

Variable Aleatoria

Dr. Pastore, Juan Ignacio

Resumen de la presentación.

Aspectos importantes que describen un **experimento aleatorio**:

- Es posible repetir cada experimento en forma independiente sin cambiar esencialmente las condiciones de experimentación.
- Aunque en general no podemos indicar cuál será un resultado particular del experimento podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
- A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir siguiendo cierto patrón.

Ejemplo:

$\mathcal{E}$: Se arroja un dado y se observa el número de la cara superior.

Espacio Muestral: con cada experimento se define el ***espacio muestral*** asociado como el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Se simboliza con la letra S.

Resumen de la presentación.

Clasificación de espacios muestrales:

Espacios muestrales discretos sus elementos resultan de hacer conteos.

Espacios muestrales continuos sus resultados resultan de hacer mediciones.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- b) **Sucesos imposibles**, con certeza no ocurrirán independientemente si se cumplen ciertas condiciones.

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- b) **Sucesos imposibles**, con certeza no ocurrirán independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- c) **Sucesos aleatorios**, son aquellos que pueden o no ocurrir.

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- b) **Sucesos imposibles**, con certeza no ocurrirán independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- c) **Sucesos aleatorios**, son aquellos que pueden o no ocurrir.
- d) **Sucesos mutuamente excluyentes**; no pueden ocurrir juntos.

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- b) **Sucesos imposibles**, con certeza no ocurrirán independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- c) **Sucesos aleatorios**, son aquellos que pueden o no ocurrir.
- d) **Sucesos mutuamente excluyentes**; no pueden ocurrir juntos.
- e) **Sucesos únicamente posibles**. (los sucesos únicamente posibles son mutuamente excluyentes pero la recíproca no necesariamente vale).

Resumen de la presentación.

Suceso: es el resultado de un experimento. Si nos basamos en la definición de espacio muestral, un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Formalmente, se llama suceso A respecto de un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio a todo subconjunto de S .

Clasificación de sucesos:

- a) **Sucesos ciertos**, ocurren siempre independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- b) **Sucesos imposibles**, con certeza no ocurrirán independientemente si se cumplen ciertas condiciones.
- c) **Sucesos aleatorios**, son aquellos que pueden o no ocurrir.
- d) **Sucesos mutuamente excluyentes**; no pueden ocurrir juntos.
- e) **Sucesos únicamente posibles**. (los sucesos únicamente posibles son mutuamente excluyentes pero la recíproca no necesariamente vale).
- f) **Sucesos igualmente posibles o probables**: todos los sucesos tienen la misma “probabilidad” de ocurrir.

Resumen de la presentación.

Operaciones con sucesos

Al suponer los sucesos como subconjuntos del conjunto $\mathbf{S}$ (espacio muestral) la teoría de conjuntos juega un importante papel en probabilidades. Podremos aplicar operaciones como unión, intersección y diferencia:

1.Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B se llama **unión de A y B** , y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B , o ambos simultáneamente.

Resumen de la presentación.

Operaciones con sucesos

Al suponer los sucesos como subconjuntos del conjunto **S** (espacio muestral) la teoría de conjuntos juega un importante papel en probabilidades. Podremos aplicar operaciones como unión, intersección y diferencia:

1.Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B se llama **unión de A y B**, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B, o ambos simultáneamente.

2.Intersección de sucesos: Dados dos sucesos A y B, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente A y B.

Resumen de la presentación.

Operaciones con sucesos

Al suponer los sucesos como subconjuntos del conjunto **S** (espacio muestral) la teoría de conjuntos juega un importante papel en probabilidades. Podremos aplicar operaciones como unión, intersección y diferencia:

1.Unión de sucesos: Dados dos sucesos **A** y **B** se llama **unión de A y B**, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, **A** o **B**, o ambos simultáneamente.

2.Intersección de sucesos: Dados dos sucesos **A** y **B**, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente **A** y **B**.

3.Sucesos Complementarios: Dado un suceso **A**, se llama **suceso contrario** o **complementario** de **A**, y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza **A** y recíprocamente.

Resumen de la presentación.

Operaciones con sucesos

Al suponer los sucesos como subconjuntos del conjunto **S** (espacio muestral) la teoría de conjuntos juega un importante papel en probabilidades. Podremos aplicar operaciones como unión, intersección y diferencia:

1.Unión de sucesos: Dados dos sucesos **A** y **B** se llama **unión de A y B**, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, **A** o **B**, o ambos simultáneamente.

2.Intersección de sucesos: Dados dos sucesos **A** y **B**, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente **A** y **B**.

3.Sucesos Complementarios: Dado un suceso **A**, se llama **suceso contrario** o **complementario** de **A**, y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza **A** y recíprocamente.

4.Suceso contenido en otro: Un suceso **A** se dice que está contenido o inducido en otro **B** si siempre que se verifica **A** se verifica **B**. Se representa $A \subset B$.

Resumen de la presentación.

Definición clásica de Probabilidad.

➤ Clásica o de Laplace – “A priori”

Dado un experimento y su espacio muestral asociado, se llama probabilidad de un suceso A a la razón entre el número de resultados favorables a A (m) y el número total de resultados posibles (n). (Bajo la suposición de que cada uno de estos resultados son igualmente probables).

En símbolos:

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de casos favorables}}{n^{\circ} \text{ de casos totales}} = \frac{m}{n} \quad \text{con } n > 0;$$

Probabilidad Condicional:

Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento tal que $P(A) > 0$, se define la probabilidad de B condicionada al evento A como:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Teorema del producto de probabilidades

De la definición de probabilidad condicional tenemos que:

$$P(A) > 0, \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

o su equivalente

$$P(B) > 0, \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

Podemos generalizar el resultado para una secuencia de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Sucesos Independientes

De las propiedades **b)** y **c)** de la probabilidad condicional:

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad B \subset A \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \\ c) \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A/B) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La ocurrencia del suceso B,} \\ \text{influye en la probabilidad de} \\ \text{ocurrencia del suceso A.} \end{array}$$

Existen muchos casos en los cuales la ocurrencia de un suceso B no tiene influencia en la PROBABILIDAD de ocurrencia de otro suceso A. Es decir:

$$P(A/B) = P(A)$$

En este caso los sucesos A y B son **Sucesos Independientes**.

De la definición de probabilidad conjunta tenemos que:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

Si A y B son sucesos independientes Tenemos que $P(A/B)=P(A)$, por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(B) \underbrace{P(A/B)}_{P(A)} = P(B)P(A)$$

Por lo tanto diremos que dos sucesos A y B **son independientes** si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Generalización:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos independientes si y solo sí para $k=2, \dots, n$

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \dots P\left(A_{i_k}\right)$$

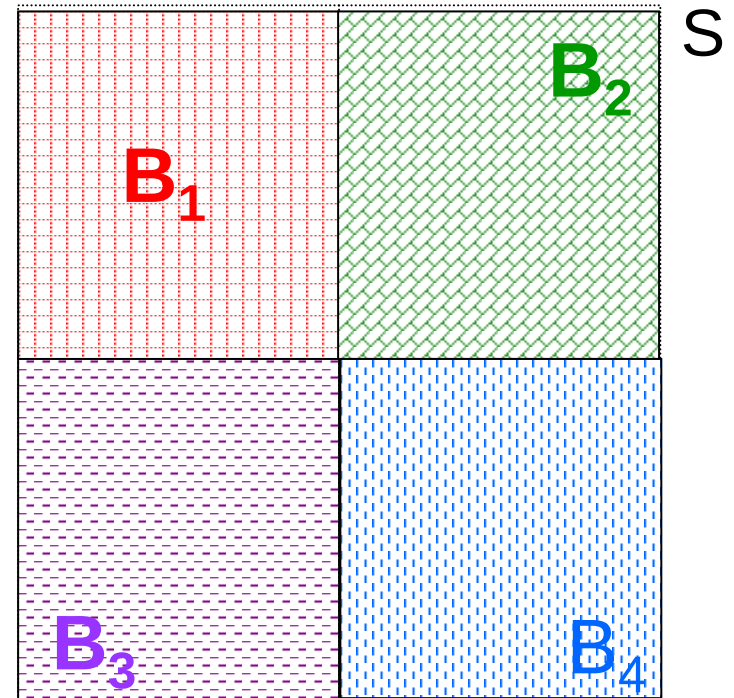
Teorema de la probabilidad total

Definición: Diremos que los sucesos $B_1, B_2, \dots, B_n$ representan una **partición** del espacio muestral S si:

$$a) \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$b) \quad S = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

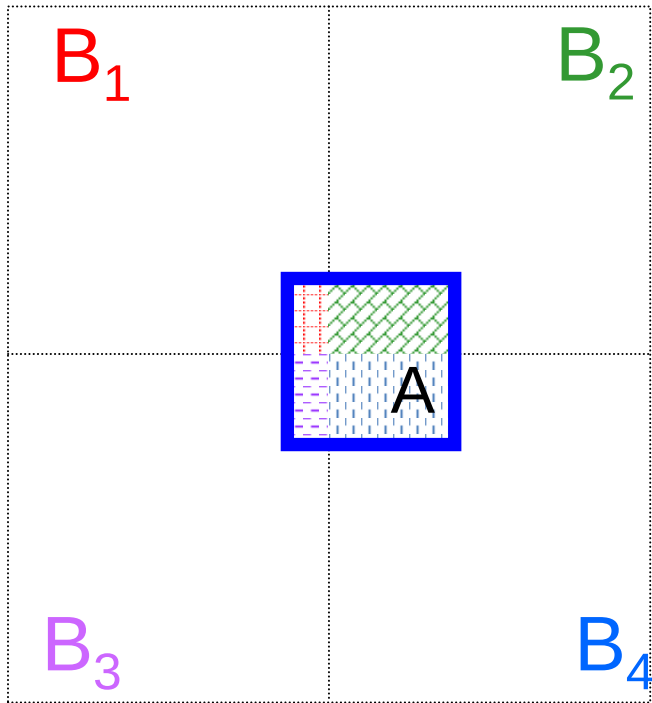
$$c) \quad P(B_i) > 0 \quad \forall i$$



En palabras: cuando se efectúa el experimento, ocurre uno y sólo uno de los sucesos B_i

Teorema de la probabilidad total

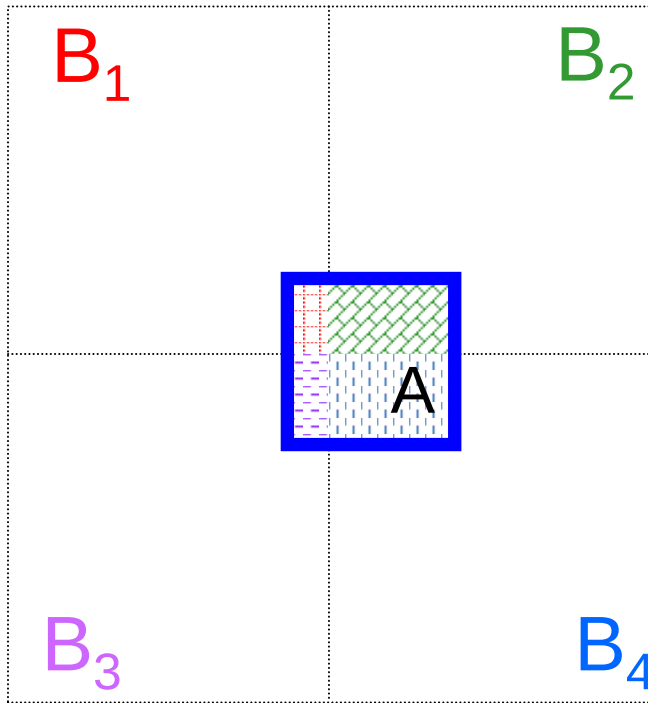
Sea $B_1, B_2, \dots, B_n$ una partición de S y sea A un suceso cualquiera asociado a S del que se conocen las probabilidades condicionales $P(A/B_i)$, entonces la probabilidad del suceso A está dada por:



$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Teorema de Bayes

Sea $B_1, B_2, \dots, B_n$ una partición de S y sea A un suceso cualquiera asociado a S del que se conocen las probabilidades condicionales $P(A/B_i)$, entonces la probabilidad del suceso A está dada por:



$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A / B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}$$

$P(B_j)$ son las probabilidades a priori

$P(A / B_j)$ es la probabilidad de A en la hipótesis B_i

$P(B_j / A)$ son las probabilidades a posteriori

El **Teorema de Bayes** nos permite calcular las probabilidades a posteriori conocidas las probabilidades a priori.

