Variable Aleatoria

2022.

Variable Aleatoria Discreta
Repaso.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Definición: Dada un experimento ε y su espacio muestral asociado Ω, una variable aleatoria *X* se define como una función que asigna a cada elemento *w* del espacio muestral un número real.

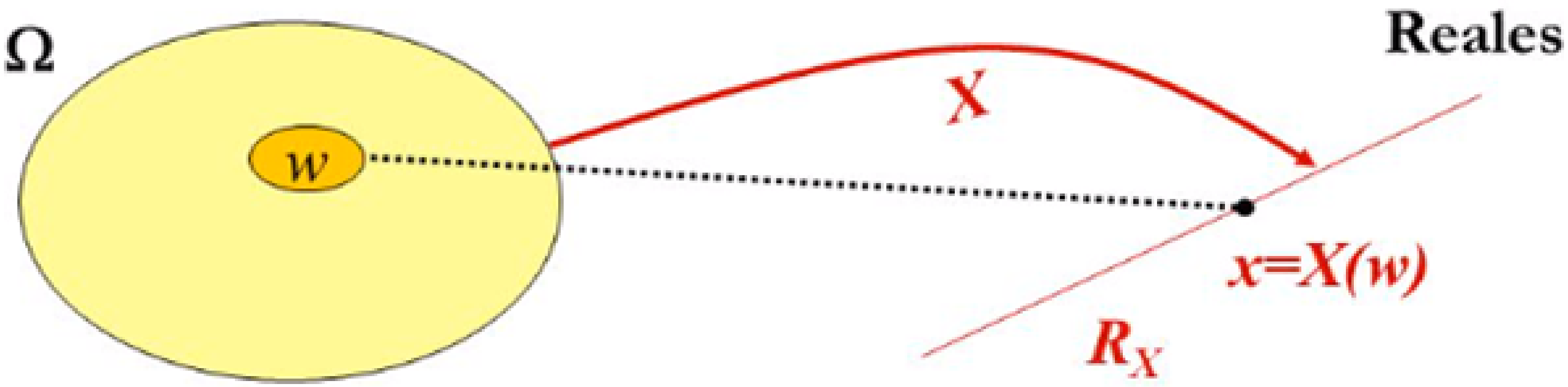


Fig. Representación gráfica de una v.a

Ω : espacio muestral asociado a un experimento. R_X : valores posibles de X (recorrido de la v.a).

Variable aleatoria discreta

Variables aleatorias discretas

Definición: Se dice que X es una $\boxed{\textbf{variable aleatoria discreta (v.a.d)}}$ si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que:

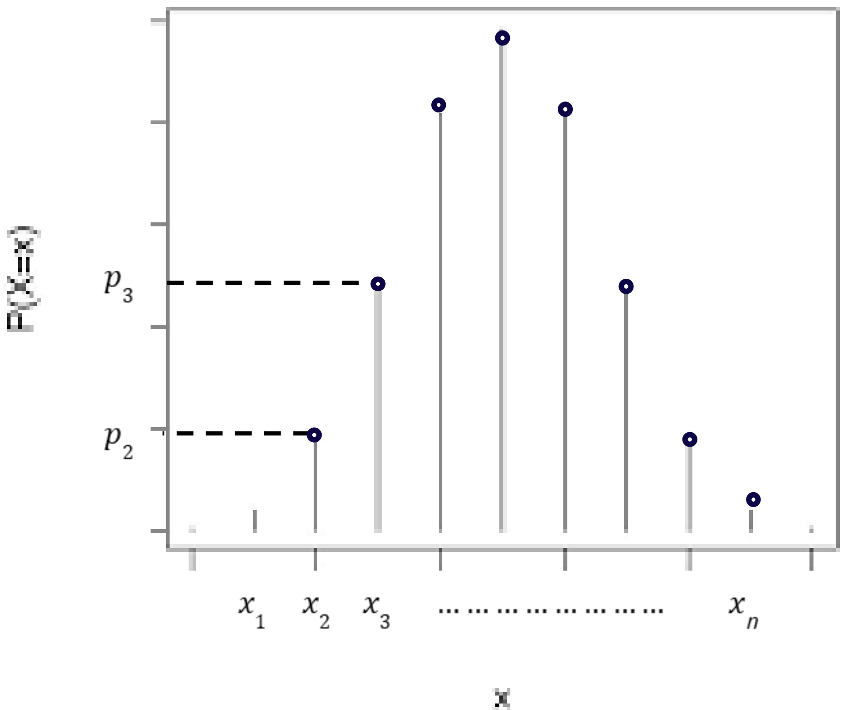
$$P(x_i) = P(X = x_i) = \{s \in S : X(s) = x_i\}$$

a) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$

b) $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$

La función así definida se llama ***función de probabilidad*** de la v. a. X. El conjunto de pares ordenados $(x_i, P(x_i))$ se llama ***distribución de probabilidades*** de la v. a. X.

Variable aleatoria discreta



Distribución de probabilidades de la v.a discreta X

X	$p_i = p(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n

Variable aleatoria discreta

Función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta $\boxed{\textbf{FDA}}$

Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), la función de distribución acumulada se define como: $F:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$

$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_j\leq x}P(x_j)\,/\,x\in R_X$ (la suma se toma sobre todos los índices j tal que $x_j\leq x$)

Propiedades de la FDA

1- F es no decreciente, es decir si $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)\leq F(x_2)$

2- $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ y $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

<u>**Características numéricas de las variables aleatorias**</u>:

Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

<u>**Momentos**</u>: El momento k-ésimo para una variable aleatoria discreta respecto al origen se define como:

$$E\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^k\, p\left(x_i\right)$$

<u>**Definición**</u>: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidades $\left(x_i, P\left(x_i\right)\right)$ para $i=1,2,\ldots$. Se llama valor esperado de X o esperanza matemática de X a:

$$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p\left(x_i\right)$$

$E\left(X\right)$ existe si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p\left(x_i\right)$ converge en valor absoluto, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\, p\left(x_i\right)\right| < \infty$.

A este número también se lo llama valor promedio de X.

Propiedades del valor esperado de una v.a.d:

1) Si $X = cte$ entonces $E(X) = c$
2) $E(cX) = cE(X)$ para toda constante *c*.
3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (X e Y v.a.)
4) $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$
5) $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X e Y son v.a. independientes.
6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX+b) = aE(X) + b$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

a) Si X es una v.a.d

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

<u>Otra forma de expresar la varianza es la siguiente</u>:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

Dem/

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E\left[X^2-2XE(X)+(E(X))^2\right]=$$

$$=E(X^2)-2E(X)E\left(\underbrace{E(X)}_{cte}\right)+E\left(\underbrace{(E(X))^2}_{cte}\right)=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

<u>Propiedades de la Varianza</u>:

1) Si $X=cte$ entonces $V(X)=0$
2) $V(X+c)=V(X)$ para toda constante *c*.
3) $V(cX)=c^2V(X)$ para toda constante *c*.
4) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)
5) $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)

Algunas distribuciones teóricas	
Discretas	
Bernoulli: Asociado a un experimento dicotómico. **Binomial**: como una suma de variables aleatorias con distribución Bernoull, independientes. **Hipergeométrica**: **Poisson**: número de éxitos por unidad de medida.	

