

Variable Aleatoria Normal

2022.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Variables aleatorias continuas

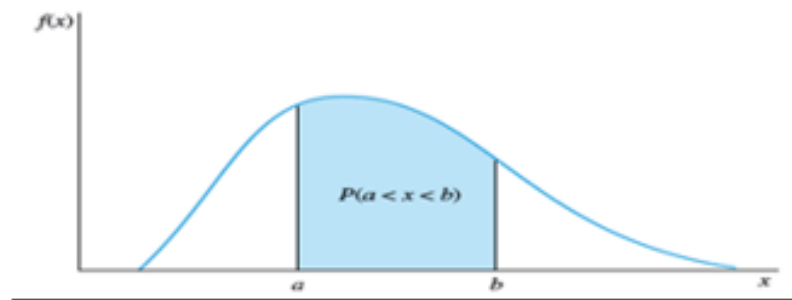
Definición: Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones.

a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

c) $\forall a, b$ tal que $-\infty < a < b < \infty \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Interpretación gráfica:



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Características numéricas de las variables aleatorias continuas:

Definición: Sea X una v. a. continua con f.d.p, f , definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se llama valor esperado de la v. a. continua X o esperanza matemática de X a:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$E(X)$ existe si existe $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx < \infty$.

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Varianza de una variable aleatoria continua:

a. Si X es una v.a.c

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Definición: La dispersión de una v.a. X se define como

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Algunas distribuciones teóricas	
Discretas	Continuas
<u>Bernoulli</u> : Asociado a un experimento dicotómico. <u>Binomial</u> : como una suma de variables aleatorias Bernoulli independientes <u>Hipergeométrica</u> : <u>Poisson</u> : número de éxitos por unidad de medida.	Uniforme : Exponencial : Normal :

Algunas distribuciones teóricas	
Discretas	Continuas
<u>Bernoulli</u> : Asociado a un experimento dicotómico. <u>Binomial</u> : como una suma de variables aleatorias Bernoulli independientes <u>Hipergeométrica</u> : <u>Poisson</u> : número de éxitos por unidad de medida.	Uniforme: Exponencial: Normal:

Definición de Variable Aleatoria Continua

Distribución Normal.

Definición: Se dice que una v. a. X , que toma todos los valores reales $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución normal o está normalmente distribuida con media $-\infty < \mu < \infty$ y varianza σ^2 , notado como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su distribución de probabilidades está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad -\infty < x < \infty$$

Esta función depende únicamente de los parámetros μ y σ , su media y desviación estándar, respectivamente. Una vez que se especifican μ y σ , la curva normal queda determinada por completo.

Definición: Si X tiene una distribución normal $X \sim N(0,1)$, se dice que X tiene una distribución normal estandarizada. La función densidad de probabilidades puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Esta función está tabulada.

Observación: Para esta distribución de probabilidades la FDA que designamos como Φ queda definida por:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad -\infty < x < \infty$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .

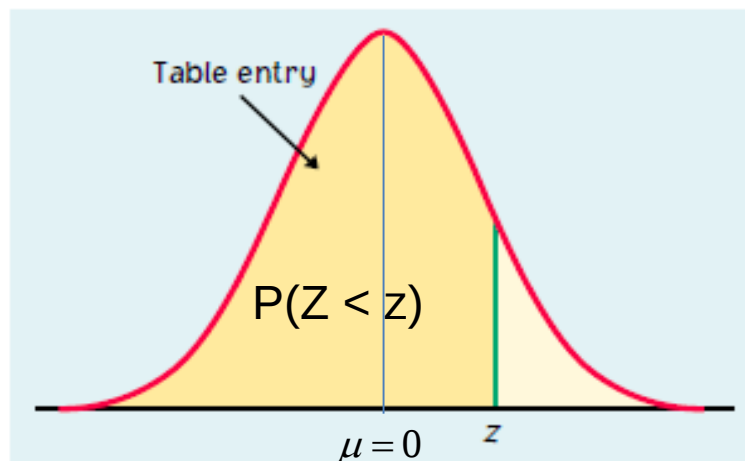


TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

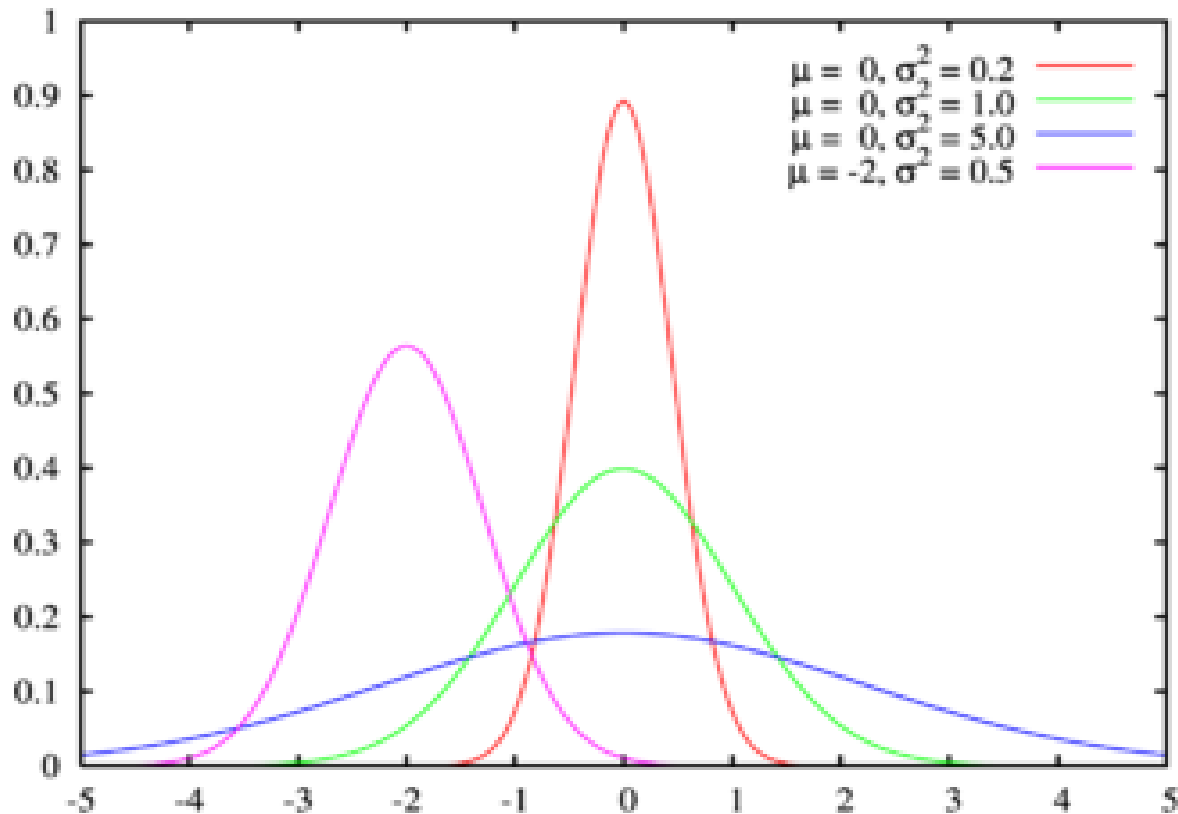
Definición de Variable Aleatoria Continua

Características numéricas de la distribución normal.