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- a) Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- a) Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- a) Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P:** “Jugo de Pomelo” y **D:** “Jugo de Durazno” **T2I:** “tetrabrik de 2 l”

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- a) Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- a) Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P**: “Jugo de Pomelo” y **D**: “Jugo de Durazno” **T2I**: “tetrabrik de 2 l”

$$P(N) = 0.6 \quad P(P) = 0.3 \quad P(D) = 0.1$$

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- a) Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- a) Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P:** “Jugo de Pomelo” y **D:** “Jugo de Durazno” **T2l:** “tetrabrik de 2 l”

$$P(N) = 0.6 \quad P(P) = 0.3 \quad P(D) = 0.1$$

$$P(T2l/N) = 0.8 \quad P(T2l/P) = 0.7 \quad P(T2l/D) = 0.4$$

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- a) Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- a) Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P**: “Jugo de Pomelo” y **D**: “Jugo de Durazno” **T2l**: “tetrabrik de 2 l”

$$P(N) = 0.6 \quad P(P) = 0.3 \quad P(D) = 0.1$$

$$P(T2l/N) = 0.8 \quad P(T2l/P) = 0.7 \quad P(T2l/D) = 0.4$$

$$P(N/T2l) =$$

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P:** “Jugo de Pomelo” y **D:** “Jugo de Durazno” **T2l:** “tetrabrik de 2 l”

$$P(N) = 0.6 \quad P(P) = 0.3 \quad P(D) = 0.1$$

$$P(T2l/N) = 0.8 \quad P(T2l/P) = 0.7 \quad P(T2l/D) = 0.4$$

$$P(N/T2l) = \frac{P(T2l/N) \times P(N)}{P(T2l)} \cong$$

Ejemplo: Una empresa productora de jugos naturales envasa jugos de naranja, pomelo y durazno en cajas tetrabrik de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de los productos son de jugo de naranja, el 30% de pomelo y el 10% de durazno. Además, el 80% de los jugos de naranja y el 70% de los jugos de pomelo son de 2 litros, mientras que el 60% de los jugos de durazno son de 1 litro. Se elige al azar un jugo envasado para un control de calidad.

- Calcular la probabilidad de que el jugo sea de naranja, sabiendo que el envase seleccionado es de 2 litros.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea de 1 litro.

Solución/

- Definimos los sucesos **N**, **P** y **D** cómo:

N: “Jugo de Naranja”, **P:** “Jugo de Pomelo” y **D:** “Jugo de Durazno” **T2l:** “tetrabrik de 2 l”

$$P(N) = 0.6 \quad P(P) = 0.3 \quad P(D) = 0.1$$

$$P(T2l/N) = 0.8 \quad P(T2l/P) = 0.7 \quad P(T2l/D) = 0.4$$

$$P(N/T2l) = \frac{P(T2l/N) \times P(N)}{P(T2l)} \cong \frac{0,8 \times 0,6}{0,8 \times 0,6 + 0,7 \times 0,3 + 0,4 \times 0,1} \cong \underline{0.66}$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

$S = \{\text{nombre de los empleados de la empresa}\}$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

$S = \{\text{nombre de los empleados de la empresa}\}$

X : número de hijos del empleado.

$$X: S \rightarrow R_x, \quad X(s) = x$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

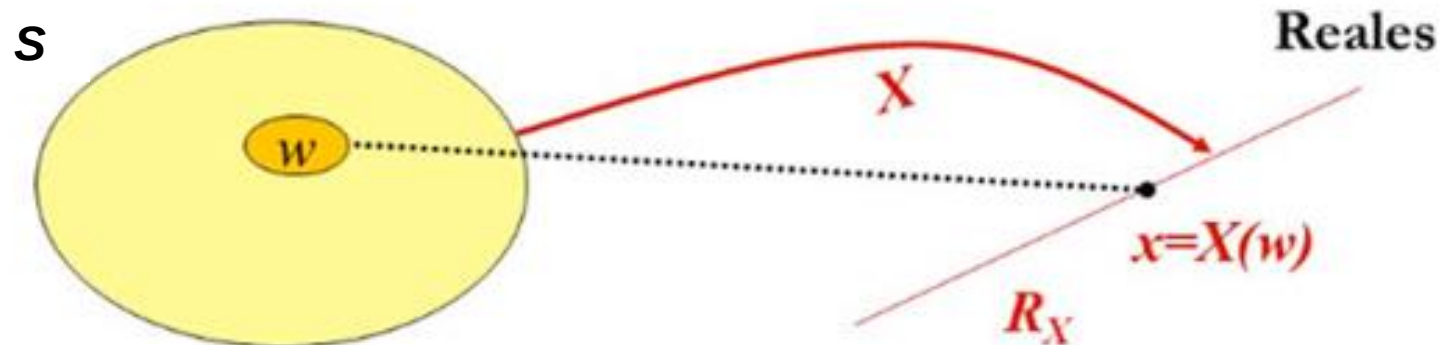
En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

$S = \{\text{nombre de los empleados de la empresa}\}$

X : número de hijos del empleado.

$$X: S \rightarrow R_X, \quad X(s) = x$$



Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

$S = \{\text{nombre de los empleados de la empresa}\}$

X : número de hijos del empleado.

$$X: S \rightarrow R_X, \quad X(s) = x$$

Y : antigüedad en el cargo del empleado.

$$Y: S \rightarrow R_Y, \quad Y(s) = y$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Variable aleatoria.

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un valor numérico.

En numerosas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S .

Ejemplo: Consideremos el experimento: de una urna que contiene todos los nombres de los empleados de una empresa se extrae un nombre al azar.

$S = \{\text{nombre de los empleados de la empresa}\}$

X : número de hijos del empleado.

$$X: S \rightarrow R_X, \quad X(s) = x$$

Y : antigüedad en el cargo del empleado.

$$Y: S \rightarrow R_Y, \quad Y(s) = y$$

X e y son variables aleatorias.

Definición: Sea ε un experimento y S el espacio muestral asociado al experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos del espacio muestral S un número real, se llama variable aleatoria.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Gráficamente:

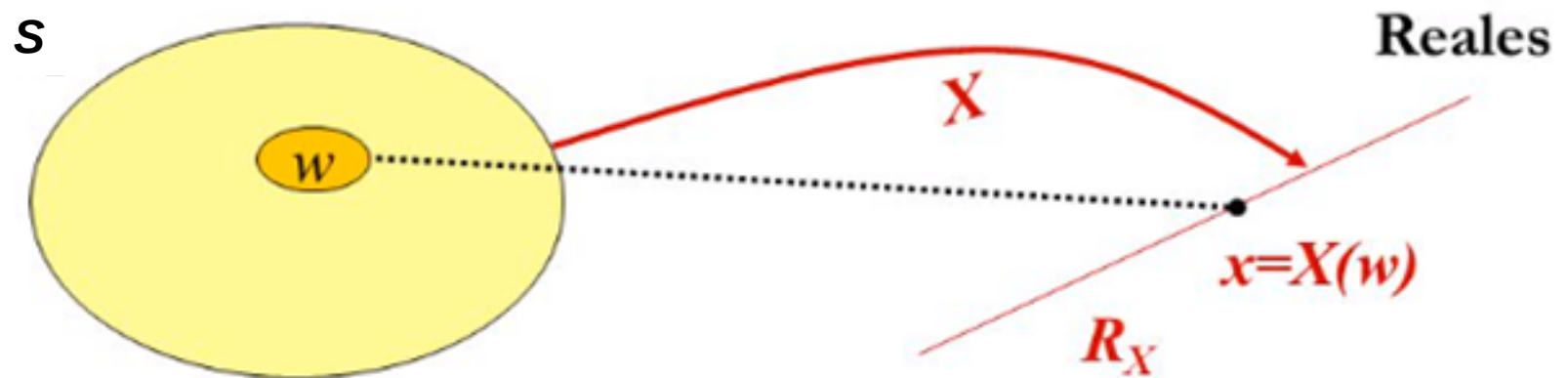


Fig. Representación gráfica de una v.a

S : espacio muestral asociado a un experimento. R_X : valores posibles de X (recorrido de la v.a).

Observación: Si $X(s) = s$, es decir la función identidad, entonces $R_X = S$. En este caso el resultado del experimento es ya la característica numérica que queremos estudiar.

Axiomática de la teoría de probabilidades.

Ejemplo

ε_3 : Se arroja una moneda tres veces y se observa la sucesión de resultados (cara (c), cruz (X)) .

$$S_3 = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xxc, xc x, cxx, xxx\}$$

Axiomática de la teoría de probabilidades.

Ejemplo

ε_3 : Se arroja una moneda tres veces y se observa la sucesión de resultados (cara (c), cruz (X)) .

$$S_3 = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xxc, xc x, cxx, xxx\}$$

X: número de caras obtenidas al arroja una moneda tres veces.

Axiomática de la teoría de probabilidades.

Ejemplo

ε_3 : Se arroja una moneda tres veces y se observa la sucesión de resultados (cara (c), cruz (X)) .

$$S_3 = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xxc, xc x, cxx, xxx\}$$

X: número de caras obtenidas al arroja una moneda tres veces.