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución de Bernoulli.

Experimento Bernoulli: es dicotómico, sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Su espacio muestral asociado puede definirse como: $S = \{\acute{e}xito,\ fracaso\}$. Podemos definir una v.a. $X : S \to \{0,1\}$ tal que $X(\acute{e}xito) = 1$ y $X(fracaso) = 0$.

Si la probabilidad de éxito es p $(0 < p < 1)$ y la probabilidad de fracaso es $(1-p)$ podemos construir la siguiente "distribución de probabilidades":

Características Numéricas de la distribución de Bernoulli:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p \times (1-p)$$

x_i	$p(x_i)$
0	$(1-p)$
1	p
	$(1-p)+p=1$

La anterior distribución de probabilidades se denomina distribución de Bernoulli.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

<u>Formalmente</u>:

<u>Definición</u>: X es una variable aleatoria con distribución Binomial, $X \sim B(n,p)$ si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$$

donde $0<p<1$ (p constante) y n es un número entero positivo.

<u>Características</u>:

- Mide el número de éxitos en una secuencia de *n* ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija *p* de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Para usar el modelo se requiere que haya:

a) N repeticiones independientes.

b) el resultado de cada prueba es dicotómica.

c) $P(A)=p$, $0<p<1$ constante, en las n pruebas independientes.

Esperanza y varianza de matemática de la distribución binomial: consideremos a X como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes cada una con $E(X_i) = p$ y varianza $V(X_i) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = n \times p \times (1-p)$$

$$\boxed{X \sim B(n, p) \quad \Rightarrow \quad E(X) = n \times p \quad ; \quad V(X) = n \times p \times (1-p)}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Definición: Se dice que X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, con parámetros N, n, a si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k=0,1,\ldots,a$$

Donde:

n: Tamaño de la muestra.
N: Tamaño de la población
a: número de éxitos en la población.
N-a: número de fracasos en la población.
k: número de éxitos en la muestra.

Observaciones:

Una variable Hipergeométrica es generada según las siguientes condiciones

1) N pruebas no independientes.

2) El resultado de cada prueba es dicotómico.

3) La probabilidad de éxito $P(A)$ no se mantiene constante, es decir, varía con cada prueba.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Definición: Se dice que X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, con parámetros N, n, a si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k=0,1,\dots,a$$

Donde:

n: Tamaño de la muestra.
N: Tamaño de la población
a: número de éxitos en la población.
N-a: número de fracasos en la población.
k: número de éxitos en la muestra.

Esperanza y varianza de matemática de la distribución binomial

$$E(X)=n\frac{a}{N}$$

$$p$$

$$V(X)=n\frac{a}{N}\left(1-\frac{a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Variable aleatoria de Poisson.

Muchos hechos no ocurren como resultado de n pruebas de un experimento, sino en puntos de tiempo, espacio o volumen, es decir, estamos interesados en el número de ocurrencias (defectos) por unidad de medida.

Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si su función de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

decimos que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ (frecuencia de ocurrencias medias), y se nota $Po(\lambda)$.

Interpretación: La distribución de Poisson expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media λ, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierta unidad de medida.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Observaciones:

Una variable de Poisson es generada según las siguientes condiciones:

1) El número de ocurrencias es independiente de una unidad a otra, es decir los sucesos ocurren independientemente.

2) La frecuencia de ocurrencia media λ, es proporcional al tamaño de la unidad.

3) La probabilidad de más de una ocurrencia en una unidad cada vez más pequeña tiende a cero, es decir es despreciable.

Esperanza y varianza de matemática de la distribución

Sea X una v. a. tal que $X \sim P(\lambda)$, $E(X) = V(X) = \lambda$

Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

X ~ $B(n,p)$

El número esperado de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia está dada por:

$$E(X) = np$$

X ~ $\mathscr{P}(\lambda)$

Está caracterizada por un único valor λ. El cual representa el número promedio de eventos por unidad:

$$E(X) = \lambda$$

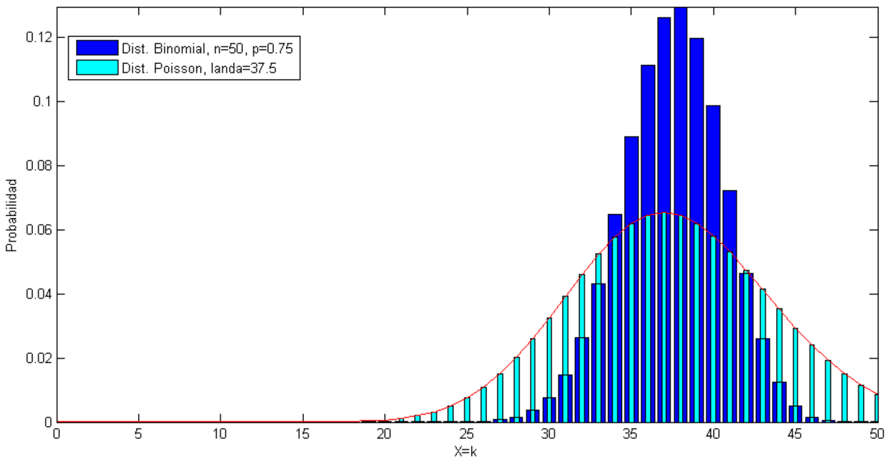
Veamos que sucede si ajustamos ambas variables aleatorias haciendo coincidir sus valores esperados. Es decir:

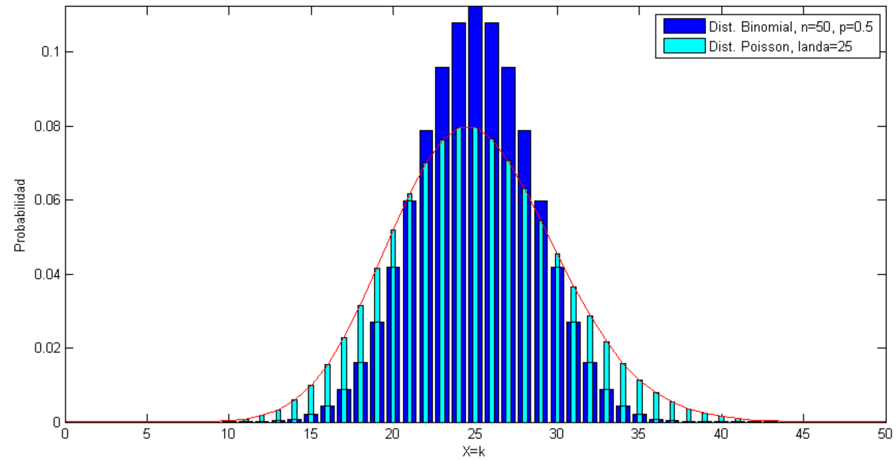
$$np = \lambda$$

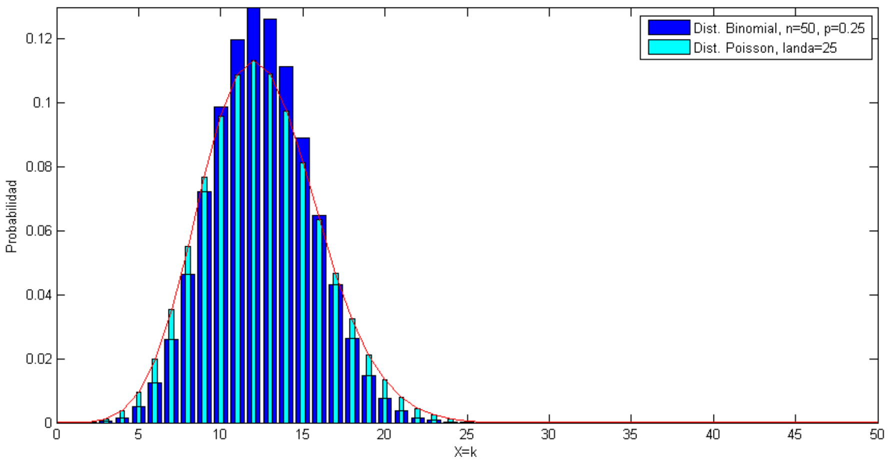
Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