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

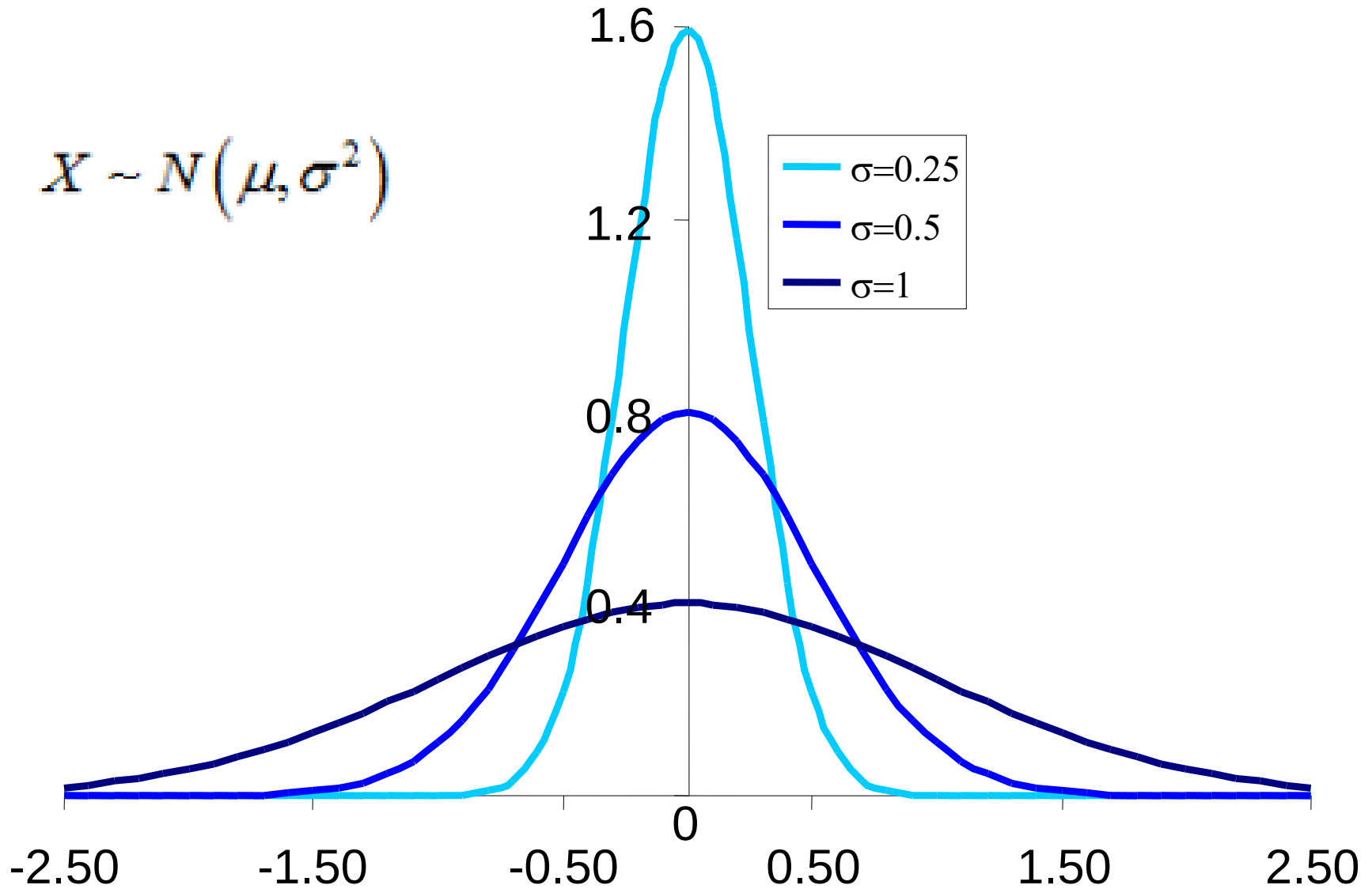
a) $E(X) = \mu$

b) $V(X) = \sigma^2$



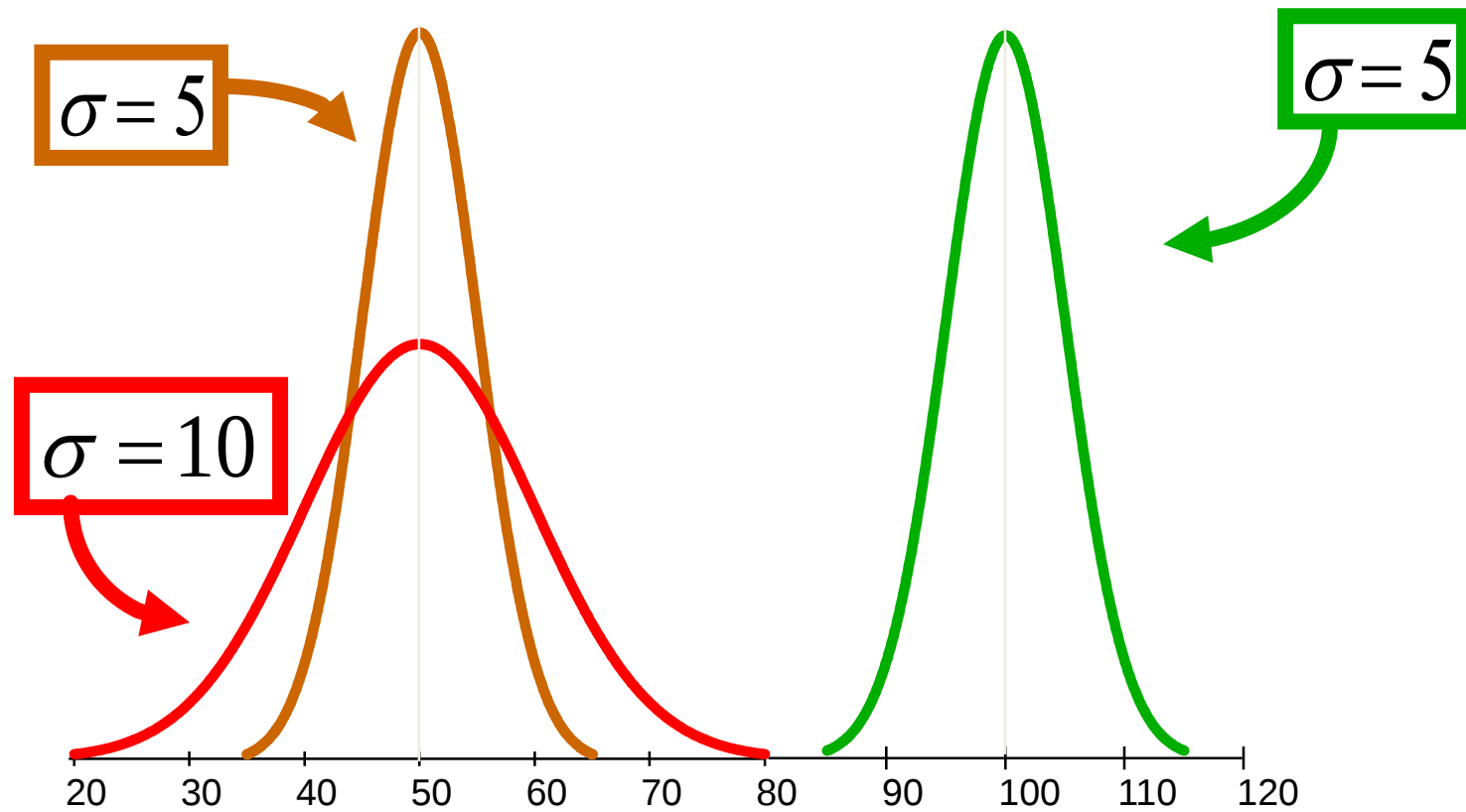
Definición de Variable Aleatoria Continua

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



Distribución normal centrada en el origen y distinta dispersión

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



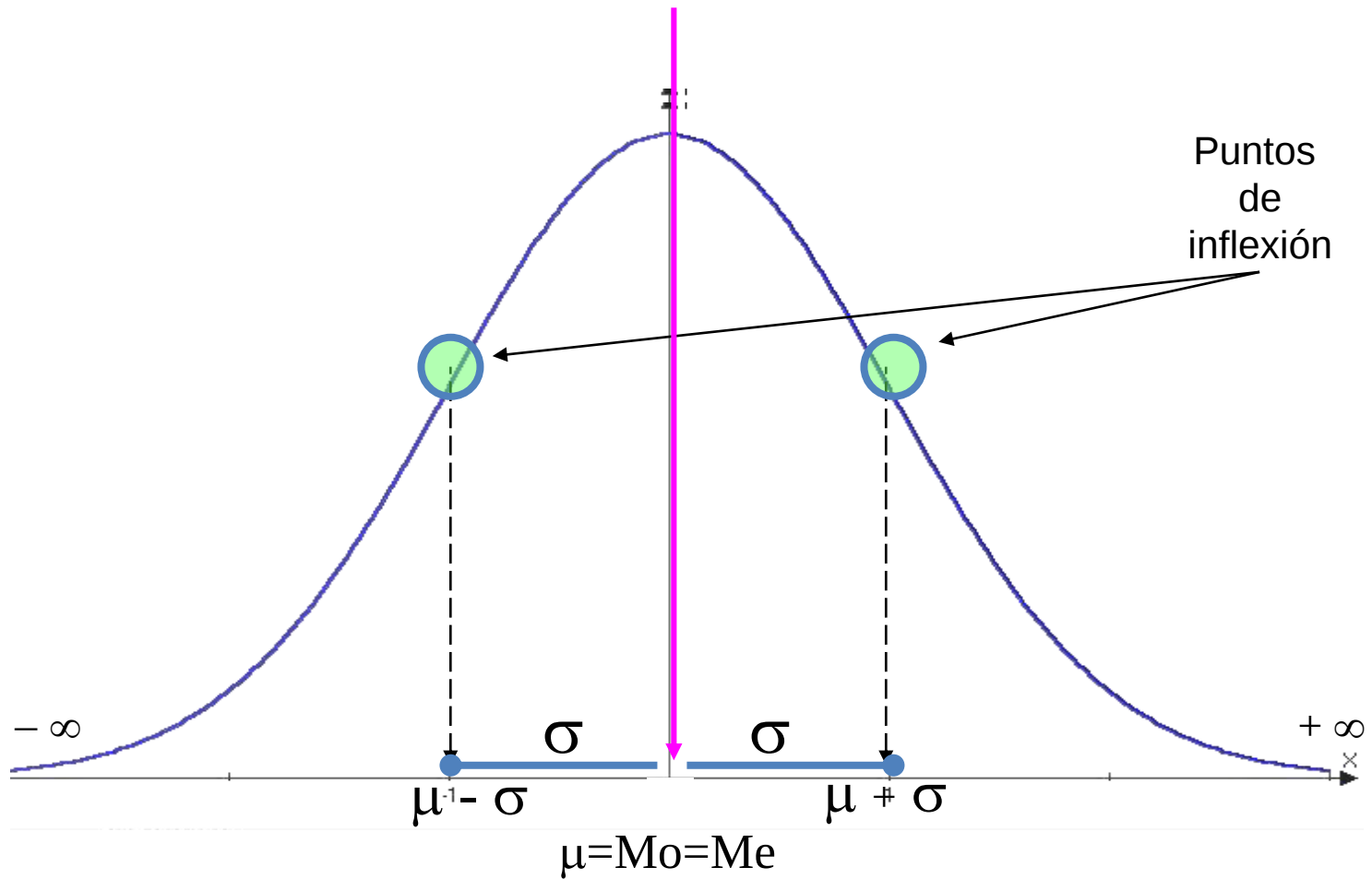
Distribución normal con distintas medias y dispersión

Definición de Variable Aleatoria Continua

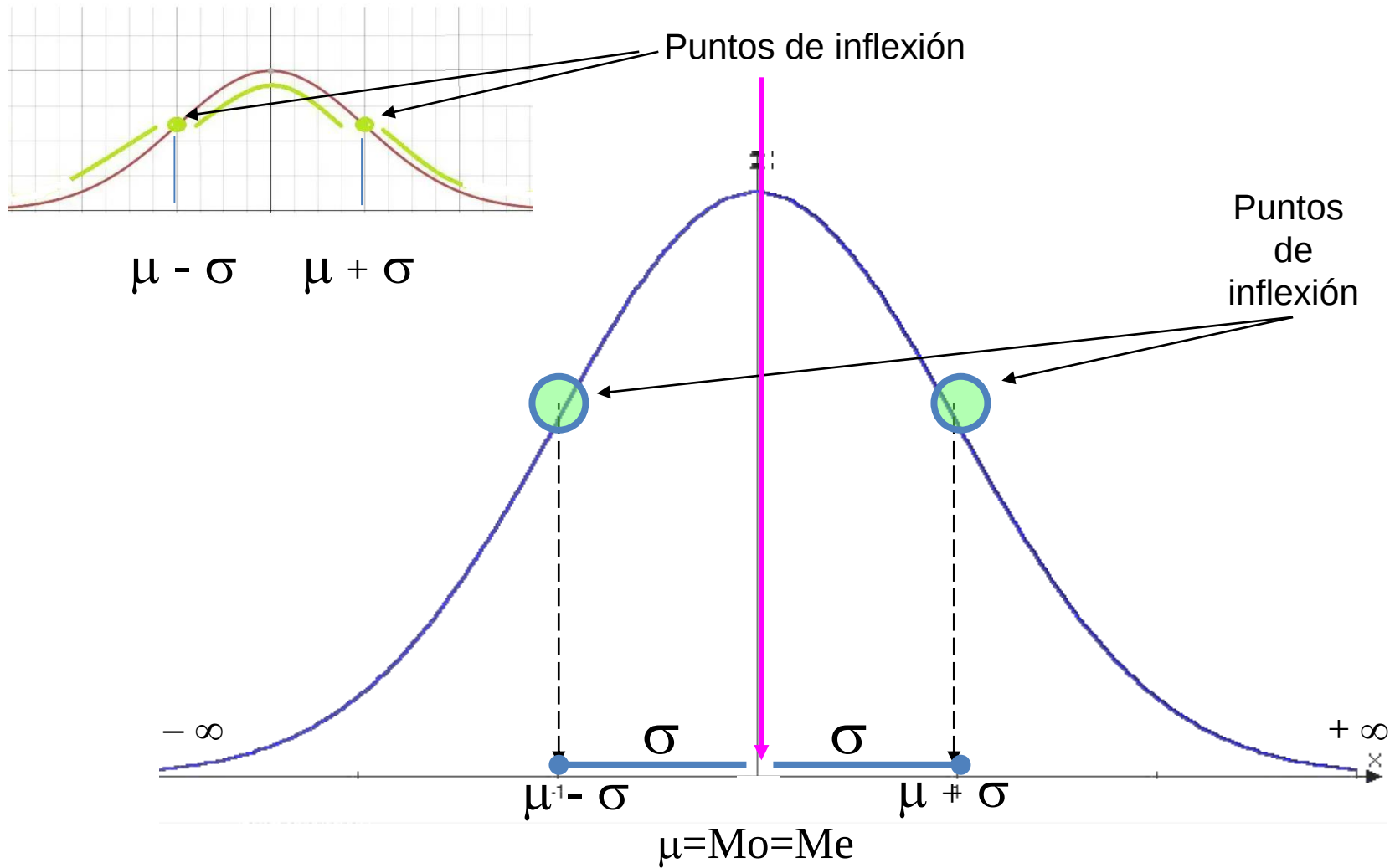
Distribución Normal: Principales características:

- a) La función tiene un máximo en $x = \mu$ igual a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- b) La curva es simétrica alrededor del eje vertical $x = \mu$, donde coinciden la mediana (Me) y la moda (Mo).
- c) Los puntos de inflexión tienen como abscisas los valores en $x = \mu \pm \sigma$, es cóncava hacia abajo si $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$, y es cóncava hacia arriba en cualquier otro punto.
- d) La curva normal se aproxima al eje horizontal de manera asintótica conforme nos alejamos de la media en cualquier dirección, es decir, para x tendiendo a $\pm\infty$, el límite $f(x) = 0$.
- e) El área total bajo la curva y sobre el eje horizontal es igual a 1.
- f) Los parámetros μ y σ son realmente la media y la desviación estándar de la distribución normal.