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

$S =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

$S =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Sobre este experimento podemos estar interesados en ciertas características numéricas.
Por **ejemplo**:

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X: suma de los valores observados.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X: suma de los valores observados.

$$R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La v.a. X : $S \rightarrow R_X$ queda definida de la siguiente manera:

$$X(s) = x_1 + x_2$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X : suma de los valores observados.

$$R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La v.a. $X : S \rightarrow R_X$ queda definida de la siguiente manera:

$$X(s) = x_1 + x_2$$

b) Y : valor máximo de los valores observados

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X : suma de los valores observados.

$$R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La v.a. $X : S \rightarrow R_X$ queda definida de la siguiente manera:

$$X(s) = x_1 + x_2$$

b) Y : valor máximo de los valores observados

$$R_Y = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$$

La v.a. $Y : S \rightarrow R_Y$ queda definida de la siguiente manera:

$$Y(s) = \max\{x_1, x_2\}$$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

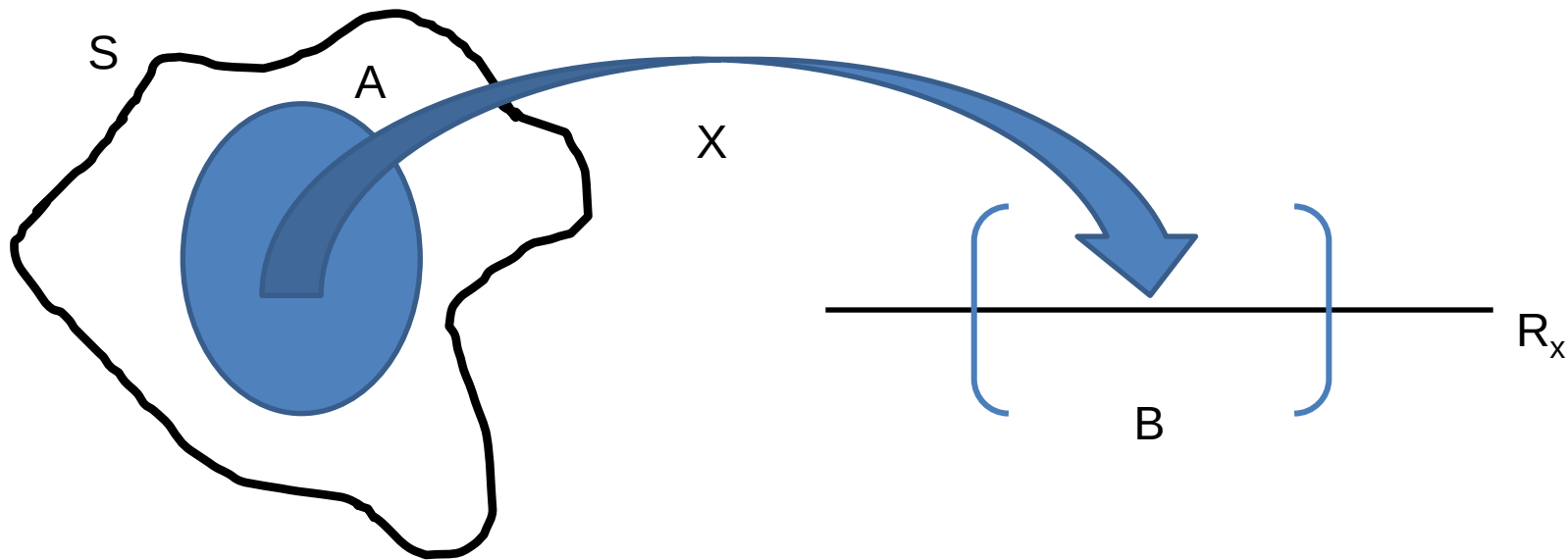
¿Cómo podemos calcular la probabilidad de eventos asociados a R_x ? Para esto daremos la definición de eventos equivalentes.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

¿Cómo podemos calcular la probabilidad de eventos asociados a R_X ? Para esto daremos la definición de eventos equivalentes.

Definición: Sea $\mathcal{E}$ un experimento y S el espacio muestral asociado al experimento. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_X su recorrido.

$A \subset S$ y $B \subset R_X$ son eventos equivalentes si $A = \{s \in S : X(s) \in B\}$



Definición de variable aleatoria (v.a.).

¿Cómo podemos calcular la probabilidad de eventos asociados a R_X ? Para esto daremos la definición de eventos equivalentes.

Definición: Sea B un evento en el recorrido R_X , entonces definimos $P(B)$ como sigue.

$P(B) = P(A)$, donde $A \subset S$ es un evento equivalente a B , $A = \{s \in S : X(s) \in B\}$

Variable aleatoria discreta

Variables aleatorias discretas

Definición: Se dice que X es una **variable aleatoria discreta (v.a.d)** si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que:

$$P(x_i) = P(X = x_i) = \{s \in S : X(s) = x_i\}$$

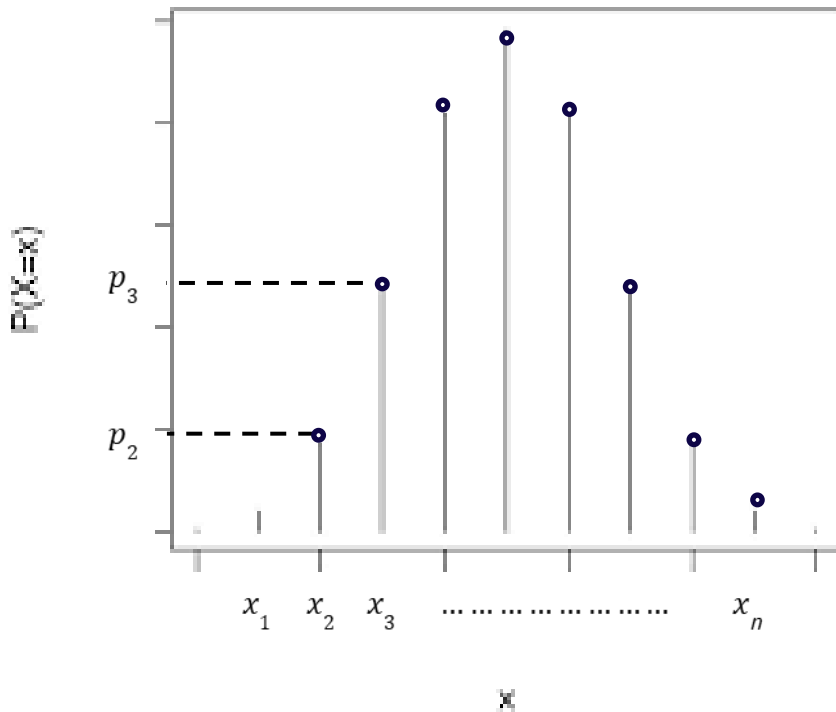
$$\text{a) } P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$$

$$\text{b) } \sum_{x_i} P(x_i) = 1$$

La función así definida se llama **función de probabilidad** de la v. a. X . El conjunto de pares ordenados $(x_i, P(x_i))$ se llama **distribución de probabilidades** de la v. a. X .

Variable aleatoria discreta

Distribución de probabilidades de la v.a discreta X



X	$p_i = p(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(s\acute{ı}, s\acute{ı}, s\acute{ı}); (s\acute{ı}, no, no); (no, s\acute{ı}, no); (no, no, s\acute{ı}); (s\acute{ı}, s\acute{ı}, no); (s\acute{ı}, no, s\acute{ı}); (no, s\acute{ı}, s\acute{ı}), (no, no, no)\}$

$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
0	
1	
2	
3	

X : número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(\text{sí}, \text{sí}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{no}, \text{no}); (\text{no}, \text{sí}, \text{no}); (\text{no}, \text{no}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{sí}, \text{no}); (\text{sí}, \text{no}, \text{sí}); (\text{no}, \text{sí}, \text{sí}), (\text{no}, \text{no}, \text{no})\}$

$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	
2	
3	

X : número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(\text{sí}, \text{sí}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{no}, \text{no}); (\text{no}, \text{sí}, \text{no}); (\text{no}, \text{no}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{sí}, \text{no}); (\text{sí}, \text{no}, \text{sí}); (\text{no}, \text{sí}, \text{sí}), (\text{no}, \text{no}, \text{no})\}$

$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	
3	

X : número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(\text{sí}, \text{sí}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{no}, \text{no}); (\text{no}, \text{sí}, \text{no}); (\text{no}, \text{no}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{sí}, \text{no}); (\text{sí}, \text{no}, \text{sí}); (\text{no}, \text{sí}, \text{sí}), (\text{no}, \text{no}, \text{no})\}$

$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	

X : número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(\text{sí}, \text{sí}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{no}, \text{no}); (\text{no}, \text{sí}, \text{no}); (\text{no}, \text{no}, \text{sí}); (\text{sí}, \text{sí}, \text{no}); (\text{sí}, \text{no}, \text{sí}); (\text{no}, \text{sí}, \text{sí}), (\text{no}, \text{no}, \text{no})\}$

$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

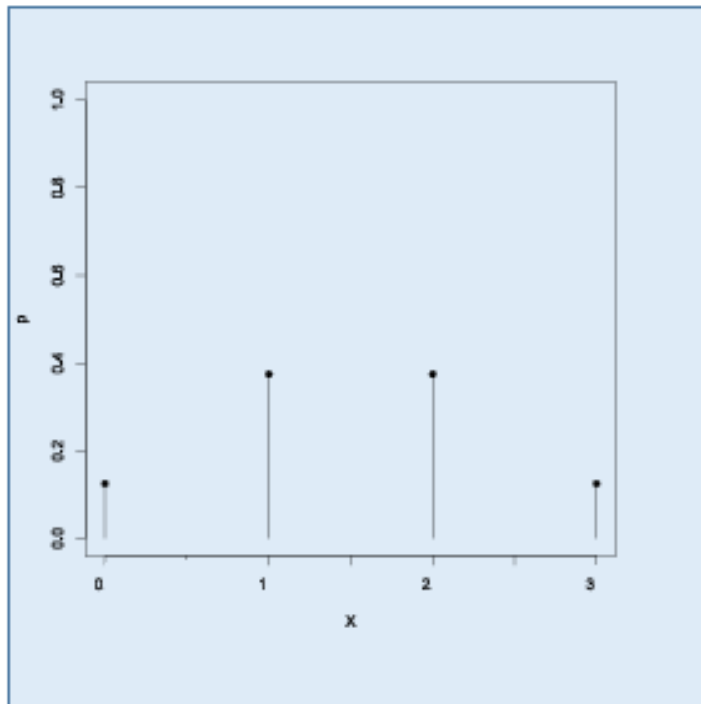
x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

X : número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Supongamos que la probabilidad de que una determinada planta tenga hongos es de 0.5. Hallar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X definida como el número de plantas con hongos al seleccionar 3 plantas y analizar si tiene o no hongos. Considerar que la selección de las plantas son independientes unas de otras.

$S = \{(s\acute{ı}, s\acute{ı}, s\acute{ı}); (s\acute{ı}, no, no); (no, s\acute{ı}, no); (no, no, s\acute{ı}); (s\acute{ı}, s\acute{ı}, no); (s\acute{ı}, no, s\acute{ı}); (no, s\acute{ı}, s\acute{ı}), (no, no, no)\}$



$$X : S \rightarrow R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Representación gráfica de la distribución de probabilidades

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una claculadora no defectuosa.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\} \quad X : S \rightarrow R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\} \quad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$


Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\} \quad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$


Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

$$S = \{\overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D}\} \quad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$


Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

D: la calculadora extraída es defectuosa

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\} \quad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$


Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
1	
2	
3	
4	

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	
3	
4	

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una claculadora no defectuosa.