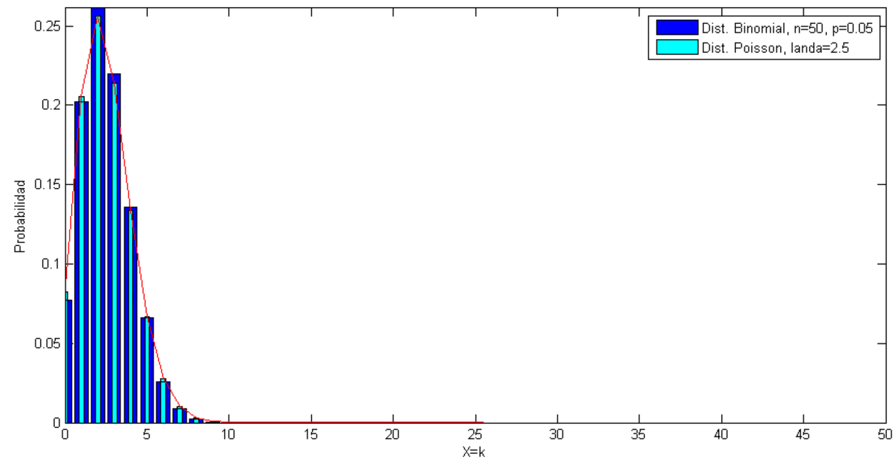
Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

$$np = \lambda$$



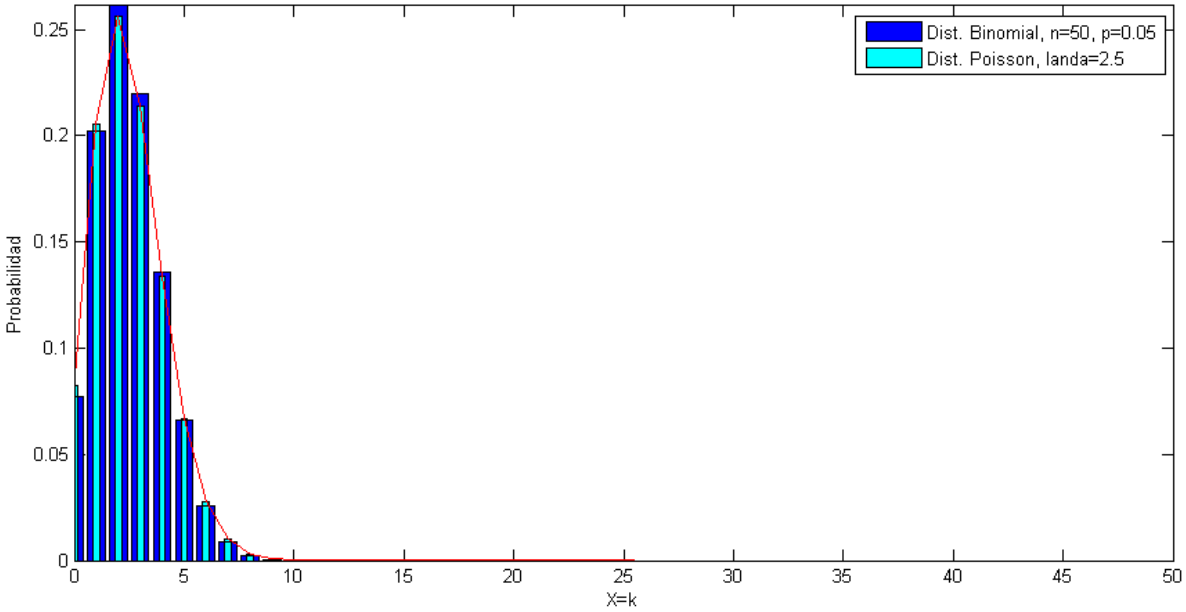






Conclusión

"Gráficamente" podemos concluir que a medida que n aumentamos y p disminuye, la distribución de Poisson se aproxima a la distribución Binomial.



La distribución de Poisson como aproximación a la Binomial.

Cuando en una distribución binomial el número de intentos (n) es grande y la probabilidad de éxito (p) es pequeña, la distribución binomial converge a la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)}!}{k!\cancel{(n-k)}!}p^{(k)}(1-p)^{n-k}$$

$$=\ldots$$

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Es decir, en el límite obtenemos la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$. En la práctica podemos aproximar la distribución Binomial por la distribución de Poisson si se verifica que $n \geq 50$ y $np \leq 5$.

Variable Aleatoria Continua

Definición de Variable Aleatoria Continua

Variables aleatorias continuas

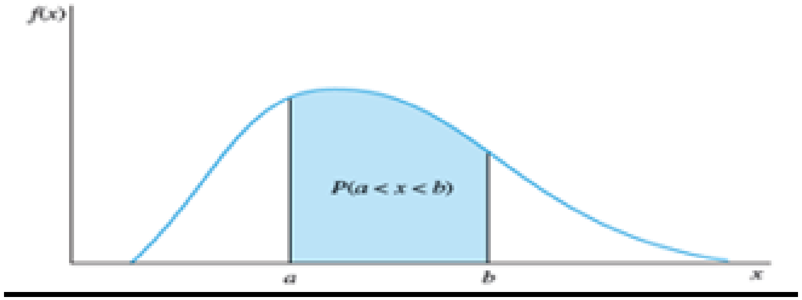
Definición: Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones.

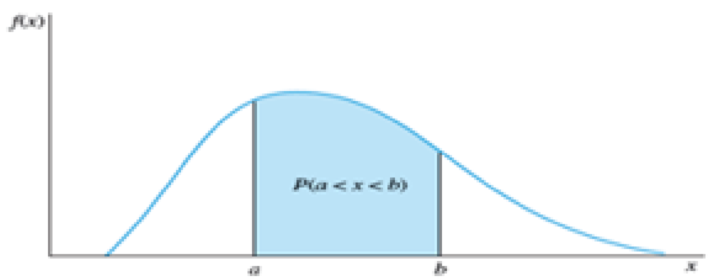
a) $f(x)\geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c) $\forall\, a,b$ tal que $-\infty < a < b < \infty \quad P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)\,dx$

Interpretación gráfica:



Variable aleatoria Discreta	**Variable aleatoria continua**
Se dice que X es una **variable aleatoria discreta** (v.a.d) si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que: a) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$ b) $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$	**<u>Definición:</u>** Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones. a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ c) $\forall\, a, b$ tal que $-\infty < a < b < \infty$ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Función de distribución acumulada (FDA)</u>

Sea X una variable aleatoria discreta o continua. La función de distribución acumulada F se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall\, x$$

1) Si X es una v.a.d entonces $F(x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j)$. La suma se toma sobre todos los índices j que satisfacen $x_j \leq x$.