Definición de Variable Aleatoria Continua



Definición de Variable Aleatoria Continua



Definición de Variable Aleatoria Continua

Estandarización de la distribución Normal:

Dada la dificultad que se encuentra al resolver las integrales de una función densidad de probabilidades asociada a una v.a. normal, es necesario contar con una tabulación de las áreas de la curva normal para una referencia rápida. Sin embargo, sería una tarea difícil intentar establecer tablas separadas para cada valor de μ y σ .

Afortunadamente, podemos transformar todas las observaciones de cualquier v.a. normal X a un nuevo conjunto de observaciones de una variable normal Z con media 0 y desviación estándar 1.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Estandarización de la distribución Normal:

Dada la dificultad que se encuentra al resolver las integrales de una función densidad de probabilidades asociada a una v.a. normal, es necesario contar con una tabulación de las áreas de la curva normal para una referencia rápida. Sin embargo, sería una tarea difícil intentar establecer tablas separadas para cada valor de μ y σ .

Afortunadamente, podemos transformar todas las observaciones de cualquier v.a. normal X a un nuevo conjunto de observaciones de una variable normal Z con media 0 y desviación estándar 1.

Corolario: Si X tiene una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la v.a.

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ tiene una distribución $N(0,1)$.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .

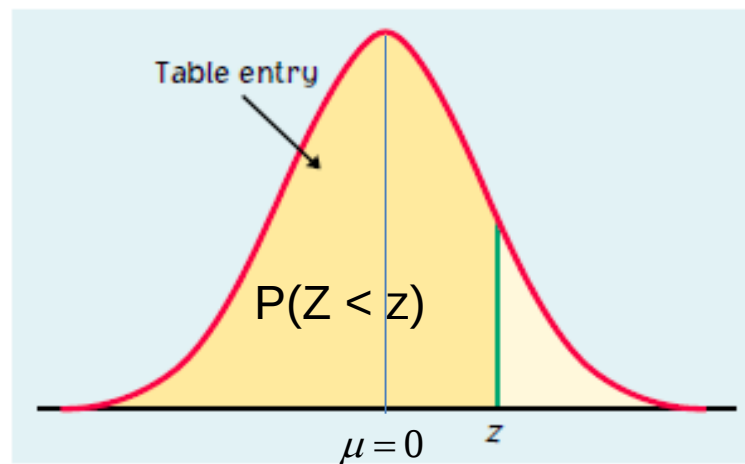
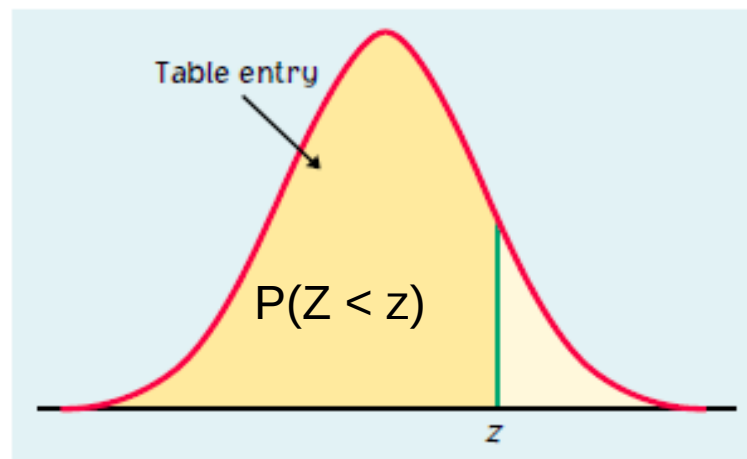


TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



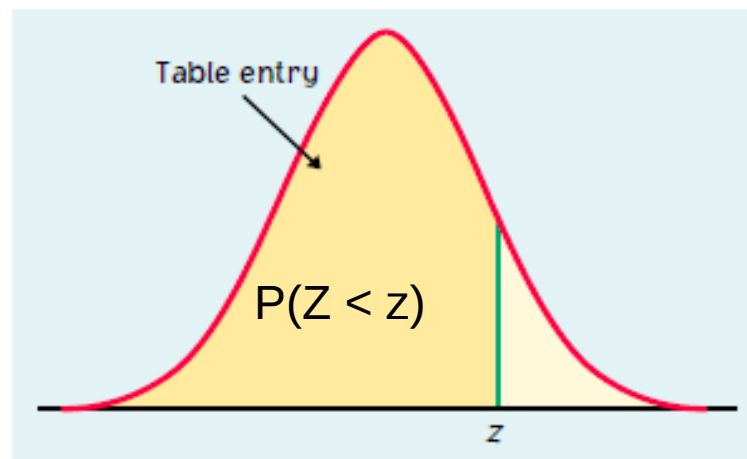
$$P(Z < 1.64) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



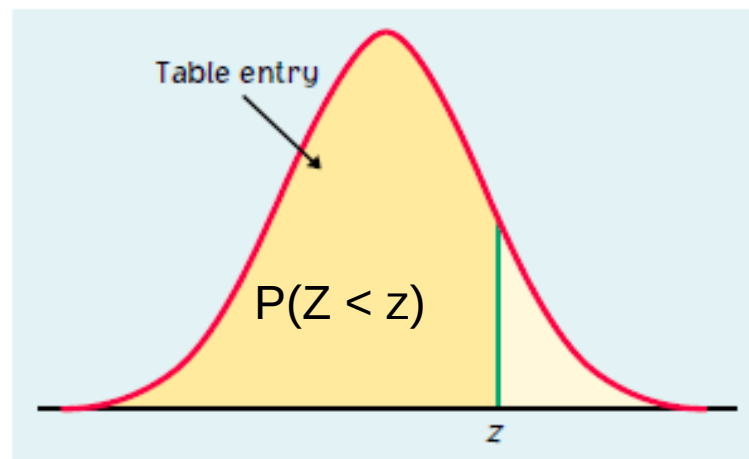
$$P(Z < 1.64) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



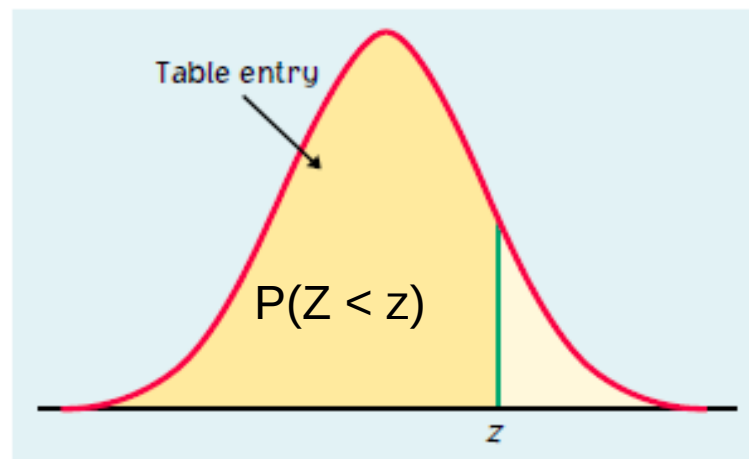
$$P(Z < 1.64) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



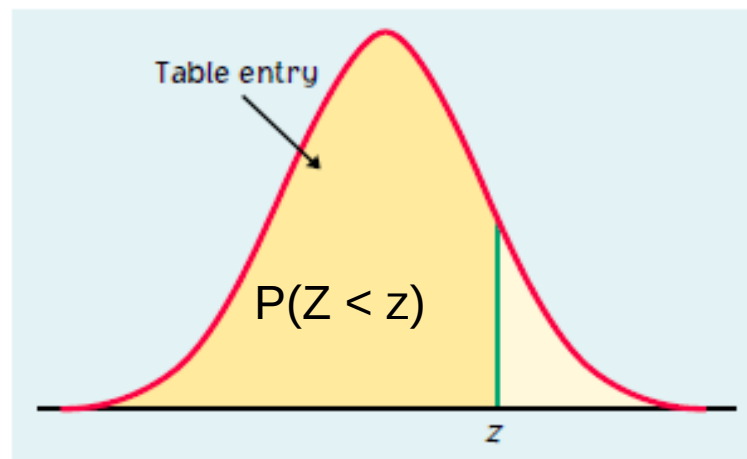
$$P(Z < 1.64) = 0.9495$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



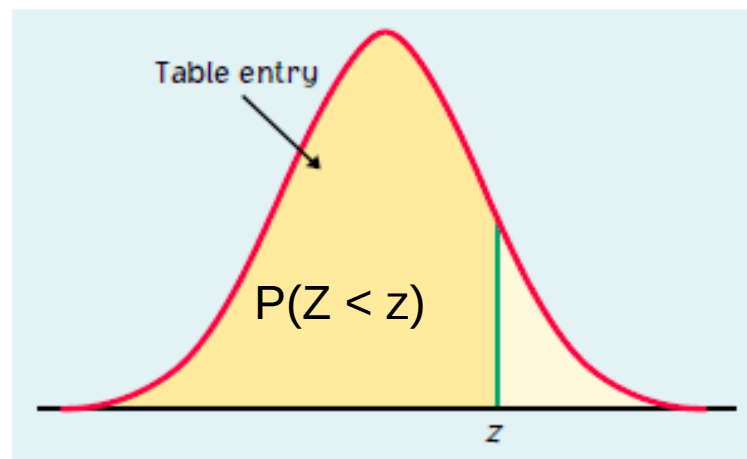
$$P(Z < z) = 0.7995$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



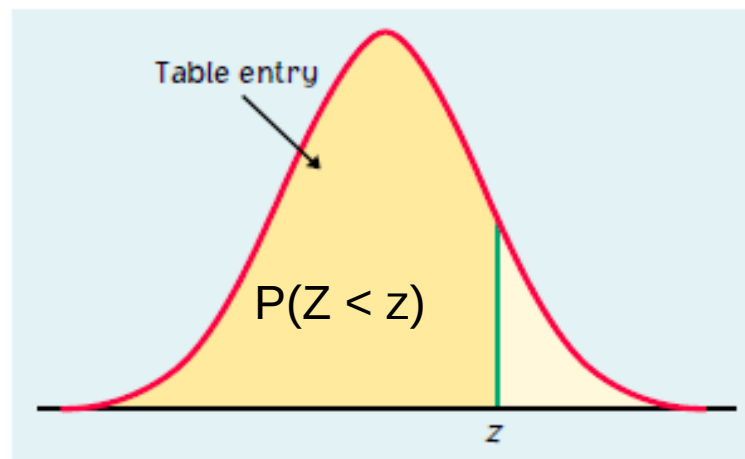
$$P(Z < z) = 0.7995$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



$$P(Z < z) = 0.7995$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

Ejercicio.