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{3}{8} \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
3	
4	

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{3}{8} \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
3	$\frac{3}{8} \frac{2}{7} \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
4	

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una claculadora no defectuosa.

$$S = \{\bar{D}, D\bar{D}, DD\bar{D}, DDD\bar{D}\}$$

$$R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{3}{8} \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
3	$\frac{3}{8} \frac{2}{7} \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
4	$\frac{3}{8} \frac{2}{7} \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

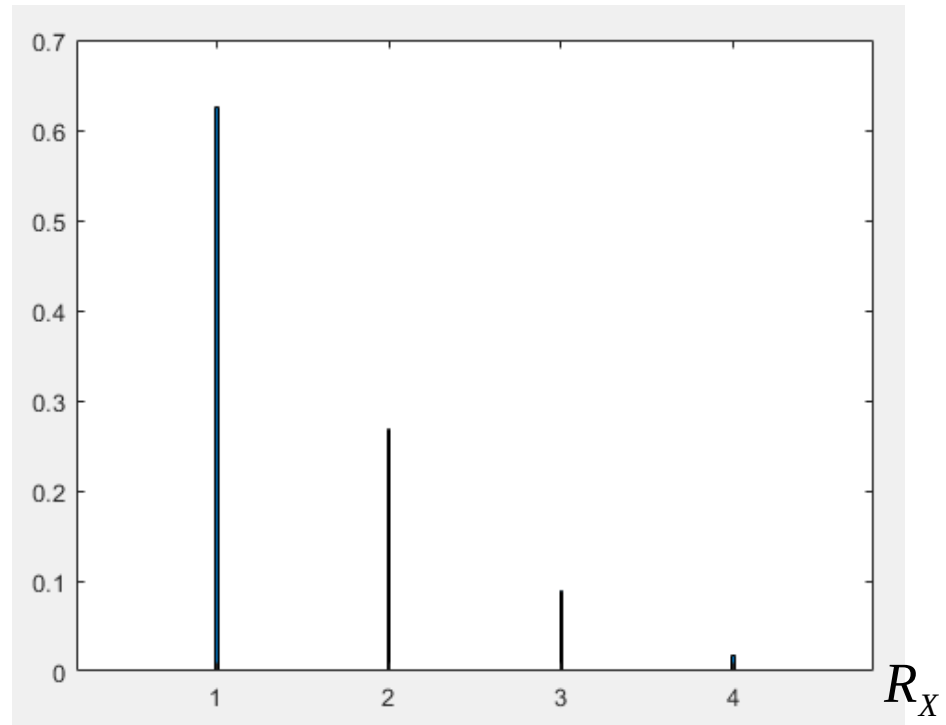
Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. definida como:

X : número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{3}{8} \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
3	$\frac{3}{8} \frac{2}{7} \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
4	$\frac{3}{8} \frac{2}{7} \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$$P(X = x_i)$$



Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

$S =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X : suma de los valores observados.

$R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$ La v.a. $X : S \rightarrow R_X$ queda definida de la siguiente manera:

$$X(s) = x_1 + x_2$$

Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. X

EJERCICIO

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

$S =$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) X : suma de los valores observados.

x_i	$P(X = x_i)$
2	
3	
.	
.	
.	
12	
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$ La v.a. $X : S \rightarrow R_X$ queda definida de la siguiente manera:

$$X(s) = x_1 + x_2$$

Hallar la distribución de probabilidades de la v.a. X

EJERCICIO

Variable aleatoria discreta

Función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta **FDA**

Sea X una variable aleatoria discreta (v.a.d), la función de distribución acumulada se define como: $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j) \quad \forall x \in R_X \text{ (la suma se toma sobre todos los índices } j \text{ tal que } x_j \leq x)$$

Propiedades de la FDA

- 1- F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 2- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Ejemplo: Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2) donde x_i es el resultado observado en el i -ésimo dado $i = 1, 2$.

$$S = \{(x_1, x_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sea X la variable “aleatoria suma de los valores observados”.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \Rightarrow R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La distribución de probabilidades queda definida por:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejemplo: Si queremos calcular $F(x)$ para $x = 6$,

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sea X la variable “aleatoria suma de los valores observados”.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \Rightarrow R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La distribución de probabilidades queda definida por:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejemplo: Si queremos calcular $F(x)$ para $x = 6$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j)$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sea X la variable “aleatoria suma de los valores observados”.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \Rightarrow R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La distribución de probabilidades queda definida por:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejemplo: Si queremos calcular $F(x)$ para $x = 6$,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j)$$

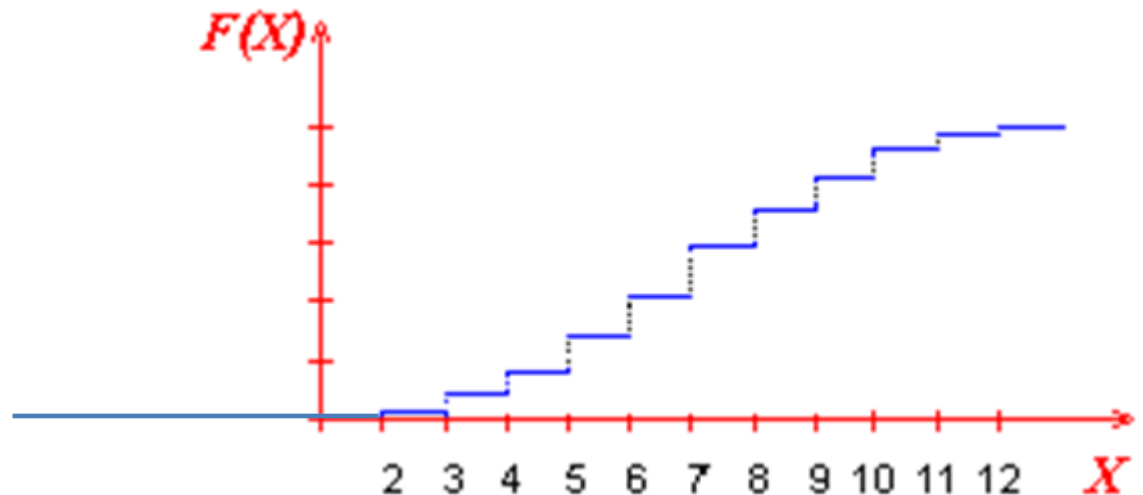
Para determinar $F(x)$ para $x=6$ sumamos las probabilidades hasta $x = 6$ inclusive

$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{15}{36}$$

Variable aleatoria discreta

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1/36 & 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & 4 \leq x < 5 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$



Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Características numéricas de las variables aleatorias:

Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

Momentos: El momento k -ésimo para una variable aleatoria discreta respecto al origen se define como:

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Características numéricas de las variables aleatorias:

Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

Momentos: El momento k -ésimo para una variable aleatoria discreta respecto al origen se define como:

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidades $(x_i, P(x_i))$ para $i = 1, 2, \dots$. Se llama valor esperado de X o esperanza matemática de X a:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

$E(X)$ existe si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ converge en valor absoluto, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p(x_i)| < \infty$.

A este número también se lo llama valor promedio de X .

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sea X la variable “aleatoria suma de los valores observados”.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \Rightarrow R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La distribución de probabilidades queda definida por:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(x) = \sum_{i=2}^{12} x_i p(x_i) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

Interpretación: se espera que la suma de los puntos obtenidos al arrojar dos dados sea 7 o que la esperanza de la suma sea 7.

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Propiedades del valor esperado de una v.a.d:

- 1) Si $X = cte$ entonces $E(X) = c$
- 2) $E(cX) = cE(X)$ para toda constante c .
- 3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, (X e Y v.a.)
- 4) $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
- 5) $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X e Y son v.a. independientes.
- 6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX + b) = aE(X) + b$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

a) Si X es una v.a.d

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dem/

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(\underbrace{E(X)}_{cte}) + E(\underbrace{(E(X))^2}_{cte}) = E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dem/

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(\underbrace{E(X)}_{cte}) + E(\underbrace{(E(X))^2}_{cte}) = E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Propiedades de la Varianza:

- 1) Si $X = cte$ entonces $V(X) = 0$
- 2) $V(X + c) = V(X)$ para toda constante c .
- 3) $V(cX) = c^2V(X)$ para toda constante c .
- 4) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, $(X \text{ e } Y \text{ v.a. independientes})$
- 5) $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$, $(X \text{ e } Y \text{ v.a. independientes})$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar dos dados y sea X la variable “aleatoria suma de los valores observados”.

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \Rightarrow R_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$

La distribución de probabilidades queda definida por:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(x) = \sum_{i=2}^{12} x_i p(x_i) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

$$E(x^2) = \sum_{i=2}^{12} x_i^2 p(x_i) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + \dots + 12^2 \times \frac{1}{36} = 54.8333$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 54.8333 - 7^2 = 54.8333 - 49 = 5.83$$

Variable Aleatoria Continua

Definición de Variable Aleatoria Continua

Variables aleatorias continuas

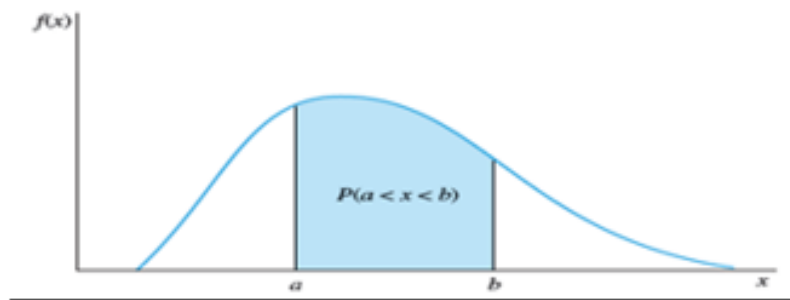
Definición: Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones.

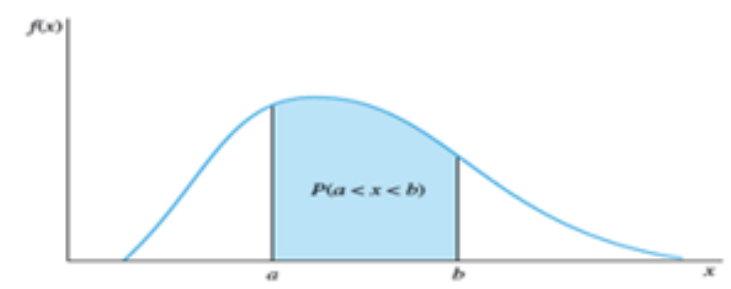
a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

c) $\forall a, b$ tal que $-\infty < a < b < \infty \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Interpretación gráfica:



Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Se dice que X es una variable aleatoria discreta (v.a.d) si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que: a) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$ b) $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$	Definición: Se dice que una <u>v.a.</u> X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (<u>fdp</u>) de X que satisface las siguientes condiciones. a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ c) $\forall a, b$ tal que $-\infty < a < b < \infty$ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ 

Definición de Variable Aleatoria Continua

Algunas consideraciones

$$\text{a) } P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

La probabilidad cero no significa que el suceso sea imposible, es decir si A es el conjunto vacío entonces $P(A)=0$, pero el recíproco no es cierto.

Por lo tanto

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

b) Si $f^*(x) \geq 0 \quad \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) dx = k \in \mathbb{R}^+$ entonces no es una legitima fdp. Pero podemos convertirla de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{k} \quad \forall x$$

c) Si X toma valores en el intervalo $[a, b]$ podemos definir $f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b]$.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima f.d.p

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima *f.d.p*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^0 0 dx} + \int_0^1 kx(1-x) dx + \cancel{\int_1^{\infty} 0 dx} \Rightarrow k \int_0^1 x - x^2 dx = 1$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima *f.d.p*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 kx(1-x) dx + \int_1^{\infty} 0 dx \Rightarrow k \int_0^1 x - x^2 dx = 1$$

$$1 = k \left[\int_0^1 x - x^2 dx \right] = k \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = k \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = k \left[\frac{1}{6} \right] \Rightarrow k = 6$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: con la f.d.p anterior hallar:

$$\text{a)} \quad P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = 6 \left[\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x - x^2 \, dx \right] = 6 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = ?$$

$$\text{b)} \quad P\left(\underbrace{x \geq \frac{1}{3}}_A / \underbrace{\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}}_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)} = ?$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Función de distribución acumulada (FDA)

Sea X una variable aleatoria discreta o continua. La función de distribución acumulada F se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x$$

1) Si X es una v.a.d entonces $F(x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j)$. La suma se toma sobre todos los índices j que satisfacen $x_j \leq x$.