2) Si X es una v.a.c entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ siendo $f(s)$ la f.d.p.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Propiedades de la FDA

1- F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$

2- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

3- Si f es la fdp de X entonces $f(x) = F^{'}(x) \quad \forall x$ donde F es diferenciable. Es decir, la FDA, F, es una primitiva de f la *f.d.p*.

4- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ Regla de Barrow.

Características numéricas de las variables aleatorias continuas:

Definición: Sea X una v. a. continua con f.d.p, f, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se llama valor esperado de la v. a. continua X o esperanza matemática de X a:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

$E(X)$ existe si existe $\int_{-\infty}^{\infty} \left|x.f(x)\right| dx < \infty$.

Características numéricas de una v.a	
Valor esperado o Esperanza matemática	
Variable aleatoria Discreta	**Variable aleatoria continua**
Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), se define la Esperanza matemática como: $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i)$$	Sea X una **variable aleatoria continua** (v.a.c), se define la Esperanza matemática como: $$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$
Propiedades del valor esperado o Esperanza Matemática	

1) Si $X = cte$ entonces $E(X)=c$
2) $E(cX)=cE(X)$ para toda constante c.
3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, (X e Y v.a.)
4) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$
5) $E(XY)=E(X)E(Y)$ si X e Y son v.a. independientes.
6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX+b)=aE(X)+b$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Hallar la esperanza matemática de la v. a. continua con f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x.0\,dx} + \int_{0}^{1} x.2x\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} x.0\,dx} = \int_{0}^{1} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

<u>Varianza de una variable aleatoria continua</u>:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

a. Si X es una v.a.c

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx$$

Varianza o Varianza Matemática

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), se define la Varianza matemática como: $$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$	Sea X una **variable aleatoria continua** (v.a.c), se define la Varianza matemática como: $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\, dx$$

Propiedades de la Varianza Matemática

1) Si $X = cte$ entonces $V(X) = 0$
2) $V(X + c) = V(X)$ para toda constante c.
3) $V(cX) = c^2 V(X)$ para toda constante c.
4) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)
5) $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2}$$

Definición: La dispersión de una v.a. X se define como

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

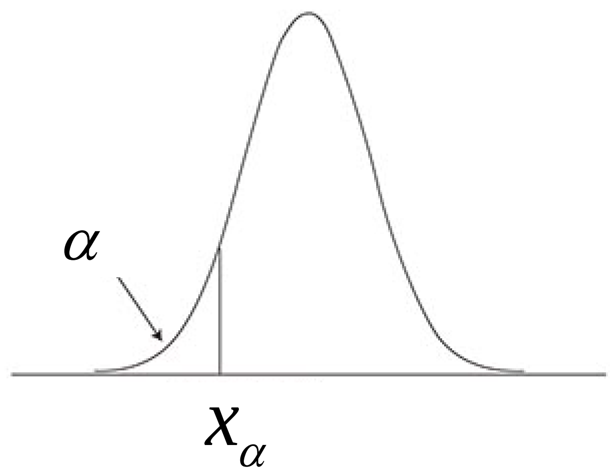
Cuantiles de una v. a. continua:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

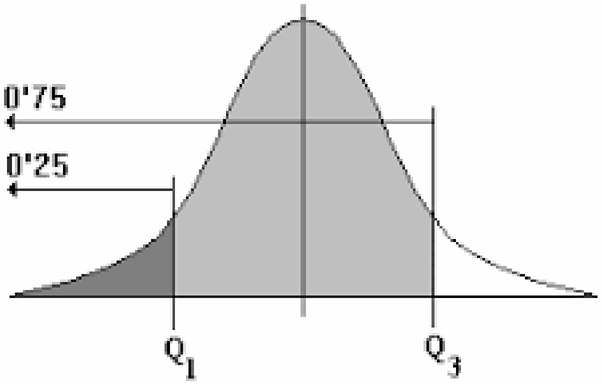
Cuantiles de una v. a. continua:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$



$$P(X < Q_1) = \int_{-\infty}^{Q_1} f(x)\,dx = 0.25$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

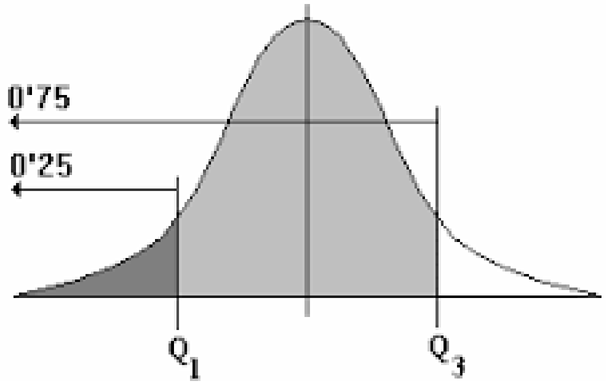
<u>Cuantiles de una v. a. continua</u>:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$

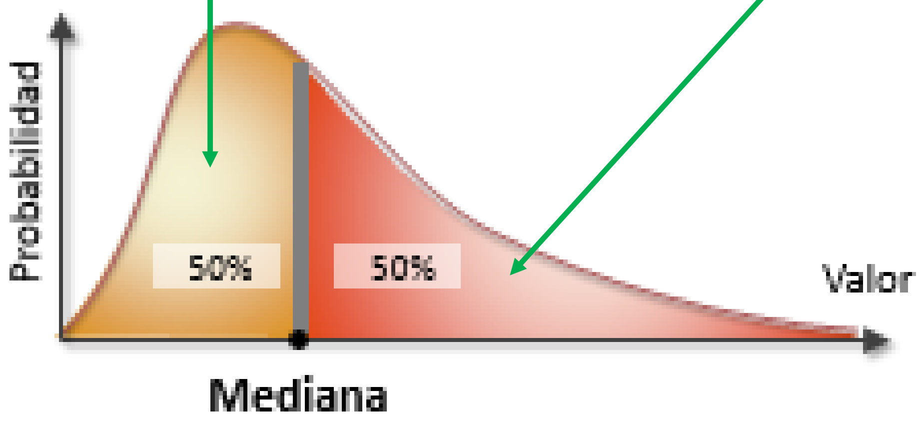


$$P(X < Q_3) = \int_{-\infty}^{Q_3} f(x)\,dx = 0.75$$

Mediana de una v.a. continua:

La media de una v.a continua es el valor m_e tal que

$$P(X < m_e) = \int_{-\infty}^{m_e} f(x)\,dx = 0,5 \quad \text{o} \quad P(X > m_e) = \int_{m_e}^{\infty} f(x)\,dx = 0,5$$