Sea $X \sim N(0,1)$ hallar:

$$a) P(Z \leq 1.25) =$$

$$b) P(Z \geq -1.96) =$$

$$c) P(Z \leq z) = 0.500$$

$$d) P(Z = z) =$$

Ejercicio.

Sea $X \sim N(0,1)$ hallar:

$$a) P(Z \leq 1.25) =$$

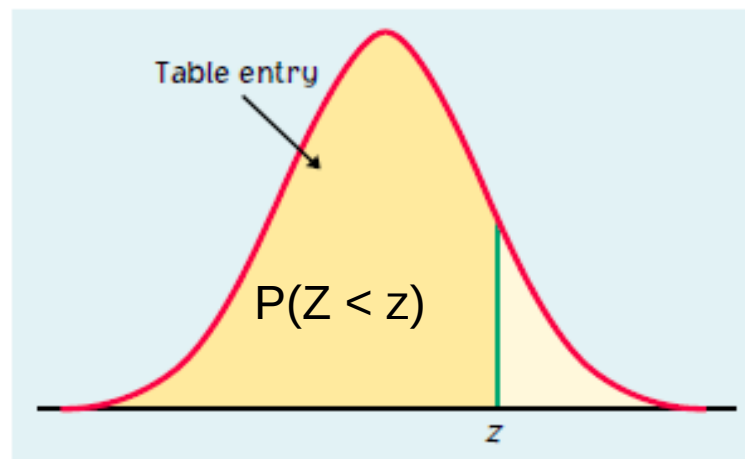
$$b) P(Z \geq -1.96) =$$

$$c) P(Z \leq z) = 0.500$$

$$d) P(Z = z) =$$

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



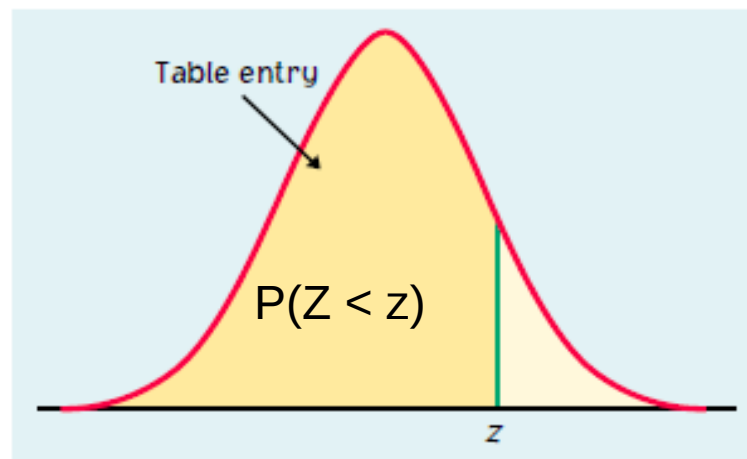
$$P(Z < 1.25) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



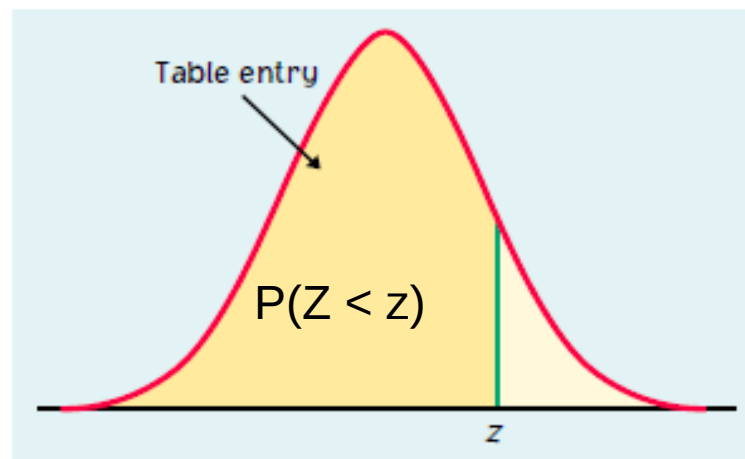
$$P(Z < 1.25) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



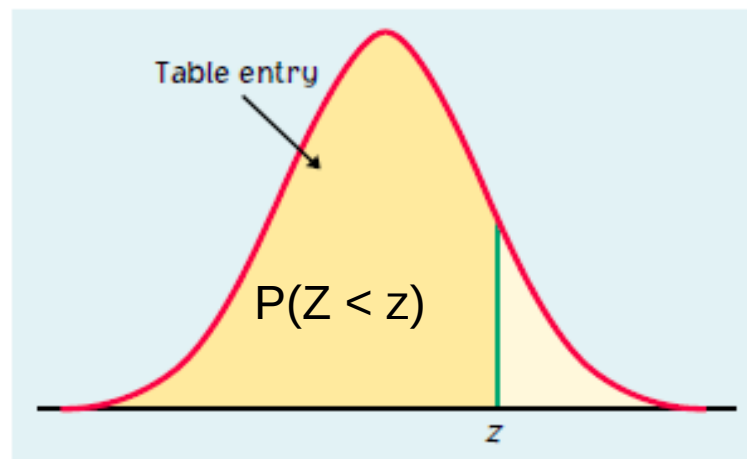
$$P(Z < 1.25) =$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



$$P(Z < 1.25) = 0.8944$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

Ejercicio.

Sea $X \sim N(0,1)$ hallar:

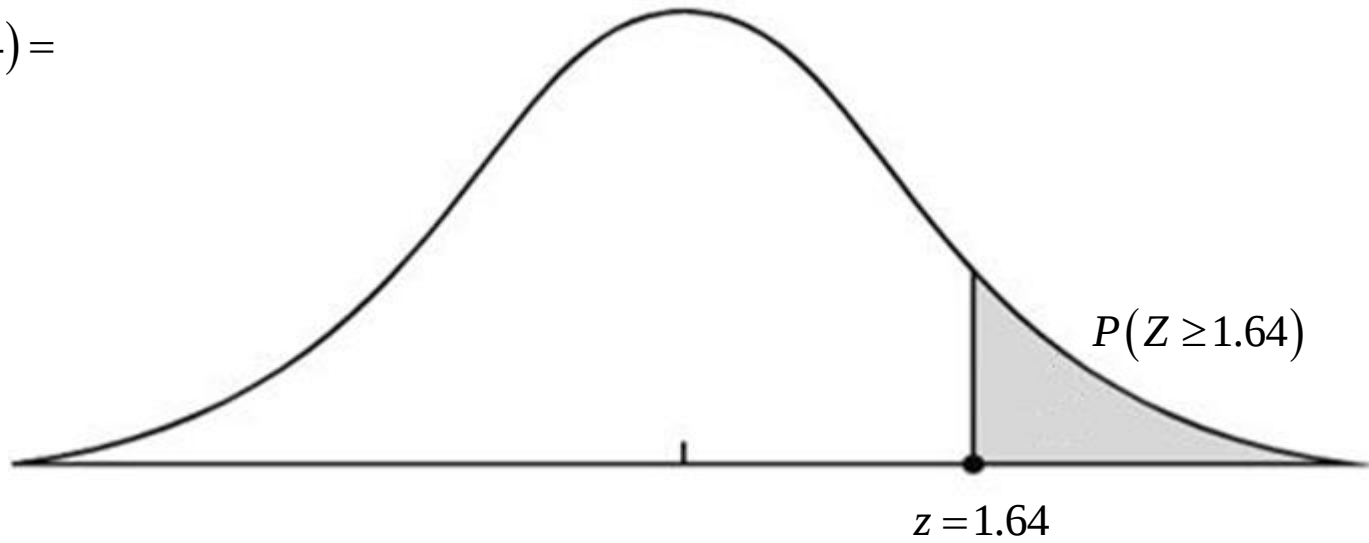
$$a) P(Z \leq 1.25) = 0.8944$$

$$b) P(Z \geq 1.64) =$$

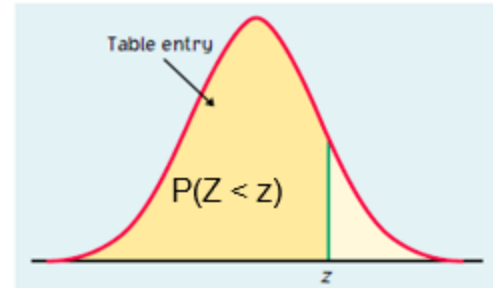
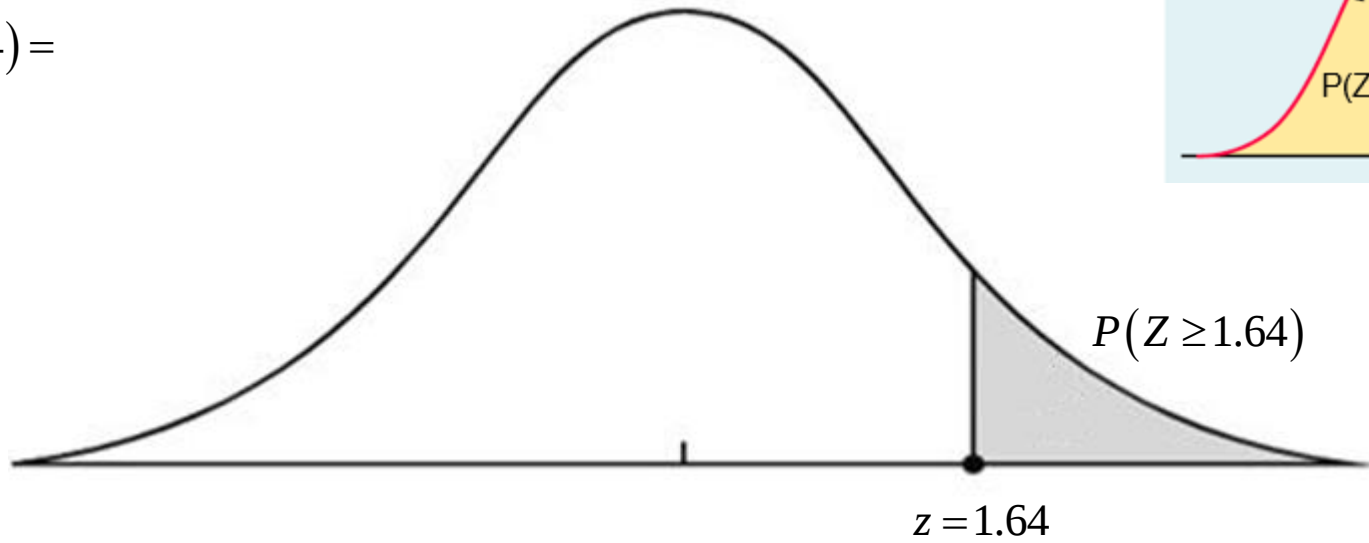
$$c) P(Z \leq z) = 0.500$$

$$d) P(Z = z) =$$

$$P(Z \geq 1.64) =$$

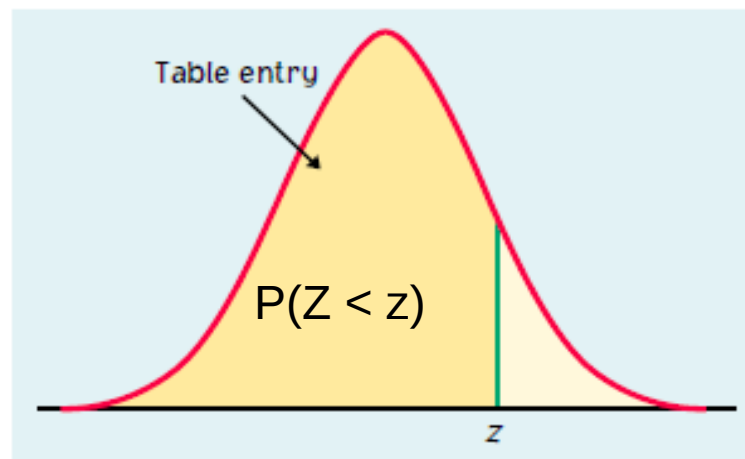


$$P(Z \geq 1.64) =$$



$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .

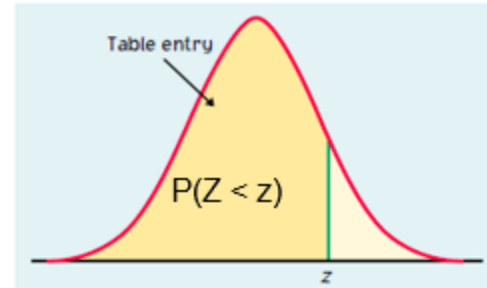
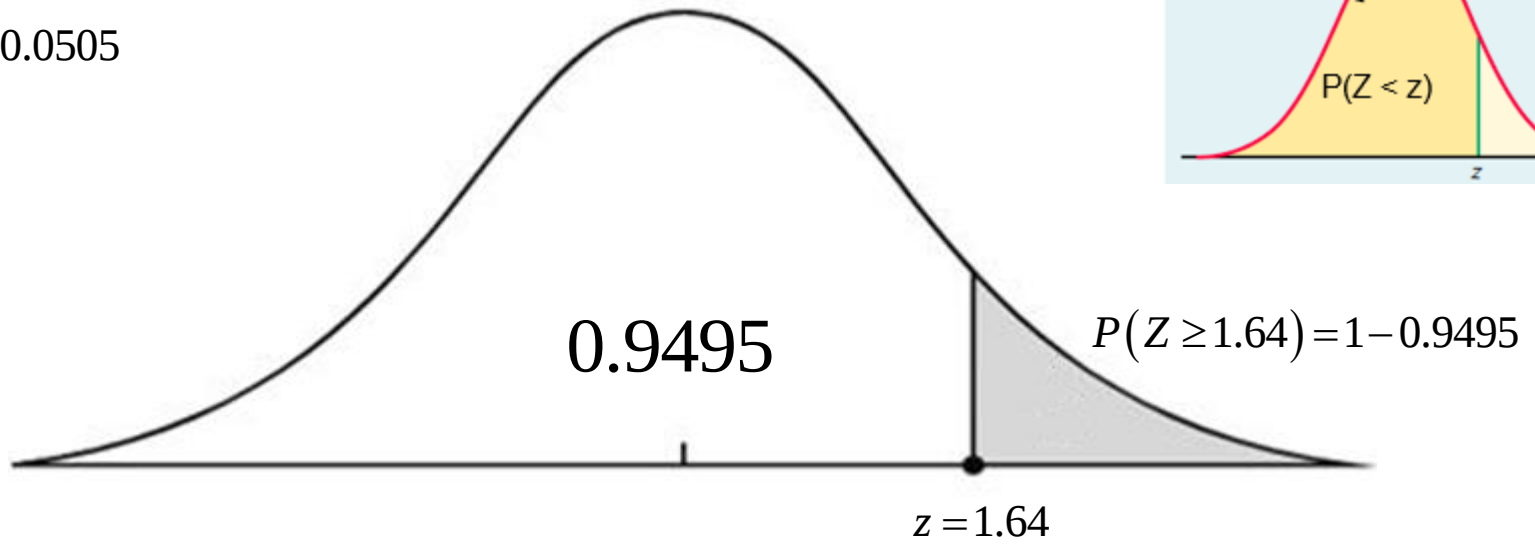


$$P(Z < 1.64) = 0.9495$$

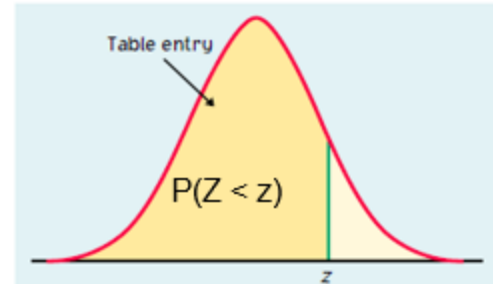
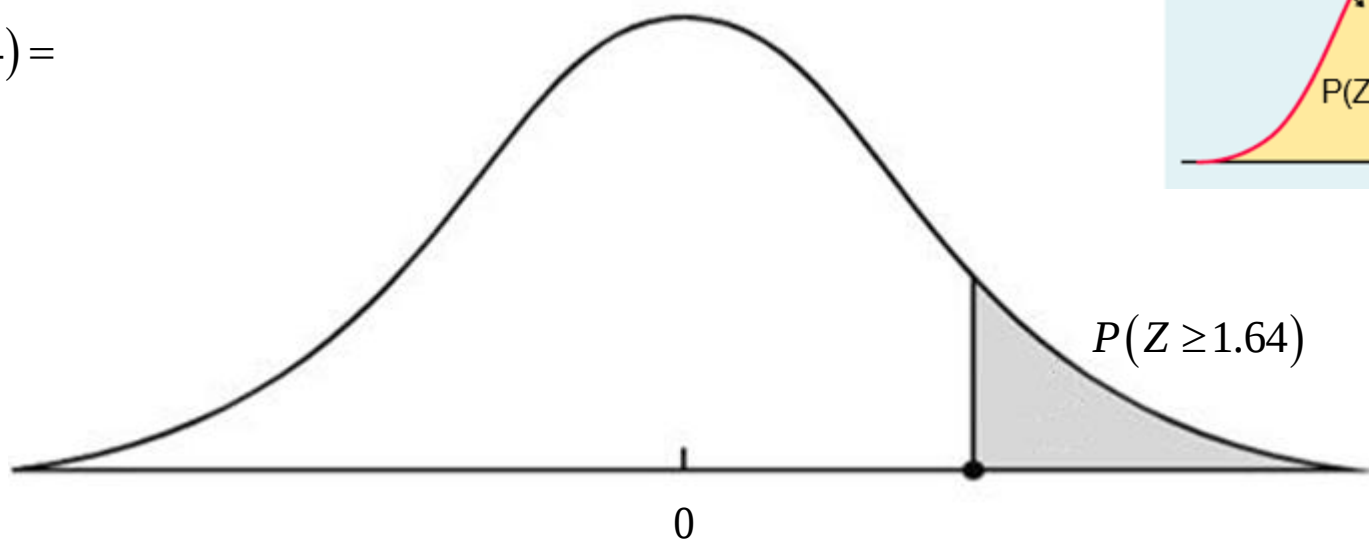
TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

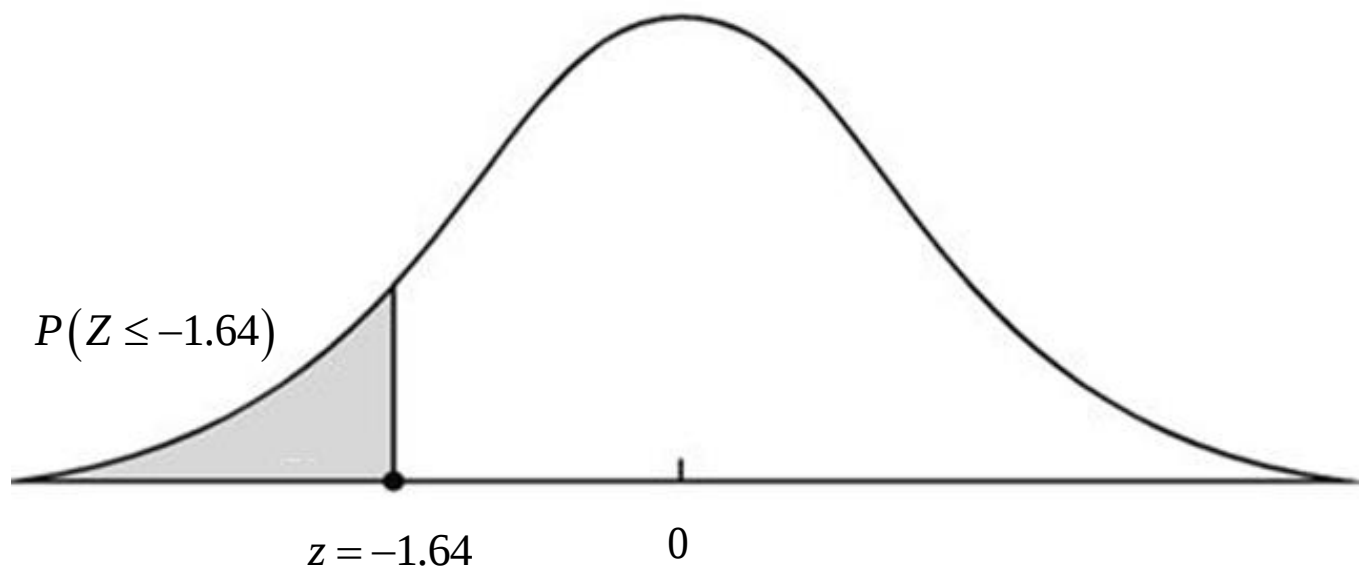
$$P(Z \geq 1.64) = 0.0505$$



$$P(Z \geq 1.64) =$$

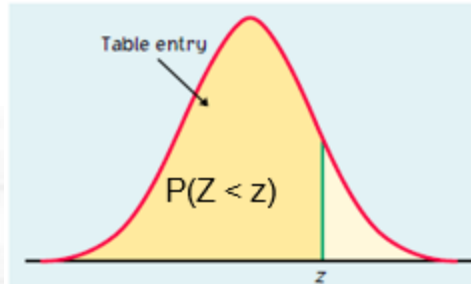


Por simetría podemos buscar en tabla:



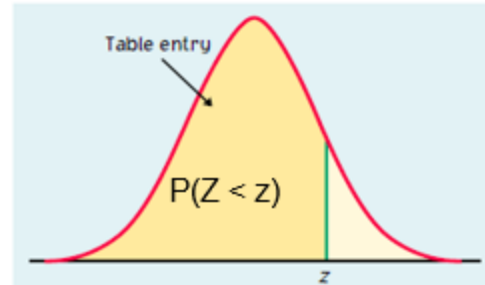
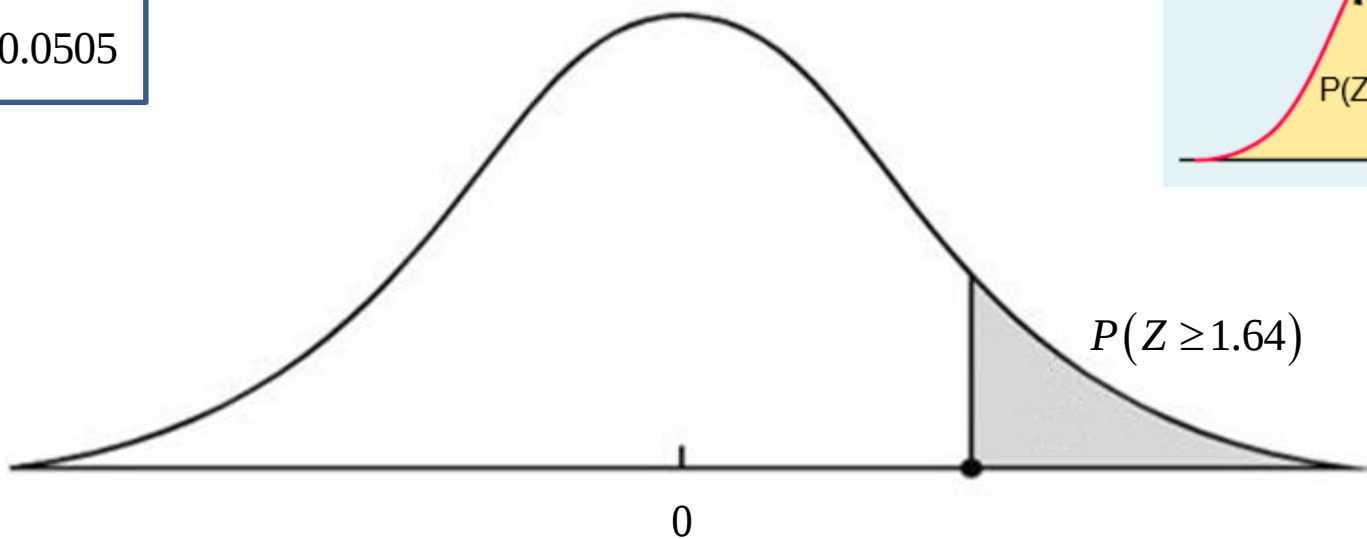
$$Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(Z \leq z)$$



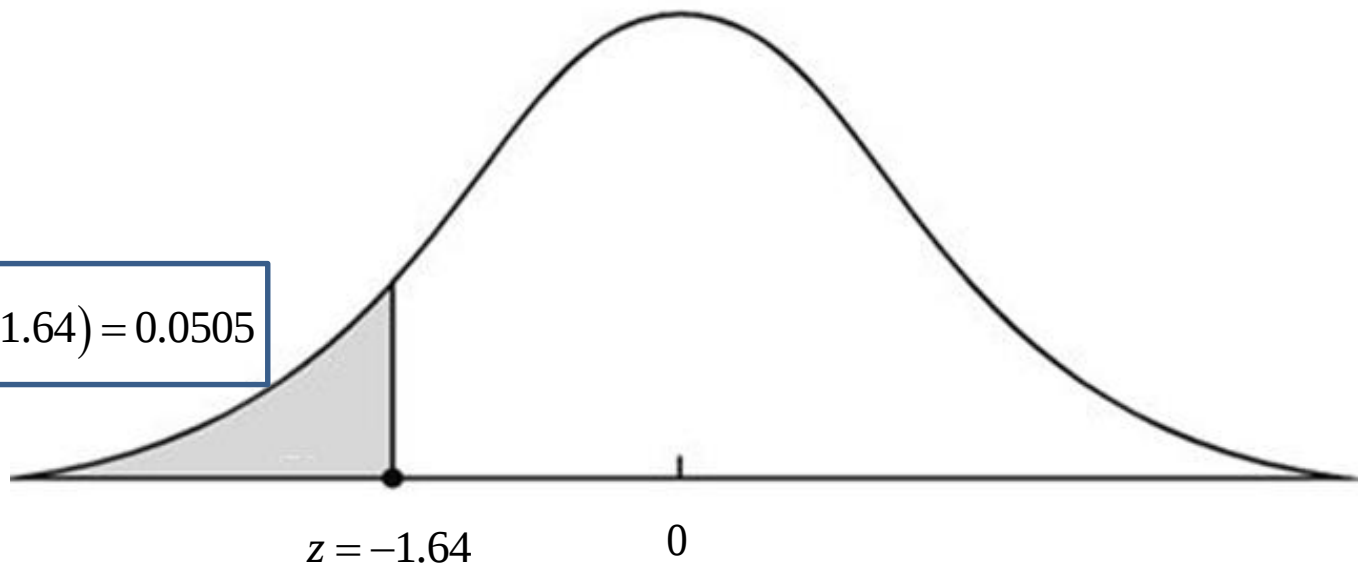
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
—3.0	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
—2.9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
—2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
—2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
—2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
—2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
—2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
—2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
—2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
—2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
—2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
—1.9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0238	0,0233
—1.8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0300	0,0294
—1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
—1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
—1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0570	0,0559
—1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681

$$P(Z \geq 1.64) = 0.0505$$



Por simetría podemos buscar en tabla:

$$P(Z \leq -1.64) = 0.0505$$



Ejercicio.

Sea $X \sim N(0,1)$ hallar:

$$a) P(Z \leq 1.25) = 0.8944$$

$$b) P(Z \geq 1.64) = 0.0505$$

$$c) P(Z \leq z) = 0.500$$

$$d) P(Z = z) =$$

Ejercicio.

Sea $X \sim N(0,1)$ hallar:

$$a) P(Z \leq 1.25) = 0.8944$$

$$b) P(Z \geq 1.64) = 0.0505$$

$$c) P(Z \leq z) = 0.500$$

$$d) P(Z = z) =$$

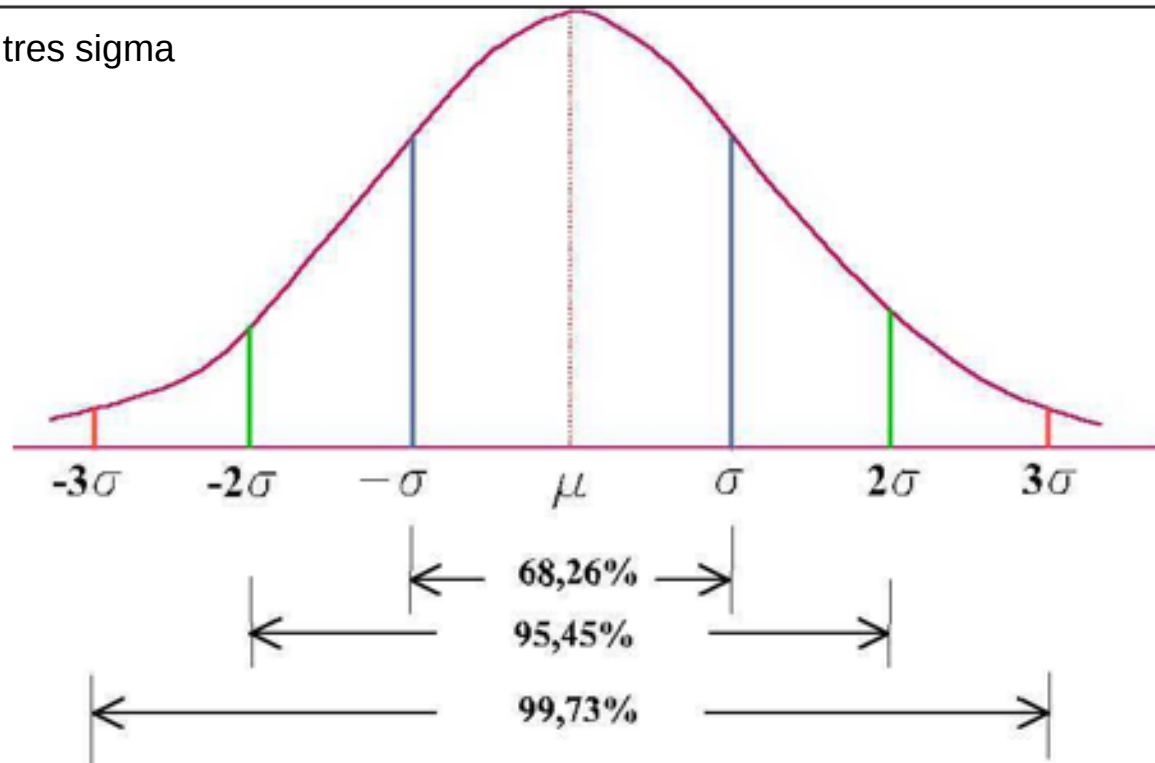
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P[|X - \mu| < \sigma] = 0,6827$$

$$P[|X - \mu| < 2\sigma] = 0,9545$$

$$P[|X - \mu| < 3\sigma] = 0,9974$$

Regla de las tres sigma



$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \leq \delta\right) = 2\Phi(\delta) - 1$$

Combinación lineal de v. a. normales

Cualquier combinación lineal de variables aleatorias normales independientes es una variable aleatoria normal.

Formalmente, sean las variables aleatorias X_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, todas ellas independientes y distribuidas normalmente, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Sean los números reales a_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, la variable aleatoria combinación lineal: $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, se distribuye normalmente y, además:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Combinación lineal de v. a. normales

Cualquier combinación lineal de variables aleatorias normales independientes es una variable aleatoria normal.

Formalmente, sean las variables aleatorias X_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, todas ellas independientes y distribuidas normalmente, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Sean los números reales a_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, la variable aleatoria combinación lineal: $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, se distribuye normalmente y, además:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

Combinación lineal de v. a. normales

Cualquier combinación lineal de variables aleatorias normales independientes es una variable aleatoria normal.

Formalmente, sean las variables aleatorias X_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, todas ellas independientes y distribuidas normalmente, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Sean los números reales a_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, la variable aleatoria combinación lineal: $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, se distribuye normalmente y, además:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

Teorema del límite central

Teorema (T.L.C): Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ v. a. i.i.d tal que $E(x_i) = \mu$ y $V(x_i) = \sigma^2$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y sea $S = \sum_{i=1}^n x_i$, entonces, S es una variable aleatoria y se distribuye aproximadamente como una distribución normal para n tendiendo a infinito. Es decir:

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \sim N(E(S), V(S)), \text{ donde}$$

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{E(x_i)}_{\mu} = n \times \mu$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{V(x_i)}_{\sigma^2} = n \times \sigma^2$$

Por lo tanto:

$$Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

Una máquina de corte tarda en promedio 10 minutos en ejecutar su acción, con una desviación estándar de 3 minutos. Supongamos que durante un turno se realizaron 36 cortes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para realizar los 36 cortes supere los 375 minutos?

Solución/

Una máquina de corte tarda en promedio 10 minutos en ejecutar su acción, con una desviación estándar de 3 minutos. Supongamos que durante un turno se realizaron 36 cortes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para realizar los 36 cortes supere los 375 minutos?