2) Si X es una v.a.c entonces $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$ siendo $f(s)$ la f.d.p.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Propiedades de la FDA

- 1- F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 2- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- 3- Si f es la fdp de X entonces $f(x) = F'(x) \quad \forall x$ donde F es diferenciable. Es decir, la FDA, F , es una primitiva de f la f.d.p.
- 4- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ Regla de Barrow.

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Características numéricas de las variables aleatorias continuas:

Definición: Sea X una v. a. continua con f.d.p, f , definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se llama valor esperado de la v. a. continua X o esperanza matemática de X a:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$E(X)$ existe si existe $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx < \infty$.

Características numéricas de una <u>v.a</u>	
Valor esperado o Esperanza matemática	
Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Sea X una variable aleatoria discreta (<u>v.a.d</u>), se define la Esperanza matemática como: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$	Sea X una variable aleatoria continua (<u>v.a.c</u>), se define la Esperanza matemática como: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
Propiedades del valor esperado o Esperanza Matemática	
1) Si $X = cte$ entonces $E(X) = c$ 2) $E(cX) = cE(X)$ para toda constante c. 3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (X e Y <u>v.a.</u>) 4) $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$ 5) $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X e Y son <u>v.a.</u> independientes. 6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX+b) = aE(X)+b$	



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Hallar la esperanza matemática de la v. a. continua con f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^1 x \cdot 2x dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Varianza de una variable aleatoria continua:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

a. Si X es una v.a.c

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Varianza o Varianza Matemática

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

Variable aleatoria Discreta

Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d.), se define la Varianza matemática como:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Variable aleatoria continua

Sea X una **variable aleatoria continua** (v.a.c.), se define la Varianza matemática como:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Propiedades de la Varianza Matemática

- 1) Si $X = cte$ entonces $V(X) = 0$
- 2) $V(X + c) = V(X)$ para toda constante c .
- 3) $V(cX) = c^2 V(X)$ para toda constante c .
- 4) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)
- 5) $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Definición: La dispersión de una v.a. X se define como

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

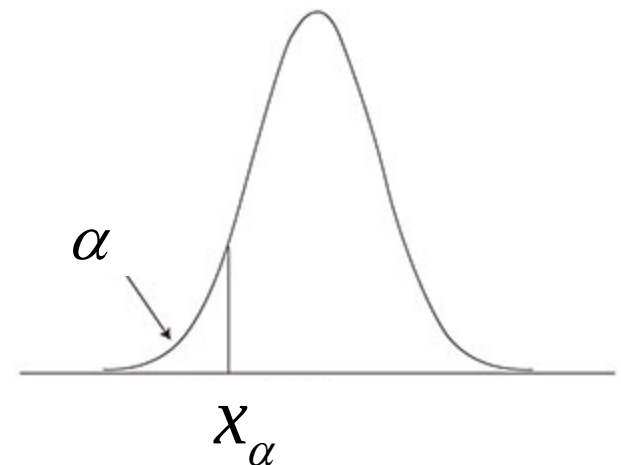
Cuantiles de una v. a. continua:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x) dx = \alpha$$



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Cuantiles de una v. a. continua:

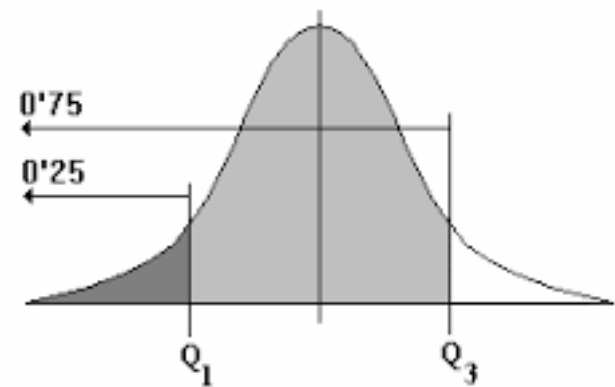
En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x) dx = \alpha$$

$$P(X < Q_1) = \int_{-\infty}^{Q_1} f(x) dx = 0.25$$



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Cuantiles de una v. a. continua:

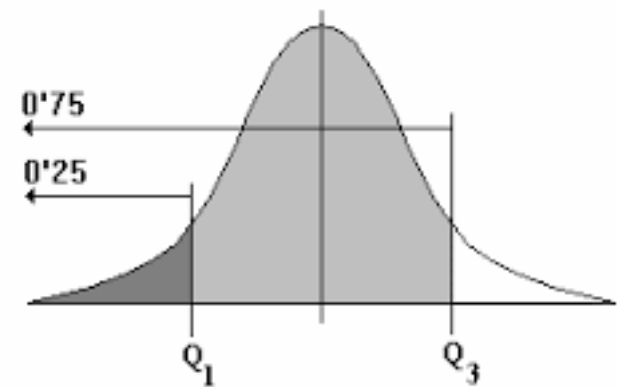
En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x) dx = \alpha$$

$$P(X < Q_3) = \int_{-\infty}^{Q_3} f(x) dx = 0.75$$

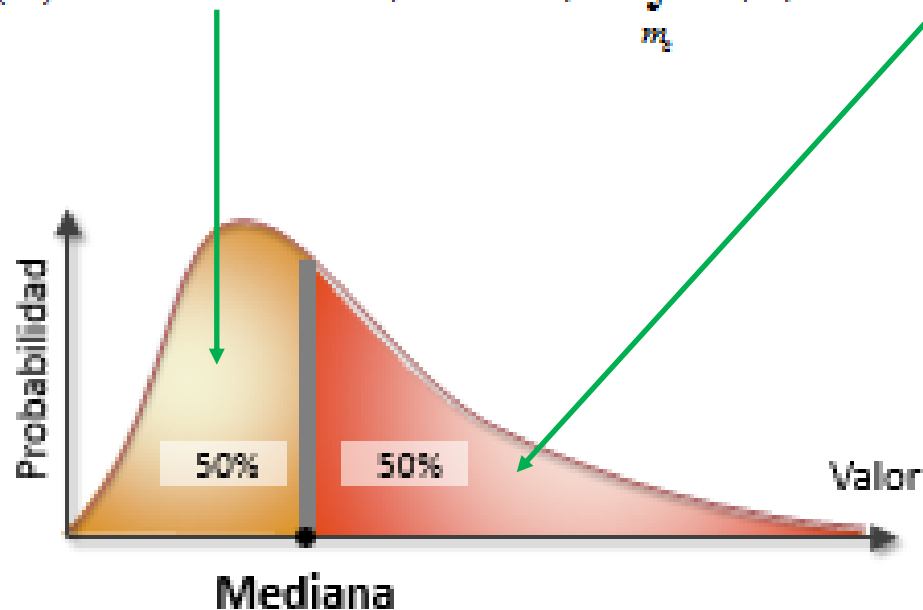


Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Mediana de una v.a. continua:

La media de una v.a. continua es el valor m_e tal que

$$P(X < m_e) = \int_{-\infty}^{m_e} f(x) dx = 0,5 \quad \text{o} \quad P(X > m_e) = \int_{m_e}^{\infty} f(x) dx = 0,5$$



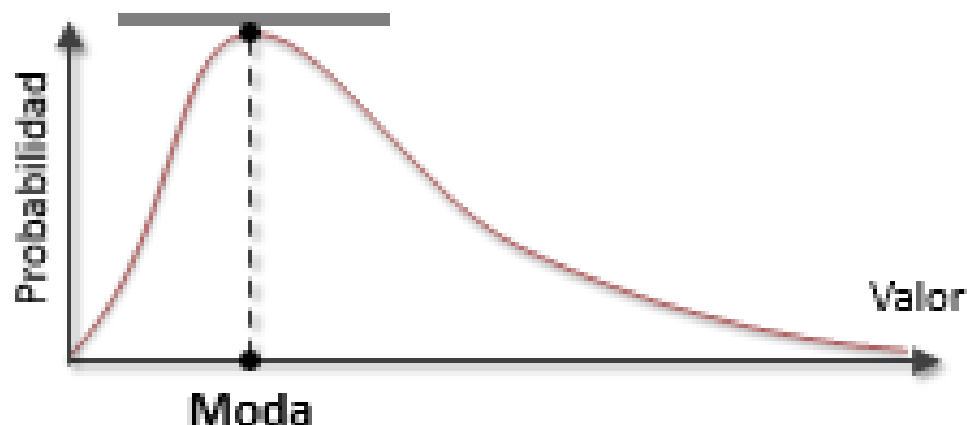
Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Moda de una v.a continua: es el valor de X para el cual $f(x)$ toma su valor máximo (si la fdp tiene un solo máximo)

Si f y f' son derivables en a , a es un máximo relativo o local si cumple

1) $f'(a) = 0$

2) $f''(a) < 0$



Algunas V.A.D. Teóricas

Algunas distribuciones teóricas

Discretas

Bernoulli: Asociado a un experimento dicotómico.

Binomial: como una suma de variables aleatorias con distribución Bernoulli independientes.

Hipergeométrica: A diferencia de la Binomial la probabilidad de éxito no se mantiene cte.

Poisson: número de éxitos por unidad de medida.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución de Bernoulli.

Experimento Bernoulli: es dicotómico, sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Su espacio muestral asociado puede definirse como: $S = \{\text{éxito}, \text{fracaso}\}$. Podemos definir una v.a. $X: S \rightarrow \{0,1\}$ tal que $X(\text{éxito}) = 1$ y $X(\text{fracaso}) = 0$.

Si la probabilidad de éxito es p ($0 < p < 1$) y la probabilidad de fracaso es $(1 - p)$ podemos construir la siguiente “distribución de probabilidades”:

Distribución de Bernoulli



x_i	$p(x_i)$
0	$(1 - p)$
1	p
$(1 - p) + p = 1$	

La anterior distribución de probabilidades se denomina distribución de Bernoulli.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución de Bernoulli.

Experimento Bernoulli: es dicotómico, sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Su espacio muestral asociado puede definirse como: $S = \{\text{éxito}, \text{fracaso}\}$. Podemos definir una v.a. $X: S \rightarrow \{0,1\}$ tal que $X(\text{éxito})=1$ y $X(\text{fracaso})=0$.

Si la probabilidad de éxito es p ($0 < p < 1$) y la probabilidad de fracaso es $(1-p)$ podemos construir la siguiente “distribución de probabilidades”:

Características Numéricas de la distribución de Bernoulli:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p \times (1-p)$$

Distribución de Bernoulli



x_i	$p(x_i)$
0	$(1-p)$
1	p
	$(1-p) + p = 1$

La anterior distribución de probabilidades se denomina distribución de Bernoulli.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución Binomial

Una variable aleatoria Binomial puede considerarse como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes, esto es, “una v. a. Binomial aparece cuando estamos interesados en el número de veces que un suceso A ocurre (éxito) en n pruebas independientes de un experimento de tipo Bernoulli” $\mathcal{E}$.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Formalmente:

Definición: X es una variable aleatoria con distribución Binomial, $X \sim B(n, p)$ si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

donde $0 < p < 1$ (p constante) y n es un número entero positivo.