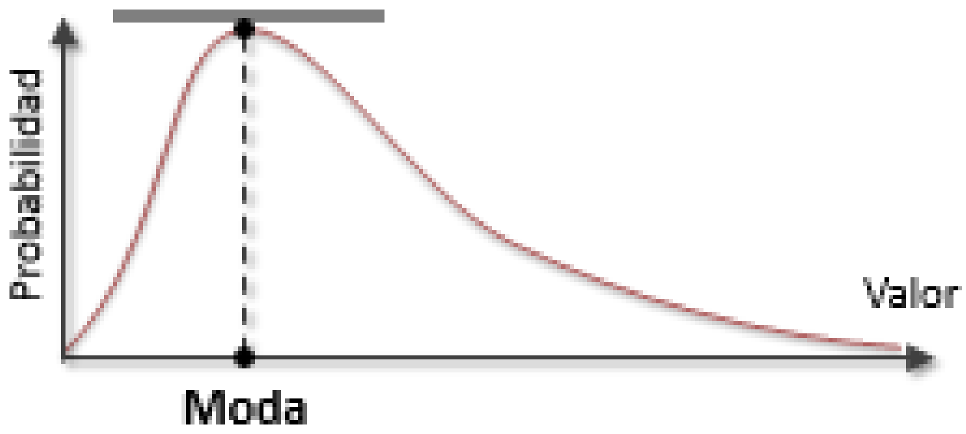
Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Moda de una v.a continua: es el valor de X para el cual $f(x)$ toma su valor máximo (si la fdp tiene un solo máximo)

Si f y f' son derivables en a, a es un máximo relativo o local si cumple

1) $f'(a)=0$

2) $f''(a)<0$



Algunas V.A.C. Teóricas

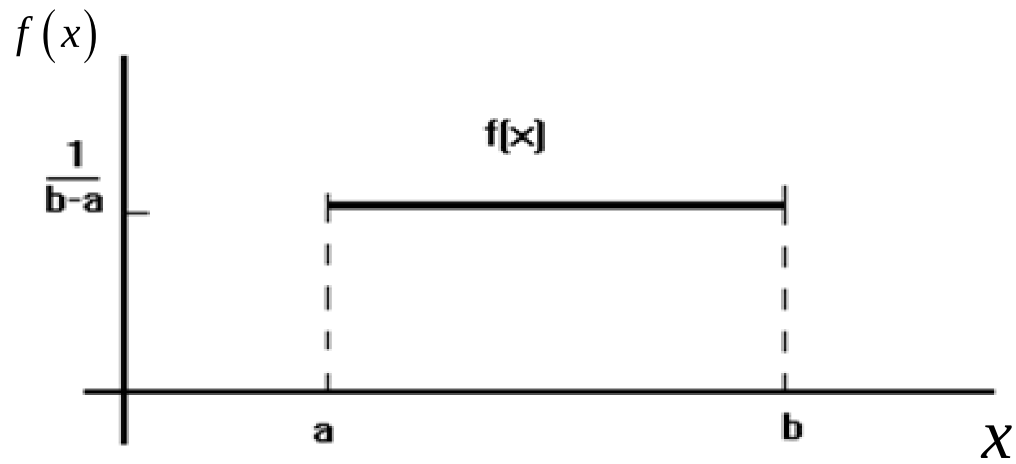
Algunas distribuciones teóricas	
Discretas	**Continuas**
Bernoulli: Asociado a un experimento dicotómico. **Binomial: como una suma de variables aleatorias con distribución Bernoull, independientes.** **Hipergeométrica:** **Poisson: número de éxitos por unidad de medida.**	**Uniforme**: **Exponencial**: **Normal**:

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Distribución Uniforme</u>

<u>Definición</u>: Se dice que una v. a. X tiene una distribución uniforme, notada como $X \sim U[a,b]$, en el intervalo $[a,b]$ si su f.d.p está dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a,b] \\ 0 & si\ x\notin[a,b] \end{cases}$$



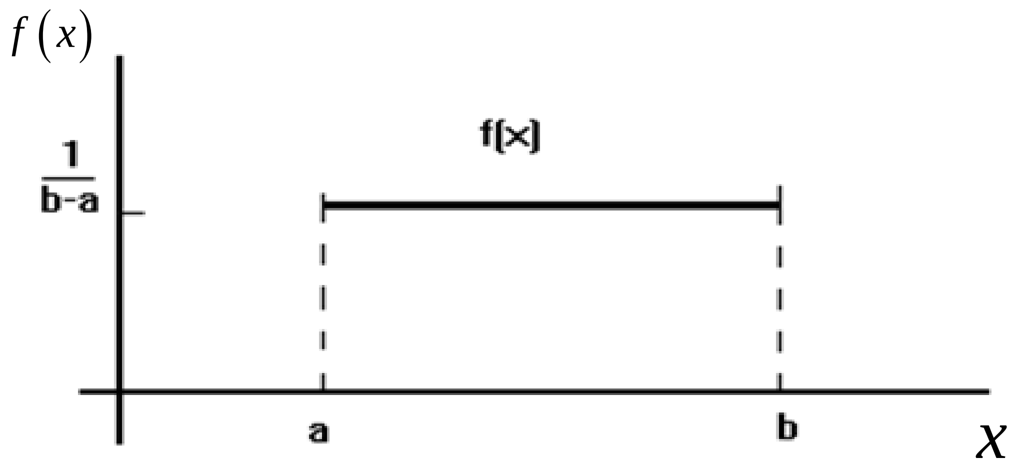
La distribución Uniforme corresponde al caso de una variable aleatoria que sólo puede tomar valores comprendidos entre dos extremos a y b, de manera que todos los intervalos de una misma longitud (dentro de (a, b)) tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Distribución Uniforme

Definición: Se dice que una v. a. X tiene una distribución uniforme, notada como $X \sim U[a,b]$, en el intervalo $[a,b]$ si su f.d.p está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & si\ x \notin [a,b] \end{cases}$$



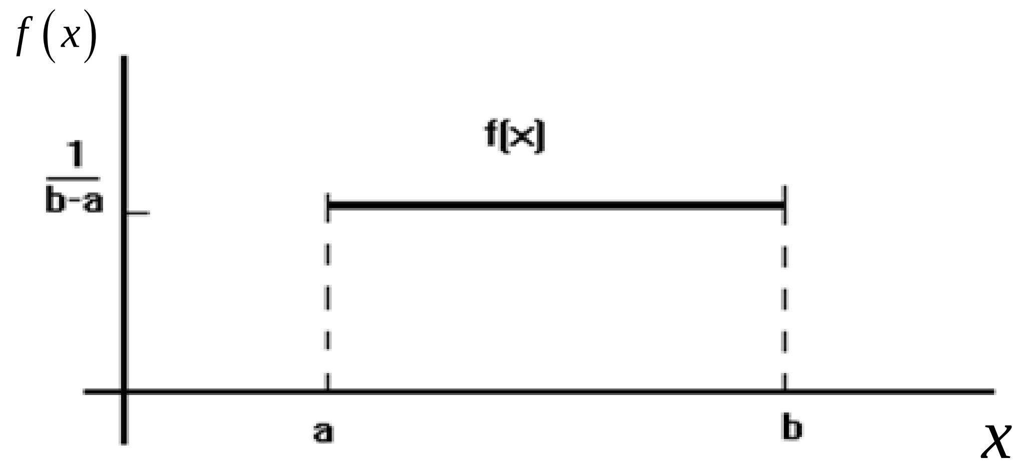
Veamos que $f(x)$ así definida es una legítima f.d.p:

Definición de Variable Aleatoria Continua

Distribución Uniforme

Definición: Se dice que una v. a. X tiene una distribución uniforme, notada como $X \sim U[a,b]$, en el intervalo $[a,b]$ si su f.d.p está dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a,b] \\ 0 & si\ x\notin[a,b] \end{cases}$$



Veamos que $f(x)$ así definida es una legítima f.d.p:

a) $f(x)\geq 0 \quad \forall x$ por definición

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} 0\,dx} + \int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\,dx + \cancel{\int_{b}^{\infty} 0\,dx} = \left.\frac{x}{b-a}\right|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$

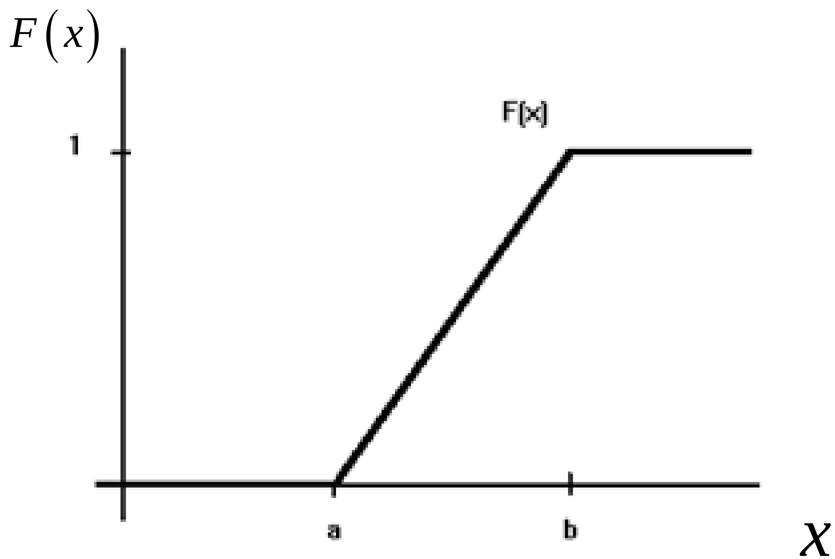
Observación: la probabilidad sólo depende de la longitud del intervalo y no de la ubicación del mismo.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Propiedades de la distribución uniforme.

a) La FDA de la distribución uniforme está dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a\leq x\leq b \\ 1 & si\ x>b \end{cases}$$



EJERCICIO

Definición de Variable Aleatoria Continua

b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución uniforme $X \sim U[a,b]$ es $E(X)=\frac{b+a}{2}$, geométricamente $E(X)$ se corresponde con el punto medio del intervalo.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx =$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & si\ x \notin [a,b] \end{cases}$$

b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución uniforme $X \sim U[a,b]$ es $E(X)=\dfrac{b+a}{2}$, geométricamente $E(X)$ se corresponde con el punto medio del intervalo.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} x\, 0\, dx} + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx + \cancel{\int_{b}^{\infty} x\, 0\, ds} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{b}\right] =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{\cancel{(b-a)}\,(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a,b] \\ 0 & si\ x\notin[a,b] \end{cases}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución uniforme $X \sim U[a,b]$ es $E(X)=\dfrac{b+a}{2}$, geométricamente $E(X)$ se corresponde con el punto medio del intervalo.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{a} x\, 0\, dx} + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx + \cancel{\int_{b}^{\infty} x\, 0\, ds} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{b}\right] =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{\cancel{(b-a)}\,(b+a)}{2\,\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

c) La varianza de una variable aleatoria con distribución uniforme $X \sim U[a,b]$ es $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

EJERCICIO

Definición de Variable Aleatoria Continua

Una variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo (2, 4). Se pide:

a) $P(X < 2{,}5) =$
b) $P(X > 3{,}2) =$
c) $P(2{,}2 < X < 3{,}5) =$
d) Esperanza y varianza

EJERCICIO

Función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{1}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Una variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo (2, 4). Se pide:

a) P(X < 2,5) =
b) P(X >3,2) =
c) P(2,2< X< 3,5) =
d) Esperanza y varianza

EJERCICIO

Función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$

Función distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x-2}{4-2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Una variable aleatoria X se distribuye uniformemente en el intervalo (2, 4). Se pide:

a) P(X < 2,5) =
b) P(X >3,2) =
c) P(2,2< X< 3,5) =
d) Esperanza y varianza

EJERCICIO

Función densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2} & 2\leq x\leq 4 \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$

Función distribución:

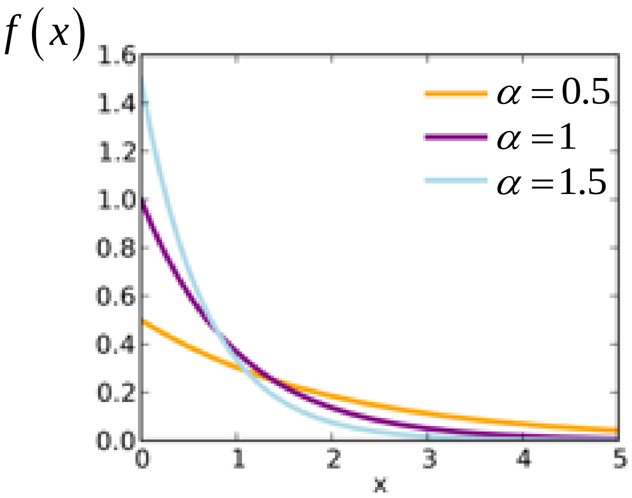
$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{x-2}{4-2} & 2\leq x\leq 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$

$$\textbf{a)}\quad P(X<2{,}5)=F(2{,}5)=\frac{2{,}5-2}{2}=0{,}25$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Definición: Se dice que una v. a. X tiene una distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$, notada como $X \sim \exp(\alpha)$, si su f.d.p está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$



Se utiliza para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un cierto evento.

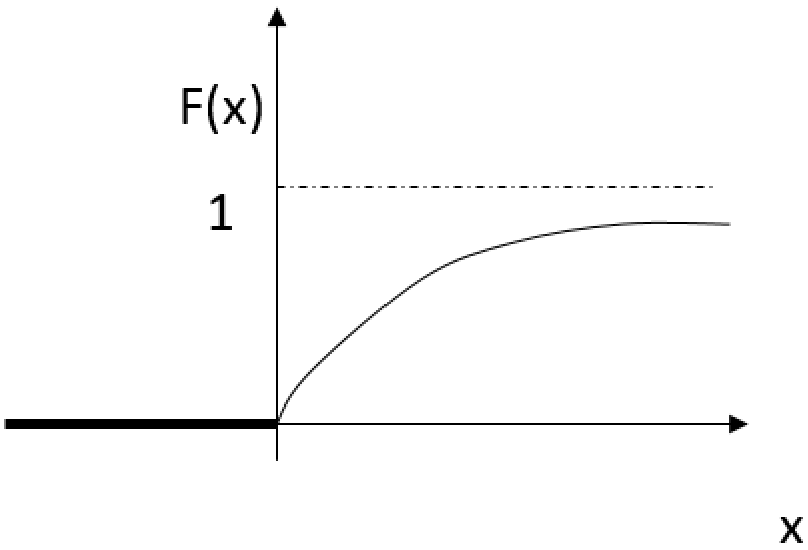
Propiedades de la distribución exponencial.