Solución/

Sea la variable aleatoria

X_i = “Tiempo de ejecución de un corte”. Entonces $E(X_i) = 10$ minutos y $V(X_i) = 3^2$

Una máquina de corte tarda en promedio 10 minutos en ejecutar su acción, con una desviación estándar de 3 minutos. Supongamos que durante un turno se realizaron 36 cortes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para realizar los 36 cortes supere los 375 minutos?

Solución/

Sea la variable aleatoria

X_i = “Tiempo de ejecución de un corte”. Entonces $E(X_i) = 10$ minutos y $V(X_i) = 3^2$

Sabemos también que durante el turno se han realizado $n = 36$ cortes.

Una máquina de corte tarda en promedio 10 minutos en ejecutar su acción, con una desviación estándar de 3 minutos. Supongamos que durante un turno se realizaron 36 cortes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para realizar los 36 cortes supere los 375 minutos?

Solución/

Sea la variable aleatoria

X_i = “Tiempo de ejecución de un corte”. Entonces $E(X_i) = 10$ minutos y $V(X_i) = 3^2$

Sabemos también que durante el turno se han realizado $n = 36$ cortes.

La variable que nos interesa estudiar es $S = \sum_{i=1}^{36} X_i$

Una máquina de corte tarda en promedio 10 minutos en ejecutar su acción, con una desviación estándar de 3 minutos. Supongamos que durante un turno se realizaron 36 cortes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para realizar los 36 cortes supere los 375 minutos?

Solución/

Sea la variable aleatoria

X_i = “Tiempo de ejecución de un corte”. Entonces $E(X_i) = 10$ minutos y $V(X_i) = 3^2$

Sabemos también que durante el turno se han realizado $n = 36$ cortes.

La variable que nos interesa estudiar es $S = \sum_{i=1}^{36} X_i$

Si aplicamos el Teorema Central del Límite a esta variable que es suma de variables aleatorias i.i.d. cada una de ellas con $E(X_i) = 10$ minutos y $V(X_i) = 3^2$.

$$S \sim N(E(S), V(S))$$

El TCL nos dice que $S \sim N(E(S), V(S))$, debemos calcular esos valores:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{10} = 36 \times 10 = 360$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_9 = 36 \times 9 = 324$$

$$S \sim N(360, 324)$$

El TCL nos dice que $S \sim N(E(S), V(S))$, debemos calcular esos valores:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{10} = 36 \times 10 = 360$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_9 = 36 \times 9 = 324$$

$$S \sim N(360, 324)$$

$$P(S > 375) =$$

El TCL nos dice que $S \sim N(E(S), V(S))$, debemos calcular esos valores:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{10} = 36 \times 10 = 360$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_9 = 36 \times 9 = 324$$

$$S \sim N(360, 324)$$

$$P(S > 375) = 1 - P(S \leq 375) =$$

El TCL nos dice que $S \sim N(E(S), V(S))$, debemos calcular esos valores:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{10} = 36 \times 10 = 360$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_9 = 36 \times 9 = 324$$

$$S \sim N(360, 324)$$

$$P(S > 375) = 1 - P(S \leq 375) = 1 - P\left(\frac{S - 360}{18} \leq \frac{375 - 360}{18}\right)$$

El TCL nos dice que $S \sim N(E(S), V(S))$, debemos calcular esos valores:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{10} = 36 \times 10 = 360$$

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_9 = 36 \times 9 = 324$$

$$S \sim N(360, 324)$$

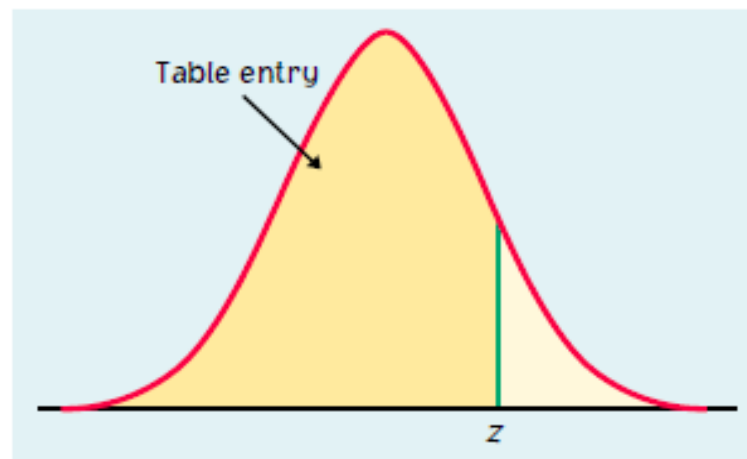
$$P(S > 375) = 1 - P(S \leq 375) = 1 - P\left(\frac{S - 360}{18} \leq \frac{375 - 360}{18}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{375 - 360}{18}\right) = 1 - \Phi(0.83) = 0.2033$$


$$Z \sim N(0, 1)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .



$$P(Z < 0.83) = 0.7967$$

TABLE A Standard normal probabilities (*continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545

Ejemplo: El peso expresado en gramos de cada limón de exportación del norte argentino es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalos $[100,150]$. Para su exportación, se deben embalar en bolsas de polietileno, conteniendo cada una exactamente **3 docenas de limones**. Las bolsas de polietileno que se consiguen **a bajo costo**, especifican que resisten un peso no superior a 4700 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que estas bolsas resistan el contenido que se desea empaquetar?

Ejemplo: El peso expresado en gramos de cada limón de exportación del norte argentino es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalos $[100,150]$. Para su exportación, se deben embalar en bolsas de polietileno, conteniendo cada una exactamente **3 docenas de limones**. Las bolsas de polietileno que se consiguen **a bajo costo**, especifican que resisten un peso no superior a 4700 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que estas bolsas resistan el contenido que se desea empaquetar?

Sea X_i la distribución del peso de cada limon $X_i \sim U[100,150]$

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente}$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

Ejemplo: El peso expresado en gramos de cada limón de exportación del norte argentino es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalos $[100,150]$. Para su exportación, se deben embalar en bolsas de polietileno, conteniendo cada una exactamente **3 docenas de limones**. Las bolsas de polietileno que se consiguen **a bajo costo**, especifican que resisten un peso no superior a 4700 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que estas bolsas resistan el contenido que se desea empaquetar?

Sea X_i la distribución del peso de cada limon $X_i \sim U[100,150]$

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente}$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \xRightarrow{TLC} \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$$

Ejemplo: El peso expresado en gramos de cada limón de exportación del norte argentino es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalos $[100,150]$. Para su exportación, se deben embalar en bolsas de polietileno, conteniendo cada una exactamente **3 docenas de limones**. Las bolsas de polietileno que se consiguen a **bajo costo**, especifican que resisten un peso no superior a 4700 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que estas bolsas resistan el contenido que se desea empaquetar?

Sea X_i la distribución del peso de cada limon $X_i \sim U[100,150]$

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente}$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \xRightarrow{TLC} \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$$

Vamos a evaluar la probabilidad de que estas bolsas no resistan el contenido que se desea empaquetar

Ejemplo: El peso expresado en gramos de cada limón de exportación del norte argentino es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalos $[100,150]$. Para su exportación, se deben embalar en bolsas de polietileno, conteniendo cada una exactamente **3 docenas de limones**. Las bolsas de polietileno que se consiguen **a bajo costo**, especifican que resisten un peso no superior a 4700 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que estas bolsas resistan el contenido que se desea empaquetar?

Sea X_i la distribución del peso de cada limon

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente}$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \Rightarrow \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2) \\ \text{TLIC}$$

Vamos a evaluar la probabilidad de que estas bolsas no resistan el contenido que se desea empaquetar

$$P(S > 4700) = ?$$

Sea X_i la distribución del peso de cada limon

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente} \quad X_i \sim U[100,150]$$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \xRightarrow{TLC} \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$$

$$\mu_s = E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{125} = 36 \times 125 = 4500$$

Sea X_i la distribución del peso de cada limon

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente} \quad X_i \sim U[100,150]$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \xRightarrow{TLC} \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$$

$$\mu_s = E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{125} = 36 \times 125 = 4500$$

$$\sigma_s^2 = V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_{0.84} = 36 \times \frac{625}{3} = 7500$$

Sea X_i la distribución del peso de cada limon

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente} \quad X_i \sim U[100,150]$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \Rightarrow \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2) \\ \text{TLIC}$$

$$\mu_s = E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{125} = 36 \times 125 = 4500$$

$$\sigma_s^2 = V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_{0.84} = 36 \times \frac{625}{3} = 7500$$

Finalmente evaluamos la probabilidad de que estas bolsas no resistan el contenido que se desea empaquetar

Sea X_i la distribución del peso de cada limon

$$E(X_i) = \frac{100+150}{2} = 125 \quad \text{gramos por estar distribuidos uniformemente}$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2(X_i) = \frac{[150-100]^2}{12} = \frac{(50)^2}{12} = \frac{2500}{12} = \frac{625}{3} \quad \text{por estar distribuidos uniformemente}$$

$$\text{Definimos la Variable } S = \sum_{i=1}^{i=36} X_i \quad \Rightarrow \quad S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2) \\ \text{TLC}$$

$$\mu_s = E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{E(X_i)}_{125} = 36 \times 125 = 4500$$

$$\sigma_s^2 = V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} \underbrace{V(X_i)}_{0.84} = 36 \times \frac{625}{3} = 7500$$

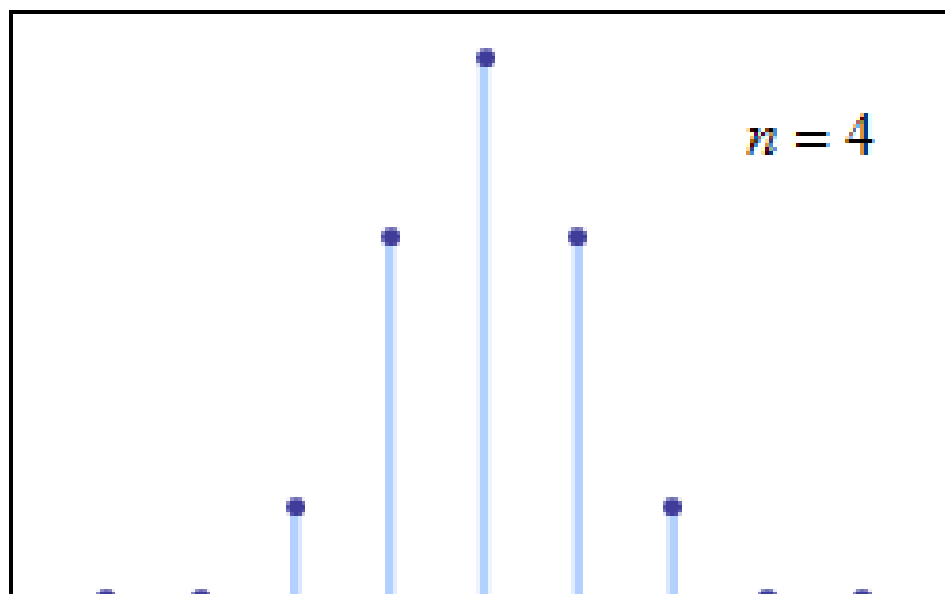
Finalmente evaluamos la probabilidad de que estas bolsas no resistan el contenido que se desea empaquetar

$$P(X > 4700) = P\left(\frac{X - 4500}{\sqrt{7500}} > \frac{4700 - 4500}{\sqrt{7500}}\right) = P(Z > 2,3094) = P(Z > 2,3094) = 1 - \Phi(2,3094) = 1 - 0,9896 = 0,104$$

Aproximación Normal a la distribución Binomial

Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p , es decir, $X \sim B(n, p)$. La variable aleatoria:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$



Aproximación Normal a la distribución Binomial

Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p , es decir, $X \sim B(n, p)$. La variable aleatoria:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Aproximación Normal a la distribución Binomial

Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p , es decir, $X \sim B(n, p)$. La variable aleatoria:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Si a la v. a. $X \sim B(n, p)$, la definimos como una suma de " n " v. a. X_i de tipo Bernoulli independientes entre sí, cada una de ellas con $E(X_i) = p$ y varianza $V(X_i) = p(1-p)$

Entonces por el TCL $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(np, np(1-p))$ cuando el n tiende a infinito.