Características:

- Mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Para usar el modelo se requiere que haya:

- N repeticiones independientes.
- el resultado de cada prueba es dicotómica.
- $P(A) = p$, $0 < p < 1$ constante, en las n pruebas independientes.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Esperanza y varianza de matemática de la distribución binomial: consideremos a X como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes cada una con $E(X) = p$ y varianza $V(X) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n \times p \times (1-p)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Se sabe por experiencias anteriores que la probabilidad de que una máquina produzca un artículo defectuoso es 0.01. En una hora una máquina produce 20 artículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca algún artículo defectuoso en una hora de producción donde se producen 20 artículos?

X: número de artículos defectuosos producidos por una máquina durante una hora de producción.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Se sabe por experiencias anteriores que la probabilidad de que una máquina produzca un artículo defectuoso es 0.01. En una hora una máquina produce 20 artículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca algún artículo defectuoso en una hora de producción donde se producen 20 artículos?

X: número de artículos defectuosos producidos por una máquina durante una hora de producción.

$$X \sim B(20, 0.01)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Se sabe por experiencias anteriores que la probabilidad de que una máquina produzca un artículo defectuoso es 0.01. En una hora una máquina produce 20 artículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca algún artículo defectuoso en una hora de producción donde se producen 20 artículos?

X: número de artículos defectuosos producidos por una máquina durante una hora de producción.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 20)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Se sabe por experiencias anteriores que la probabilidad de que una máquina produzca un artículo defectuoso es 0.01. En una hora una máquina produce 20 artículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca algún artículo defectuoso en una hora de producción donde se producen 20 artículos?

X: número de artículos defectuosos producidos por una máquina durante una hora de producción.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Se sabe por experiencias anteriores que la probabilidad de que una máquina produzca un artículo defectuoso es 0.01. En una hora una máquina produce 20 artículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca algún artículo defectuoso en una hora de producción donde se producen 20 artículos?

X: número de artículos defectuosos producidos por una máquina durante una hora de producción.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - [P(X = 0)] = 1 - \left[\binom{20}{0} 0.01^0 (1 - 0.01)^{20-0} \right] = 0.182$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

X : número de personas inmunes de una muestra de 10 personas.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

X : número de personas inmunes de una muestra de 10 personas.

$$X \sim B(10, 0.3)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

X : número de personas inmunes de una muestra de 10 personas.

$$X \sim B(10, 0.3)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

X : número de personas inmunes de una muestra de 10 personas.

$$X \sim B(10, 0.3)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 4) =$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejercicio: Supongamos que el 30% de una población es inmune a una enfermedad. Si se toma una muestra al azar de 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro de ellas sean inmunes?

X : número de personas inmunes de una muestra de 10 personas.

$$X \sim B(10, 0.3)$$

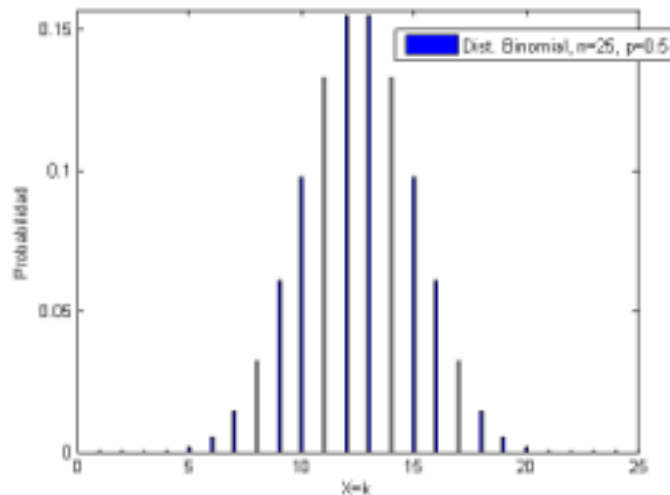
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.3^4 (1-0.3)^{10-4} = 0.20$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

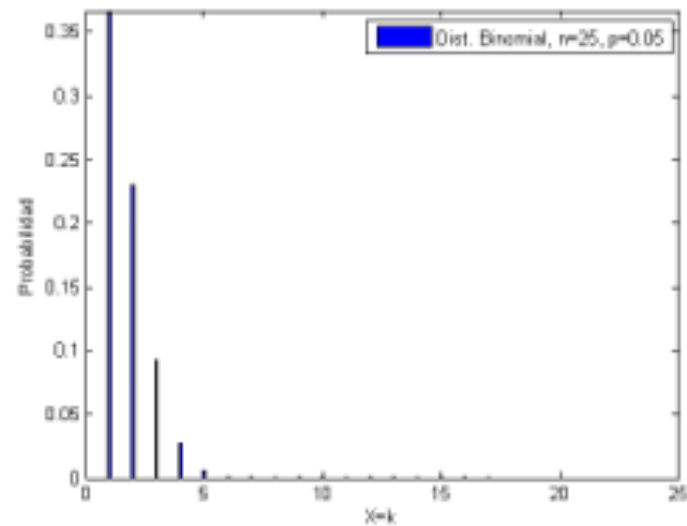
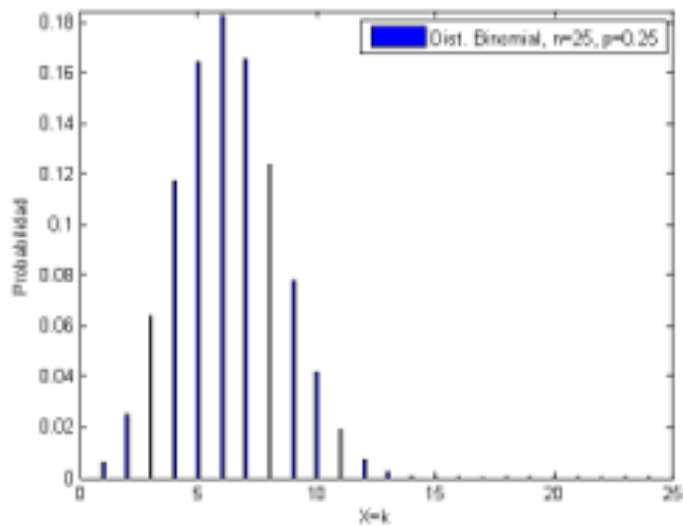
Análisis de la gráfica de la distribución binomial a partir del n y p

Simétrica: Si $p = 0.5$ la distribución binomial será simétrica independientemente del tamaño de la muestra.



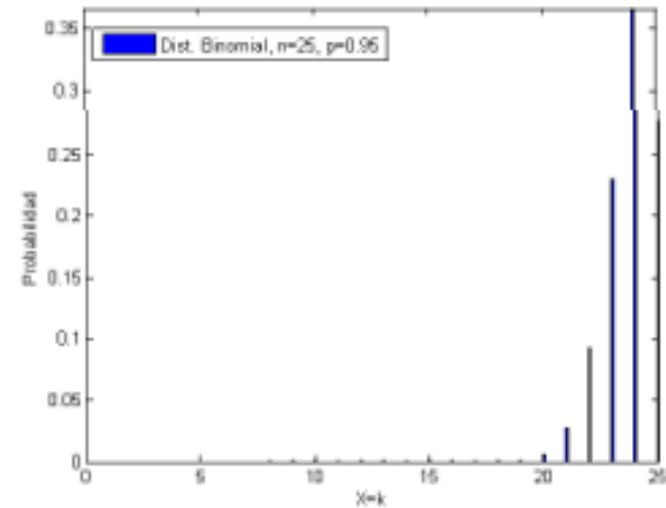
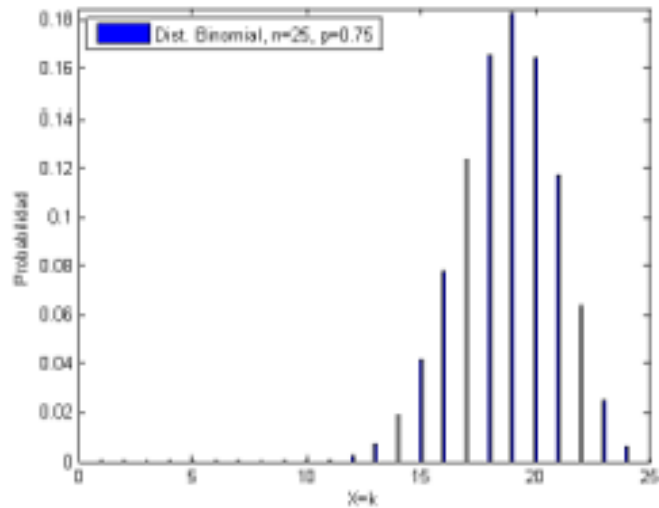
Algunas Variables Aleatorias Discretas

Sesgada a derecha: Si $p \rightarrow 0$ la distribución binomial tendrá sesgo hacia la derecha.



Algunas Variables Aleatorias Discretas

Sesgada a izquierda: Si $p \rightarrow 1$ la distribución binomial tendrá sesgo hacia la izquierda.



Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución Hipergeométrica:

Cuando estudiamos la distribución Binomial la probabilidad p de éxito permanecía constante para cada una de las pruebas independientes.

Consideremos el siguiente caso:

De una caja que contiene N bolas de las cuales a son rojas ($a \leq N$) se escoge al azar una bola sin reemplazo o sustitución y definimos la variable aleatoria:

X : número de bolas rojas extraídas en las n repeticiones, $R_X = \{1, 2, \dots, a\}$

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, a$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Definición: Se dice que X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, con parámetros N, n, a si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, a$$

Donde:

n : Tamaño de la muestra.

N : Tamaño de la población

a : número de éxitos en la población.

$N-a$: número de fracasos en la población.

k : número de éxitos en la muestra.

Observaciones:

Una variable Hipergeométrica es generada según las siguientes condiciones

- 1) N pruebas no independientes.
- 2) El resultado de cada prueba es dicotómico.
- 3) La probabilidad de éxito $P(A)$ no se mantiene constante, es decir, varía con cada prueba.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: La producción diaria de 850 partes contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se toman 4 partes al azar, sin sustitución, de la producción del día, cuál es la probabilidad de que ninguna de las partes cumpla con los requerimientos del cliente?

X: “número de partes que no cumplen con los requerimientos del cliente.”

$$P(X = 0) = \frac{\binom{800}{0} \binom{50}{4}}{\binom{850}{4}} = 0.00001066 \cong 0$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Variable aleatoria de Poisson.

Muchos hechos no ocurren como resultado de n pruebas de un experimento, sino en puntos de tiempo, espacio o volumen, es decir, estamos interesados en el número de ocurrencias (defectos) por unidad de medida.

Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles $k = 0, 1, 2, \dots$. Si su función de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

decimos que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ (frecuencia de ocurrencias medias), y se nota $Po(\lambda)$.

Interpretación: La distribución de Poisson expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media λ , la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierta unidad de medida.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Observaciones:

Una variable de Poisson es generada según las siguientes condiciones:

- 1) El número de ocurrencias es independiente de una unidad a otra, es decir los sucesos ocurren independientemente.
- 2) La frecuencia de ocurrencia media λ , es proporcional al tamaño de la unidad.
- 3) La probabilidad de más de una ocurrencia en una unidad cada vez más pequeña tiende a cero, es decir es despreciable.