a) La FDA de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 1-e^{-\alpha x} & si\ x\geq 0\end{cases}$$

(Demostración Ejercicio)

Por lo tanto $P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\left[1-e^{-\alpha x}\right]=e^{-\alpha x}$



Definición de Variable Aleatoria Continua

b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$ $\boxed{X \sim \exp(\alpha) \text{ es } E(X) = \frac{1}{\alpha}}$

c) La varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$ $X \sim \exp(\alpha)$ es $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

Definición de Variable Aleatoria Continua

b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$ $\boxed{X \sim \exp(\alpha) \text{ es } E(X) = \frac{1}{\alpha}}$

c) La varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$ $\boxed{X \sim \exp(\alpha) \text{ es } V(X) = \frac{1}{\alpha^2}}$

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo distribución exponencial</u>:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo distribución exponencial</u>:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Sea Y: tiempo que un dispositivo funciona correctamente. $Y \sim \exp(\alpha)$. Por hipótesis

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo distribución exponencial:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Sea Y: tiempo que un dispositivo funciona correctamente. $Y \sim \exp(\alpha)$. Por hipótesis

$E(Y) = \frac{1}{\alpha} = 360 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{360}$. Para este parámetro la FDA queda definida por:

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo distribución exponencial:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Sea Y: tiempo que un dispositivo funciona correctamente. $Y \sim \exp(\alpha)$. Por hipótesis $E(Y) = \frac{1}{\alpha} = 360 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{360}$. Para este parámetro la FDA queda definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{360}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo distribución exponencial:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Sea Y: tiempo que un dispositivo funciona correctamente. $Y \sim \exp(\alpha)$. Por hipótesis

$E(Y) = \frac{1}{\alpha} = 360 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{360}$. Para este parámetro la FDA queda definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{360}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) $P(Y < 180) = F(180) = 1 - e^{-\frac{1}{360} \times 180} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$

Ejemplo distribución exponencial:

El tiempo que un dispositivo funciona correctamente, es decir, el tiempo en horas de duración hasta la primera falla, se distribuye de manera exponencial con una vida media de 360hs. ¿cuál es la probabilidad de que un dispositivo funcione correctamente?

a) Menos de 180hs.

b) Más de 720hs.

Sea Y: tiempo que un dispositivo funciona correctamente. $Y \sim \exp(\alpha)$. Por hipótesis $E(Y) = \frac{1}{\alpha} = 360 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{360}$. Para este parámetro la FDA queda definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{360}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) $P(Y < 180) = F(180) = 1 - e^{-\frac{1}{360}\times 180} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$

b) $P(Y > 720) = 1 - P(Y \leq 720) = 1 - F(720) = e^{-\frac{1}{360}\times 720} = e^{-2} = 0.1353$

Definición de Variable Aleatoria Continua

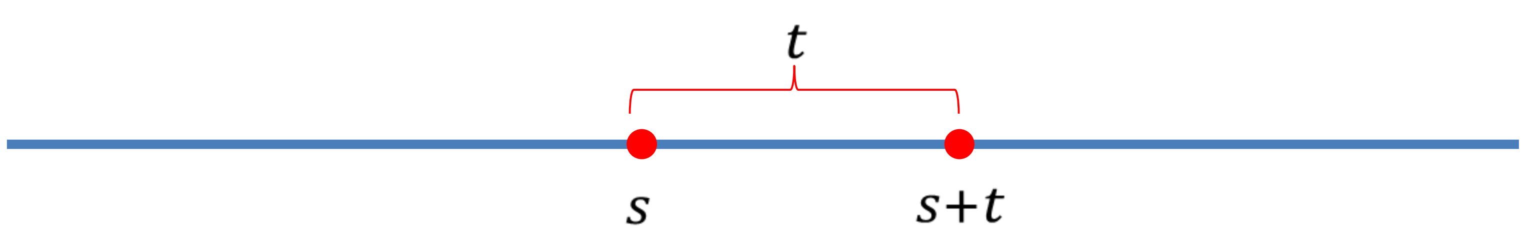
b) El valor esperado de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0 \quad X \sim \exp(\alpha)$ es $E(X) = \dfrac{1}{\alpha}$

c) La varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0 \quad X \sim \exp(\alpha)$ es $V(X) = \dfrac{1}{\alpha^2}$

d) La distribución exponencial tiene la siguiente propiedad importante, denominada "propiedad de la falta de memoria".

Sea $X \sim \exp(\alpha)$, la propiedad de la falta de memoria nos dice que

$$P(X > s + t / X > s) = P(X > t)$$



Definición de Variable Aleatoria Continua

Supongamos que la duración (en años) de cierto tipo de heladera es una v.a. X con distribución exponencial de parámetro α=1. Determinar la probabilidad de que la heladera funcione más de 3 años, si lleva funcionando al menos 1 año

Sea X: duración (en años) de cierto tipo de heladera. $X \sim \exp(\alpha) \text{ con } \alpha = 1$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Supongamos que la duración (en años) de cierto tipo de heladera es una v.a. X con distribución exponencial de parámetro α=1. Determinar la probabilidad de que la heladera funcione más de 3 años, si lleva funcionando al menos 1 año

Sea X: duración (en años) de cierto tipo de heladera. $X \sim \exp(\alpha)$ con $\alpha=1$

$$P\left(X > 3 / X > 1\right) =$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Supongamos que la duración (en años) de cierto tipo de heladera es una v.a. X con distribución exponencial de parámetro α=1. Determinar la probabilidad de que la heladera funcione más de 3 años, si lleva funcionando al menos 1 año

Sea X: duración (en años) de cierto tipo de heladera. $X \sim \exp(\alpha)$ con $\alpha = 1$

$$P(X > 3 / X > 1) =$$

Sea $X \sim \exp(\alpha)$, la propiedad de la falta de memoria nos dice que

$$P(X > s + t / X > s) = P(X > t)$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Supongamos que la duración (en años) de cierto tipo de heladera es una v.a. X con distribución exponencial de parámetro α=1. Determinar la probabilidad de que la heladera funcione más de 3 años, si lleva funcionando al menos 1 año

Sea X: duración (en años) de cierto tipo de heladera. $X \sim \exp(\alpha)$ con $\alpha=1$

$$P\left(X>3/X>1\right)=$$

Sea $X \sim \exp(\alpha)$, la propiedad de la falta de memoria nos dice que

$$P(X>s+t/X>s)=P(X>t)$$

$$P\left(X>\underbrace{\underbrace{3}_{1+2}}_{s+t}\Big/X>\underbrace{1}_{s}\right)=P\left(X>\underbrace{2}_{t}\right)=?$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial.

Sea X: “número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo”

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial</u>.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Para poder determinar la probabilidad de que no haya ocurrencias en un período de tiempo t debemos ajustar la tasa de frecuencias medias para un período de tiempo t, es decir λt.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Para poder determinar la probabilidad de que no haya ocurrencias en un período de tiempo t debemos ajustar la tasa de frecuencias medias para un período de tiempo t, es decir λt .

