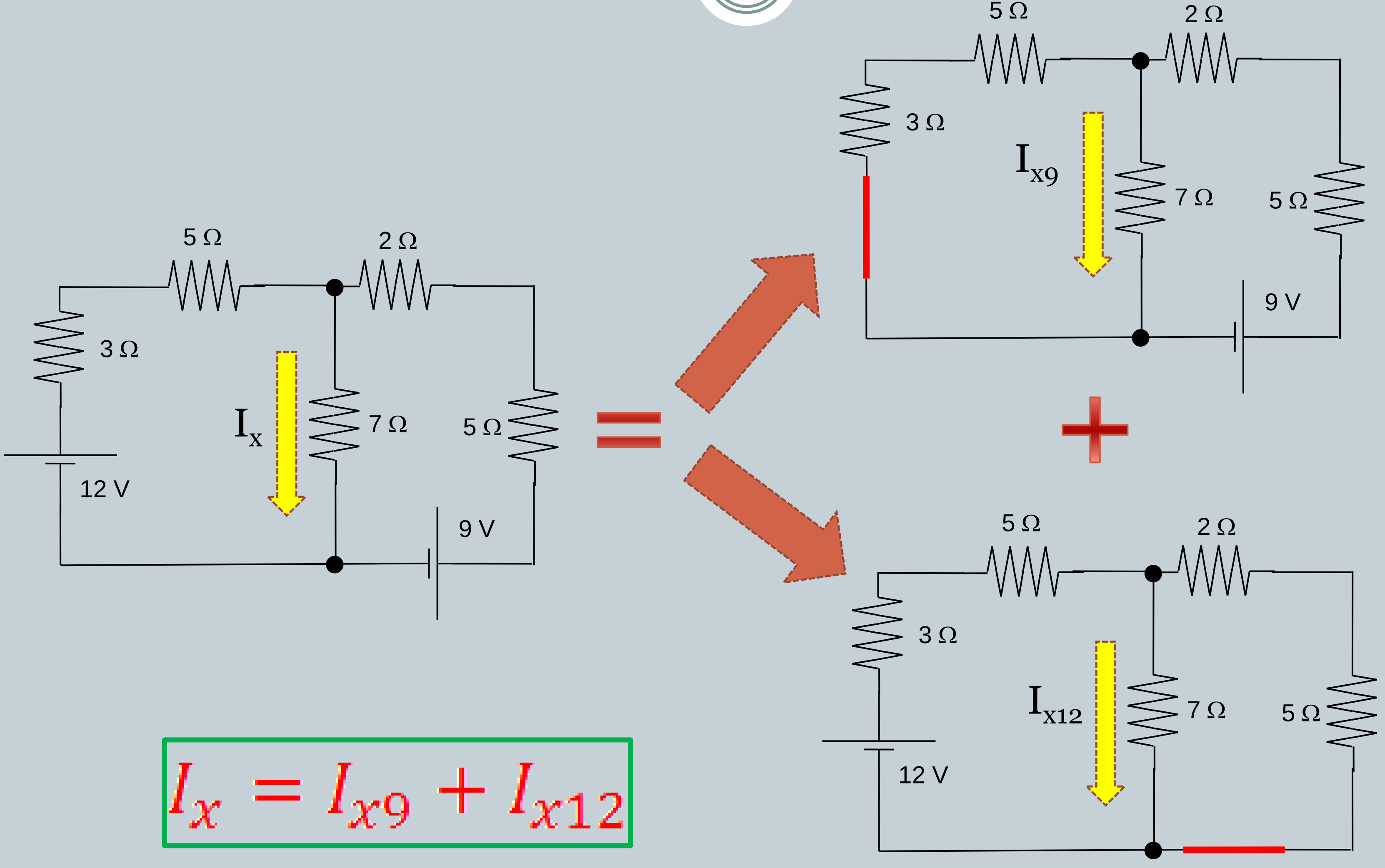
- En un circuito lineal, el efecto que dos o más fuentes tienen sobre una carga es igual a la suma de los efectos de cada fuente tomados por separado, sustituyendo todas las fuentes de voltaje restantes por un corto circuito, y todas las fuentes de corriente restantes por un circuito abierto.
- En ecuaciones se escribe:

$$V_c = f(E_1, E_2, \ldots, E_n) =$$

$$= f(E_1, 0, \ldots, 0) + f(0, E_2, \ldots, 0) + \ldots + f(0, 0, \ldots, E_n)$$

- Otra forma de escribirlo: $V_c = aV_1 + bV_2 + cV_3 + \ldots$, con $a, b, c \ldots \in \mathbb{R}$

Principio de superposición



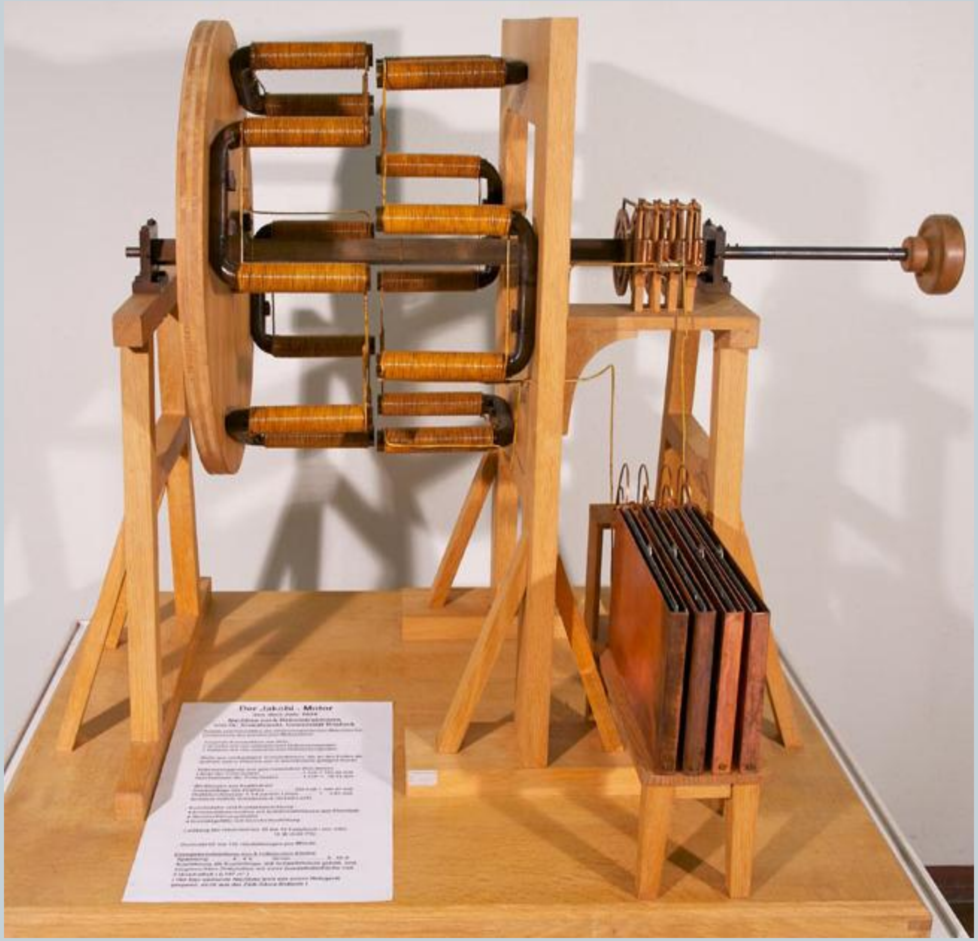
$$\boxed{I_x = I_{x9} + I_{x12}}$$

Teorema de máxima transferencia de potencia

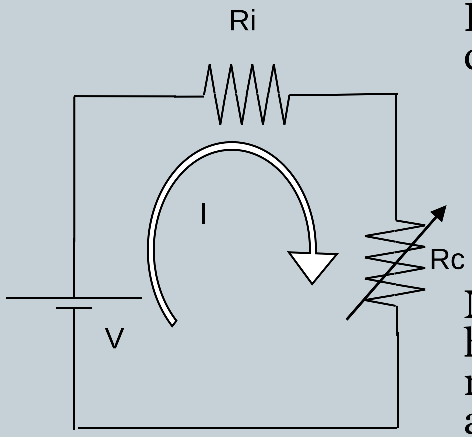
- Originalmente formulada por Moritz Von Jacobi en 1840, dice que ***"la potencia que se transfiere de una fuente de tensión a una carga es máxima cuando el valor de la resistencia de carga iguala a la resistencia interna de la fuente"***
- En términos de Von Jacobi, ***"La potencia máxima se transfiere cuando la resistencia interna de la fuente es igual a la resistencia de la carga, cuando la resistencia externa puede ser variada, y la resistencia interna es constante".***

Moritz Hermann (Boris Semiónovich) von Jacobi (21 de septiembre de 1801-10 de marzo de 1874) fue un ingeniero y físico judío alemán nacido en Potsdam. Jacobi trabajó principalmente en Rusia. Fomentó el progreso en la galvanoplastia, los motores eléctricos y la telegrafía por cables. Era hermano del brillante matemático Carl Gustav Von Jacobi. Fue el primero en fabricar motores eléctricos utilizables, una de cuyas aplicaciones fue el primer barco de