Esperanza y varianza de matemática de la distribución

Sea X una v. a. tal que $X \sim P(\lambda)$, $E(X) = V(X) = \lambda$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) =$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} 5^4}{4!} = 0.175467$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} \cdot 5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} \cdot 5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora).

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} \cdot 5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora).

$$X \sim Po(\lambda)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} \cdot 5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora). $X \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{5}{2}$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = 5$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5} \cdot 5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora). $X \sim Po(\lambda)$ $\lambda = \frac{5}{2}$

$$P(X = 4) =$$

EJERCICIO

Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

$$X \sim B(n, p)$$

El número esperado de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia está dada por:

$$E(X) = np$$

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Está caracterizada por un único valor λ . El cual representa el número promedio de eventos por unidad:

$$E(X) = \lambda$$

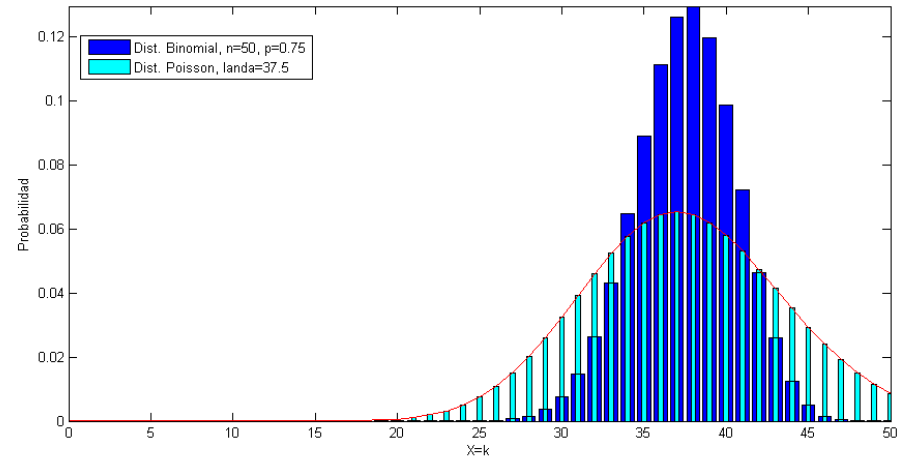
Veamos que sucede si ajustamos ambas variables aleatorias haciendo coincidir sus valores esperados. Es decir:

$$np = \lambda$$

Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

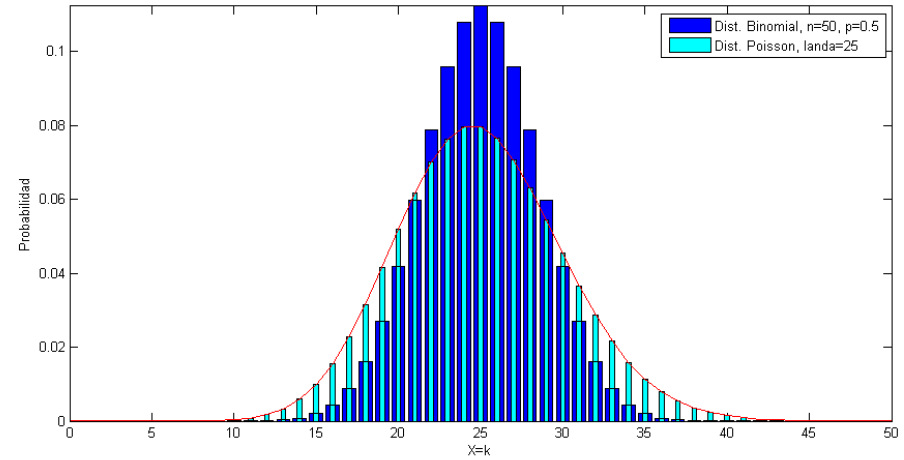
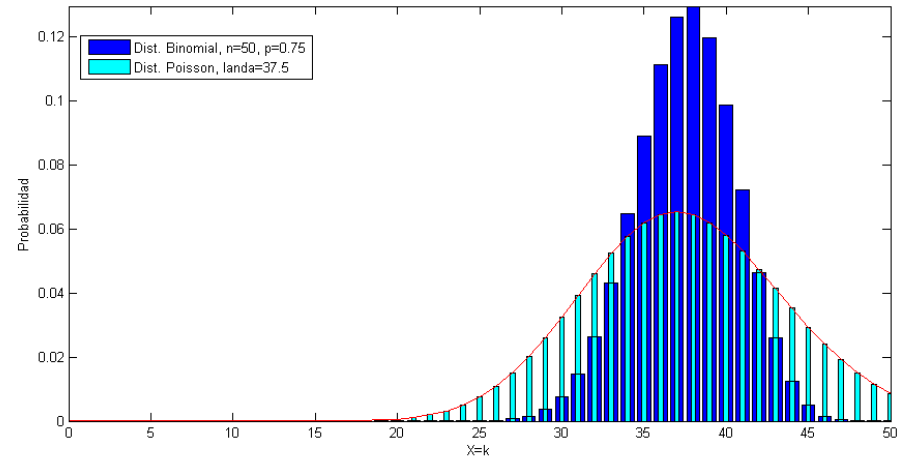
$$np = \lambda$$



Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

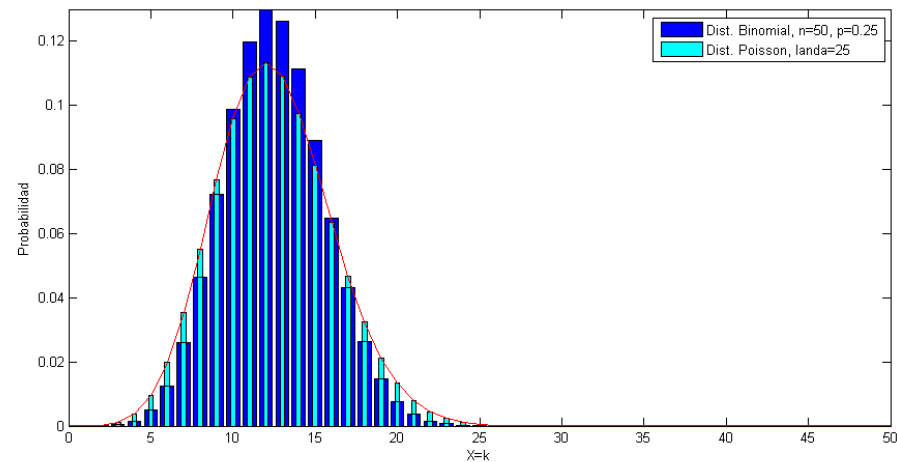
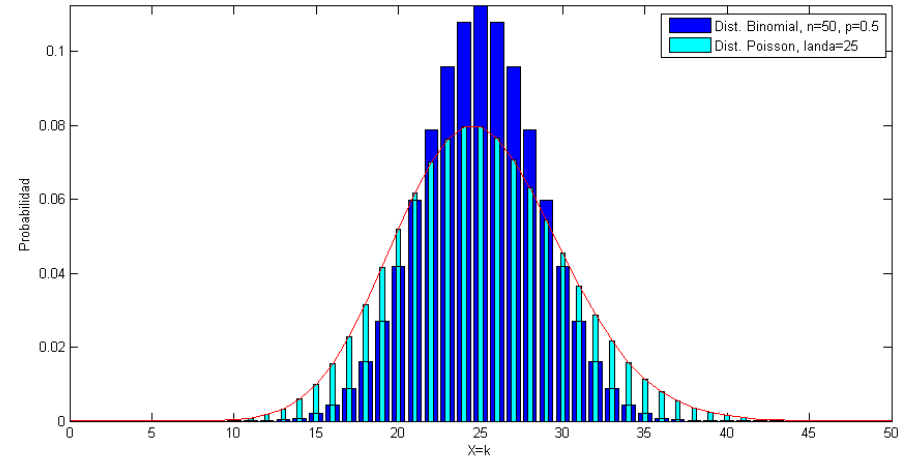
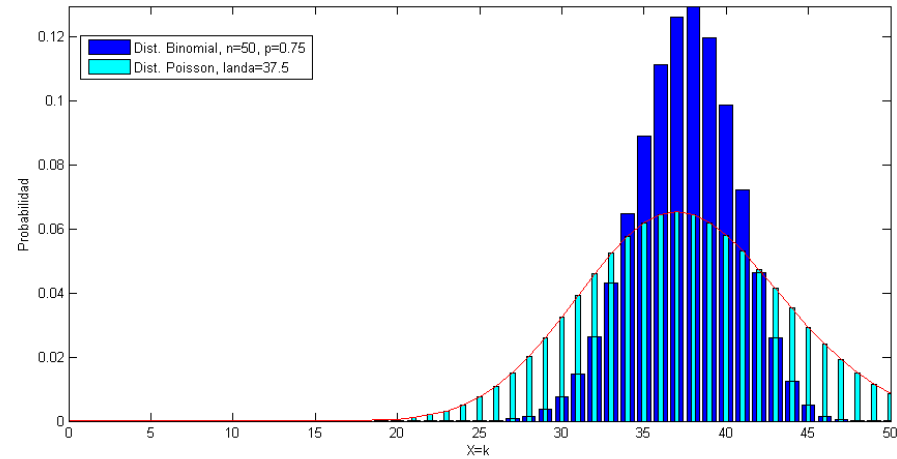
$$np = \lambda$$



Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

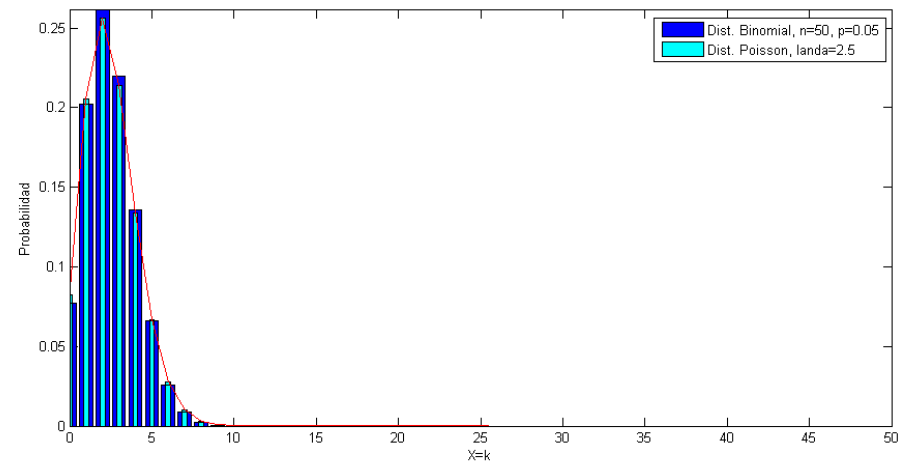
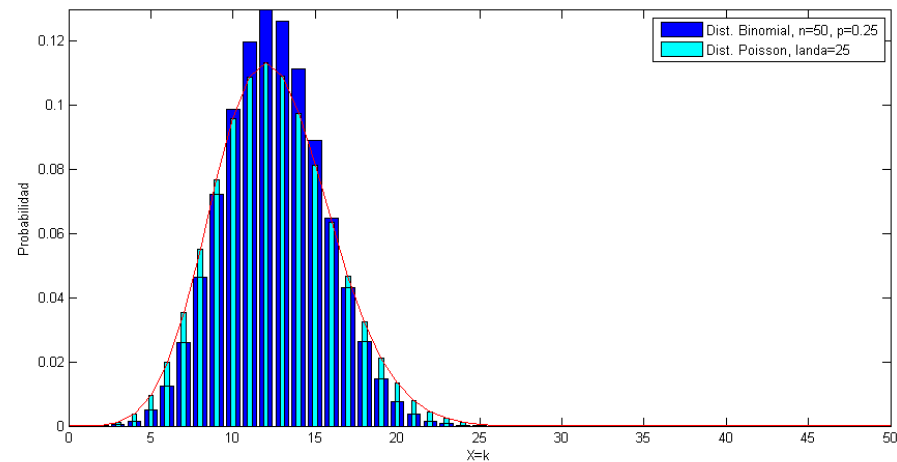
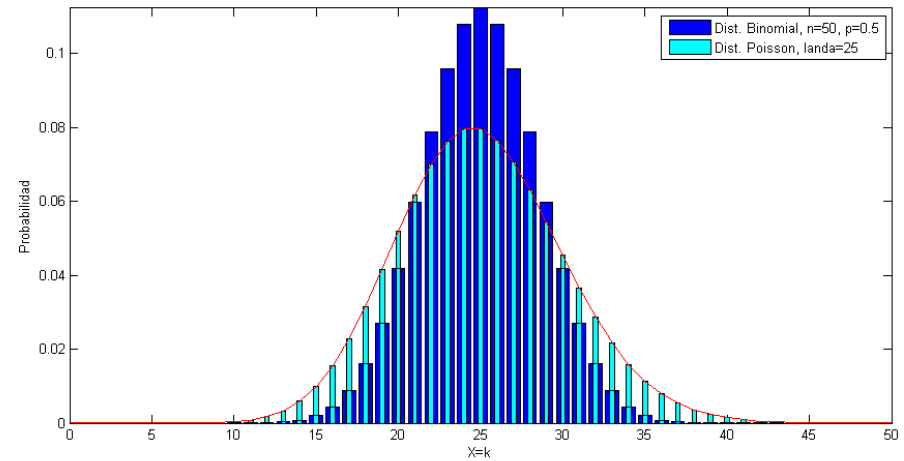
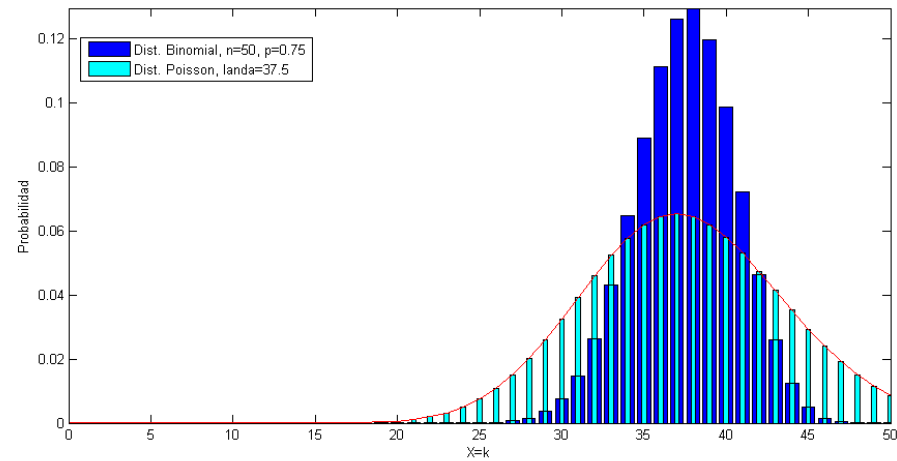
$$np = \lambda$$



Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

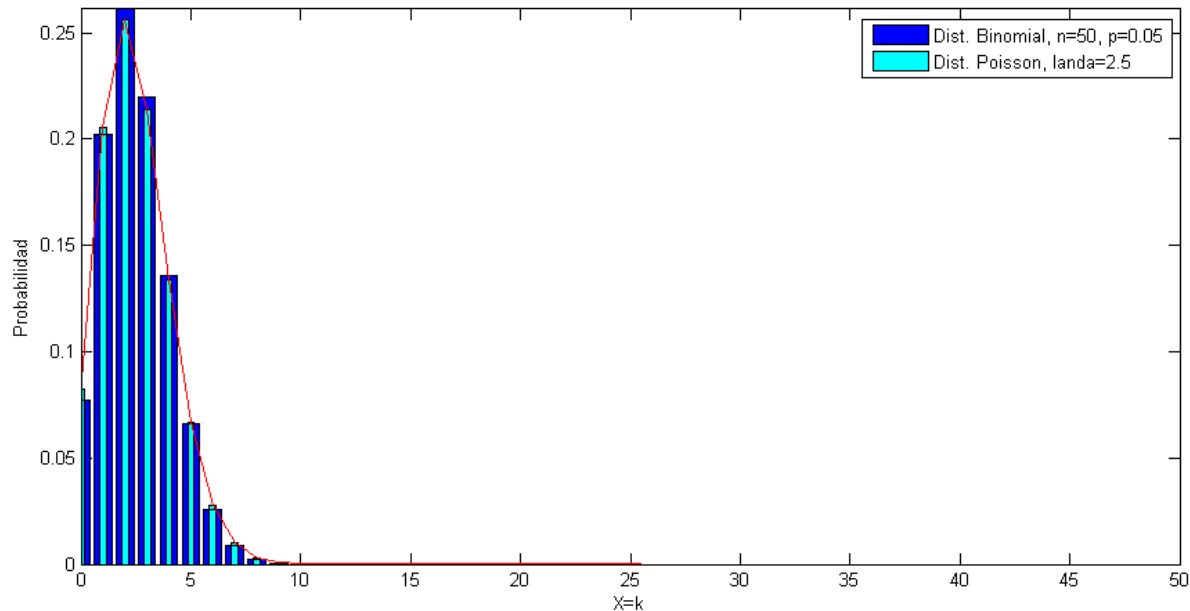
$$np = \lambda$$



Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Conclusión

“Gráficamente” podemos concluir que a medida que n aumentamos y p disminuye, la distribución de Poisson se aproxima a la distribución Binomial.



Algunas Variables Aleatorias Discretas

La distribución de Poisson como aproximación a la Binomial.

Cuando en una distribución binomial el número de intentos (n) es grande y la probabilidad de éxito (p) es pequeña, la distribución binomial converge a la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cancel{(n-k)!}}{k! \cancel{(n-k)!}} p^{(k)} (1-p)^{n-k} \\ &= \dots \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

Es decir, en el límite obtenemos la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$. En la práctica podemos aproximar la distribución Binomial por la distribución de Poisson si se verifica que $n \geq 50$ y $np \leq 5$.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

$1-p = 0.95 = p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

$1-p = 0.95 = p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

$1-p = 0.95 = p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$X \sim B(100, 0.05)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

$1-p = 0.95 = p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05 = p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$

$1-p = 0.95 = p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad P(X = 2) = \binom{100}{2} \times 0.05^2 \times 0.95^{98} = 0.0812$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\lambda = n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\lambda = n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} = 0.0843$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

BINOMIAL

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} \times 0.05^2 \times 0.95^{98} = 0.0812$$

POISSON

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} = 0.0843$$

$$ERROR = |0.0843 - 0.0812| = 0.0031$$

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Sea X = cantidad de piezas defectuosas en un lote $X \sim B\left(40000, \frac{1}{10000}\right)$

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Sea X = cantidad de piezas defectuosas en un lote $X \sim B\left(40000, \frac{1}{10000}\right)$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Sea X = cantidad de piezas defectuosas en un lote $X \sim B\left(40000, \frac{1}{10000}\right)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \binom{40000}{0} \left(\frac{1}{10000}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{40000-0} + \binom{40000}{1} \left(\frac{1}{10000}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{40000-1} + \binom{40000}{2} \left(\frac{1}{10000}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{40000-2} \\ &= 0.238088652447538 \end{aligned}$$

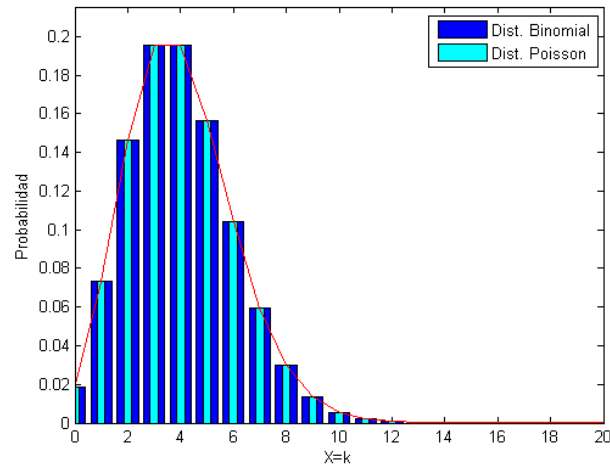
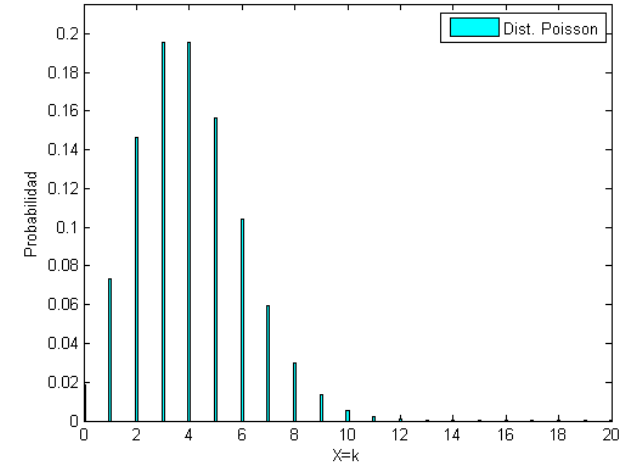
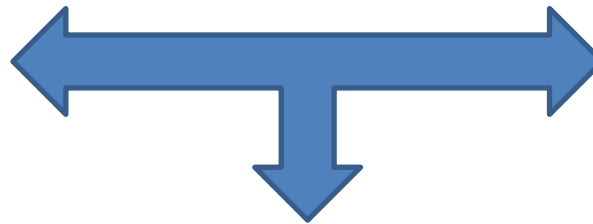
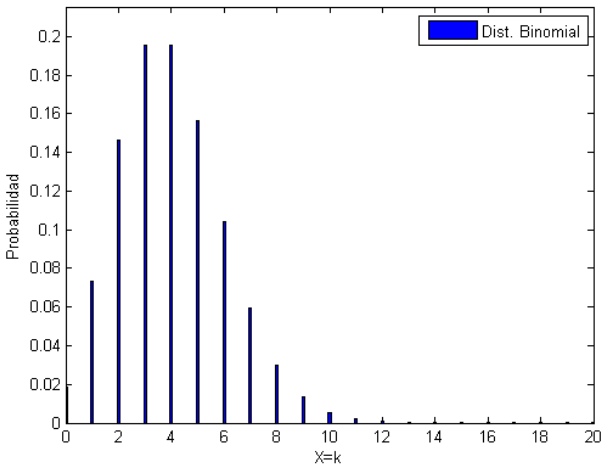
Aproximación por Poisson.

X = cantidad de piezas defectuosas. $n \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$ $np = 4$ $X \sim P(4)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} \\ &= 0.238103305553544 \end{aligned}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Gráficamente



La función solamente está definida en valores enteros de k . La línea continua sólo es una guías para el ojo y no indican continuidad.

Clase Práctica 10 hs.