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{0}}{0!}=e^{-\lambda t}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Para poder determinar la probabilidad de que no haya ocurrencias en un período de tiempo t debemos ajustar la tasa de frecuencias medias para un período de tiempo t, es decir λt .

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{0}}{0!}=e^{-\lambda t}$$

Por otro lado, la v. a. T: tiempo que se requiere hasta la primera ocurrencia de Poisson

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial</u>.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Para poder determinar la probabilidad de que no haya ocurrencias en un período de tiempo t debemos ajustar la tasa de frecuencias medias para un período de tiempo t, es decir λt.

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}=e^{-\lambda t}$$

Por otro lado, la v. a. T: tiempo que se requiere hasta la primera ocurrencia de Poisson, tiene una distribución exponencial de parámetro $\alpha=\lambda$.

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Relación entre las distribuciones de Poisson y Exponencial</u>.

Sea X: "número de ocurrencias de un suceso A en un período de tiempo" X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.

Para poder determinar la probabilidad de que no haya ocurrencias en un período de tiempo t debemos ajustar la tasa de frecuencias medias para un período de tiempo t, es decir λt.

$$P\left(X=0\right)=\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^{0}}{0\,!}=e^{-\lambda t}$$

Por otro lado, la v. a. T: tiempo que se requiere hasta la primera ocurrencia de Poisson, tiene una distribución exponencial de parámetro $\alpha=\lambda$.

$$P\left(T>t\right)=e^{-\lambda t}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

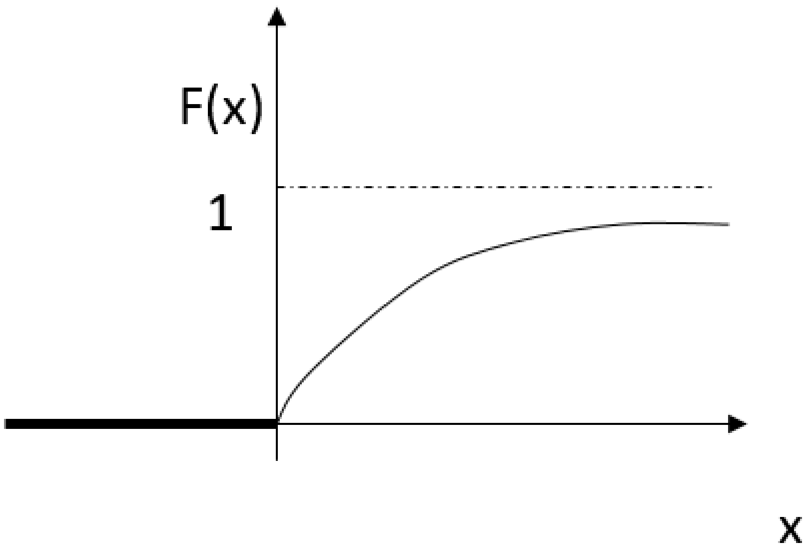
Propiedades de la distribución exponencial.

a) La FDA de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 1-e^{-\alpha x} & si\ x\geq 0\end{cases}$$

(Demostración Ejercicio)

Por lo tanto $\boxed{P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\left[1-e^{-\alpha x}\right]=e^{-\alpha x}}$



Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$$\boxed{\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \quad \text{Número esperado de emisiones en un minuto.}}$$

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Número esperado de emisiones en un minuto.

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Número esperado de emisiones en un minuto.

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-1{,}5} 1{,}5^{0}}{0!} = e^{-1{,}5}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Número esperado de emisiones en un minuto.

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1,5$

$P(Y = 0) = \frac{e^{-1,5} 1,5^0}{0!} = e^{-1,5}$ es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos, ya que en un período de tres minutos no se produjo ninguna emisión.

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Número esperado de emisiones en un minuto.

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1,5$

$$P(Y=0) = \frac{e^{-1,5} 1,5^0}{0!} = e^{-1,5}$$

es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos, ya que en un período de tres minutos no se produjo ninguna emisión.

b) Consideremos ahora la v. a T definida por: T: tiempo en minutos hasta que ocurra la próxima emisión

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ Número esperado de emisiones en un minuto.

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$

$P(Y=0) = \frac{e^{-1,5} 1{,}5^{0}}{0!} = e^{-1,5}$ es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos, ya que en un período de tres minutos no se produjo ninguna emisión.

b) Consideremos ahora la v. a T definida por: T: tiempo en minutos hasta que ocurra la próxima emisión $T \sim \exp(\alpha)$ $\alpha = \lambda = \frac{1}{2}$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea X la variable aleatoria número de partículas emitidas por una fuente radiactiva. Si se sabe que el número esperado de emisiones en una hora es de 30 partículas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos?

$$\boxed{\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \quad \text{Número esperado de emisiones en un minuto.}}$$

Solución/

Este problema lo podemos abordar de dos maneras según la variable aleatoria que se define:

a) Consideremos en primer lugar la v. a Y definida por :

Y: número de partículas emitidas en 3 min. $Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$

$\boxed{P(Y=0) = \frac{e^{-1,5} 1{,}5^0}{0!} = e^{-1,5}}$ es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea mayor a 3 minutos, ya que en un período de tres minutos no se produjo ninguna emisión.

b) Consideremos ahora la v. a T definida por: T: tiempo en minutos hasta que ocurra la próxima emisión $T \sim \exp(\alpha)$ $\alpha = \lambda = \frac{1}{2}$

$$\boxed{P(T>3) = e^{-\frac{1}{2}\times 3} = e^{-1,5}}$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

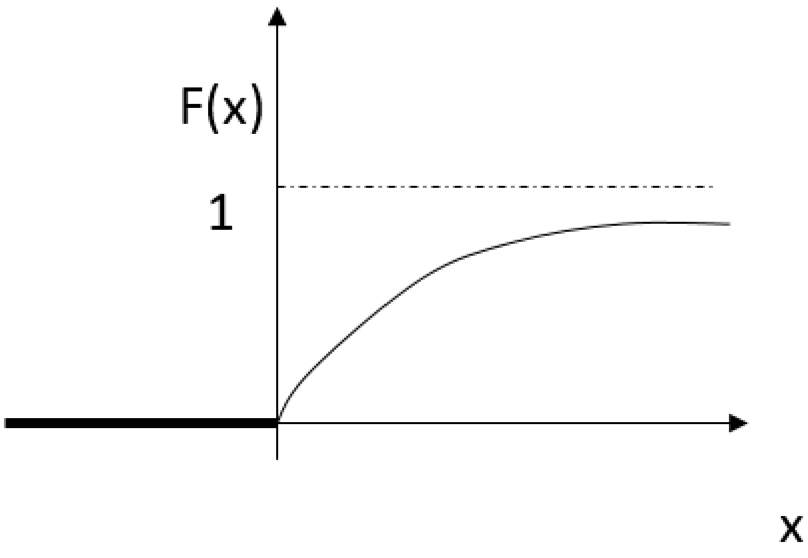
Propiedades de la distribución exponencial.

a) La FDA de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-e^{-\alpha x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

(Demostración Ejercicio)

Por lo tanto $\boxed{P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\left[1-e^{-\alpha x}\right]=e^{-\alpha x}}$



Definición de Variable Aleatoria Continua