propulsión eléctrica, alimentado por baterías, en 1839, que navegaba por el río Neva llevando 14 personas a bordo a una velocidad de tres nudos. Fue durante el trabajo de diseño de este motor que demostró empíricamente su teorema. El sistema de conmutación de los electroimanes que conformaban este primer motor eléctrico fue tan brillante que hasta el día de hoy se utiliza en los motores de conmutación (sistema de conmutador de escobillas).

Paréntesis: El motor de Von Jacobi



Máxima transferencia de Potencia: Demostración



Para el circuito de la figura, podemos establecer que la potencia en la carga es:

$$P(R_c) = I^2 . R_c = \left(\frac{V}{R_i + R_c}\right)^2 . R_c$$

Matemáticamente, esta es una función de la cual simplemente debemos hallar el máximo. Recordando el análisis matemático, sabemos que el máximo de la función estará en el punto en el que la derivada primera se anule:

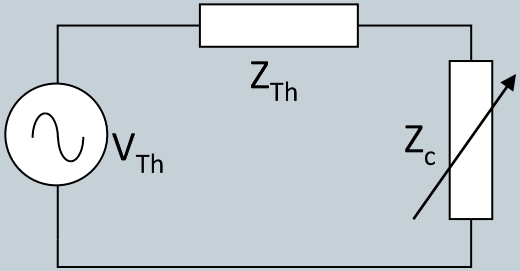
$$\frac{dP(R_c)}{dR_c} = V^2 . \frac{(R_i + R_c)^2 - 2.(R_i + R_c).R_c}{(R_i + R_c)^4} = 0$$

$$(R_i + R_c)^2 - 2.(R_i + R_c).R_c = 0 \Rightarrow R_i^2 + R_c^2 + 2R_iR_c - 2R_iR_c - 2R_c^2 = 0$$

$$R_i^2 - R_c^2 = 0 \Rightarrow (R_i + R_c).(R_i - R_c) = 0 \Rightarrow \boxed{R_i = R_c}$$

Por lo tanto, en Ri=Rc está el máximo de potencia recibida por la carga, para la condición de Ri fija y Rc variable.

El Teorema de Máxima Transferencia de Potencia en Alterna



Caso 1: Zc es una resistencia pura

$$P_c = \frac{V_g^2 . R_c}{(R_c + R_{th})^2 + X_{th}^2}$$

$$\frac{dP_c}{dR_c} = 0 \Longrightarrow$$

$$V_g^2 \left\{ \frac{(R_c + R_{th})^2 + X_{th}^2 - 2R_c(R_c + R_{th})}{\left[(R_c + R_{th})^2 + X_{th}^2\right]^2} \right\} = 0$$

Luego:

$$R_c^2 + \cancel{2R_c . R_{th}} + R_{th}^2 + X_{th}^2 - 2R_c^2 - \cancel{2R_c . R_{th}} = 0$$

$$R_{th}^2 + X_{th}^2 = R_c^2$$

Por lo tanto, la Rc para Máx Transf. es:

$$\boxed{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2} = R_c}$$

El Teorema de Máxima Transferencia de Potencia en Alterna

Caso 2: Zc es una resistencia y reactancia variables

$$P_c = \frac{V_g^2 . R_c}{(R_c + R_{th})^2 + (X_C + X_{th})^2}$$

Para cualquier valor de Rc, la potencia es máxima cuando Xc=-Xth. Así se anula la parte reactiva, dejándonos en el caso de una Resistencia de carga, para la cual ya probamos que para máxima transferencia de potencia Rc=Rth.

Poniendo ambas características juntas, se ve que debe cumplirse que:

Zc=Zth*

Es decir, la impedancia de carga debe ser la conjugada de Zth.

Caso 3: Zc es una resistencia variable con una reactancia fija. La ecuación es la misma que en el caso 2)

$$P_c = \frac{V_g^2 . R_c}{(R_c + R_{th})^2 + (X_C + X_{th})^2}$$

$$\frac{dP_c}{dR_c} = 0 \Rightarrow$$

$$R_c^2 = R_{th}^2 + \left(X_c + X_{th}\right)^2$$

$$R_c = |Z_{th} + jX_c|$$

Paréntesis 2: Ojo con las interpretaciones

- Joule y otros dedujeron erróneamente que la eficiencia máxima de un motor eléctrico era del 50%, lo que los hacía inviables frente al motor térmico. Aún Jacobi creyó que esto era así...
- Debido a esta creencia, los dínamos se construían agregándoles resistencia para alcanzar la resistencia de la carga. Esto les daba un rendimiento del orden del 40%
- Siemens no había tenido en cuenta los aspectos teóricos del teorema de Jacobi cuando inventó la dínamo, pero no se había medido la eficiencia de sus dínamos para contraponerlos a la suposición teórica
- Edison, famoso por su mal humor y su reniego de la ciencia oficial, no creyó en el teorema, y su asistente matemático Upton demostró que la deducción del 50% era errónea. Edison dio a sus dínamos la resistencia más baja que pudo lograr, y eso le permitió obtener eficiencias del orden del 90%
- Una avalancha de teóricos se burlaron en la prensa de Edison, diciendo que no podía hacer ... lo que efectivamente estaba haciendo
- Probablemente de esta anécdota surge una frase atribuida con frecuencia a Edison *“los que dicen que algo es imposible deberían dejar de molestar a los que estamos ocupados haciéndolo”* (frase también atribuida a Einstein)

Aclaración: La eficiencia

Si definimos la eficiencia de un sistema como el cociente entre la potencia entregada a la carga dividida la potencia total entregada a la fuente, puede verse que:

$$\eta = \frac{P_c}{P_c + P_{Ri}} = \frac{R_c}{R_c + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_c}}$$

De esta última expresión, puede verse con facilidad que la eficiencia es tanto mayor como mayor sea la resistencia de carga comparada con la resistencia interna de la fuente, lo cual prueba que cuanto menor sea la resistencia interna de la fuente mayor será el rendimiento de un sistema de alimentación (*Edison tenía razón…)*