Aproximación Normal a la distribución Binomial

Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p , es decir, $X \sim B(n, p)$. La variable aleatoria:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Si a la v. a. $X \sim B(n, p)$, la definimos como una suma de " n " v. a. X_i de tipo Bernoulli independientes entre sí, cada una de ellas con $E(X_i) = p$ y varianza $V(X_i) = p(1-p)$

Entonces por el TCL $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(np, np(1-p))$ cuando el n tiende a infinito.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1-p)$$

Observaciones: Al aproximar la distribución Binomial por la distribución Normal, estamos aproximando la distribución de una variable aleatoria discreta con la de una variable aleatoria continua. Por lo tanto se debe tener cierto cuidado con los puntos extremos del intervalo, dado que para una v.a. continua $P(X = x_0) = 0$ mientras que para una v.a. discreta $P(X = x_0) \geq 0$.

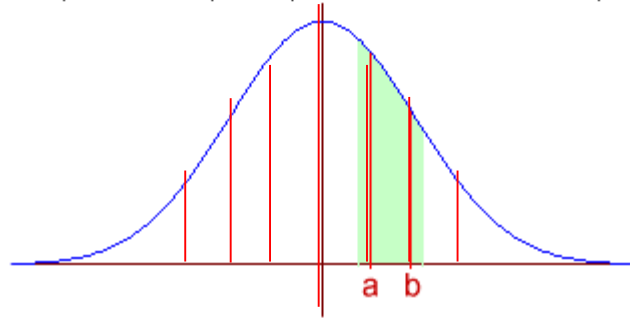
Corrección por continuidad:

Para variables discretas, consiste en ampliar el intervalo en una unidad, es decir:

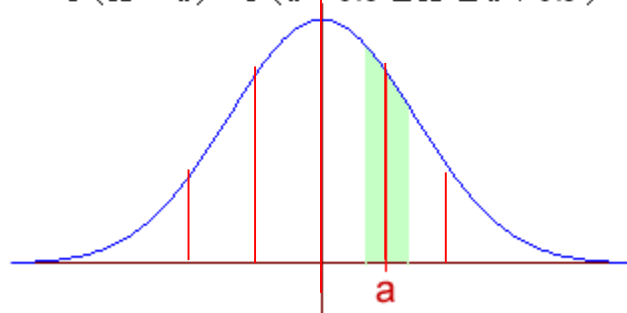
$$\text{a) } P(X = k) \cong P\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{b) } P(a \leq X \leq b) \cong P\left(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5)$$



$$P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$$



Ejemplo: Supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras de las cuales, alrededor del 5% son defectuosas. Si se inspeccionan 100 lavadoras ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 2 y 6 lavadoras defectuosas?

Solución/

Sea X : número de lavadoras defectuosas en 100 observaciones. .

Ejemplo: Supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras de las cuales, alrededor del 5% son defectuosas. Si se inspeccionan 100 lavadoras ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 2 y 6 lavadoras defectuosas?

Solución/

Sea X : número de lavadoras defectuosas en 100 observaciones. $X \sim B\left(100, \frac{5}{100}\right)$

Ejemplo: Supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras de las cuales, alrededor del 5% son defectuosas. Si se inspeccionan 100 lavadoras ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 2 y 6 lavadoras defectuosas?

Solución/

Sea X : número de lavadoras defectuosas en 100 observaciones. $X \sim B\left(100, \frac{5}{100}\right)$

La probabilidad pedida es:

$$P(2 < X < 6):$$

Ejemplo: Supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras de las cuales, alrededor del 5% son defectuosas. Si se inspeccionan 100 lavadoras ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 2 y 6 lavadoras defectuosas?

Solución/

Sea X : número de lavadoras defectuosas en 100 observaciones. $X \sim B\left(100, \frac{5}{100}\right)$

La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 6) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \\ &= \binom{100}{3} 0,05^3 (1-0,05)^{97} + \binom{100}{4} 0,05^4 (1-0,05)^{96} + \binom{100}{5} 0,05^5 (1-0,05)^{95} = 0.4977 \end{aligned}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Ejemplo: Supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras de las cuales, alrededor del 5% son defectuosas. Si se inspeccionan 100 lavadoras ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 2 y 6 lavadoras defectuosas?

Solución/

Sea X : número de lavadoras defectuosas en 100 observaciones. $X \sim B\left(100, \frac{5}{100}\right)$

Comparemos el resultado del cálculo directo con el cálculo aproximado, es decir, aplicando el TCL:

Calculamos $E(X) = np = 100 \times 0.05 = 5$ y $V(X) = np(1-p) = 100 \times 0.05 \times 0.95 = 4.75$

$$\begin{aligned} P(2 < X < 6) &= P(3 \leq X \leq 5) = P(2.5 \leq X \leq 5.5) = P\left(\frac{2.5-5}{\sqrt{4.75}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{4.75}} \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{4.75}}\right) = P(-1.15 \leq Z \leq 0.23) = \\ &= \Phi(0.23) - \Phi(-1.15) = 0.591 - 0.1251 = 0.4659 \end{aligned}$$

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

- a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.
- b) Sabiendo que por cada corte se cobra 9,25 dólares, que se utilizan 11,5 litros de refrigerante por corte con un costo de 0,07 dólares el litro y que el costo mensual de mantenimiento de la máquina es de 700 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una ganancia superior a 3750 dólares en un trimestre?

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.

Solución/

Sea X_i : el número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día.

$$E(X_i) = 7 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 9 \times 0.4 + 10 \times 0.1 = 8.4$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.

Solución/

Sea X_i : el número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día.

$$E(X_i) = 7 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 9 \times 0.4 + 10 \times 0.1 = 8.4 \qquad E(X_i^2) = 7^2 \times 0.2 + 8^2 \times 0.3 + 9^2 \times 0.4 + 10^2 \times 0.1 = 71.4$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.

Solución/

Sea X_i : el número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día.

$$E(X_i) = 7 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 9 \times 0.4 + 10 \times 0.1 = 8.4 \quad E(X_i^2) = 7^2 \times 0.2 + 8^2 \times 0.3 + 9^2 \times 0.4 + 10^2 \times 0.1 = 71.4 \quad V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 71.4 - 8.4^2 = 0.84$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.

Solución/

Sea X_i : el número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día.

$E(X_i) = 7 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 9 \times 0.4 + 10 \times 0.1 = 8.4$ $E(X_i^2) = 7^2 \times 0.2 + 8^2 \times 0.3 + 9^2 \times 0.4 + 10^2 \times 0.1 = 71.4$ $V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 71.4 - 8.4^2 = 0.84$

$$S = \sum_{i=1}^{81} X_i$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.

Solución/

Sea X_i : el número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día.

$$E(X_i)=7\times0.2+8\times0.3+9\times0.4+10\times0.1=8.4 \qquad E(X_i^2)=7^2\times0.2+8^2\times0.3+9^2\times0.4+10^2\times0.1=71.4 \qquad V(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)=71.4-8.4^2=0.84$$

$$S = \sum_{i=1}^{81} X_i \xrightarrow{TLC} S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$$

$$P(670 < S < 700) = ?$$

$$E(X_i) = 7 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 9 \times 0.4 + 10 \times 0.1 = 8.4 \quad E(X_i^2) = 7^2 \times 0.2 + 8^2 \times 0.3 + 9^2 \times 0.4 + 10^2 \times 0.1 = 71.4 \quad V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 71.4 - 8.4^2 = 0.84$$

$$S = \sum_{i=1}^{81} X_i \xrightarrow{TLC} S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$$

$$P(670 < S < 700) = ?$$

Para poder calcular la probabilidad anterior debemos conocer los valores de :

$$\mu_S = ? \quad ; \quad \sigma_S^2 = ?$$

$$\mu_S = E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{81} X_i\right) = \sum_{i=1}^{81} \underbrace{E(X_i)}_{8.4} = 81 \times 8.4 = 680.4$$

$$\sigma_S^2 = V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{81} X_i\right) = \sum_{i=1}^{81} \underbrace{V(X_i)}_{0.84} = 81 \times 0.84 = 68.04$$

$$P(670 < X < 700) = P(671 \leq X \leq 699) = P(670.5 \leq X \leq 699.5)$$

Ejemplo: El número de cortes de alta precisión que realiza una máquina por día (X) presenta la siguiente distribución de probabilidades:

X	7	8	9	10
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

*Las cantidades de cortes realizados en días distintos son independientes.

- a) Calcular la probabilidad de que en un trimestre (81 días) el número total de cortes para dicha máquina esté entre 670 y 700 **excluyendo** estos valores.
- b) Sabiendo que por cada corte se cobra 9,25 dólares, que se utilizan 11,5 litros de refrigerante por corte con un costo de 0,07 dólares el litro y que el costo mensual de mantenimiento de la máquina es de 700 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una ganancia superior a 3750 dólares en un trimestre?

- a) Sabiendo que por cada corte se cobra 9,25 dólares, que se utilizan 11,5 litros de refrigerante por corte con un costo de 0,07 dólares el litro y que el costo mensual de mantenimiento de la máquina es de 700 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una ganancia superior a 3750 dólares en un trimestre?

Por cada corte: \$ 9.25

Refrigerante: 11.5 litros por corte ---> \$ 0.07 el litro ---> \$ 0.805

Mantenimiento: \$ 700 mensuales ---> en 3 meses: \$ 2100

Sea G la variable ganancia, entonces: $G = 9.25 \times X - 0.805 \times X - 2100 = 8.445 \times X - 2100$

$$E(G) = 8.445 \times E(X) - 2100 = 8.445 \times 680.4 - 2100 = 3645.978$$

$$V(G) = 8.445^2 \times V(X) = 8.445^2 \times 68.04 = 4852.478$$

$$P(G > 3750) = 1 - P(G \leq 3750) = 1 - \phi\left(\frac{3750 - 3645.978}{\sqrt{4852.478}}\right) = 1 - \phi(1.49) = 1 - 0.9319 = 0.0681$$

Demostración: f es una legítima función densidad de probabilidades:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

$$w = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \quad dw = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\sigma dw = dx$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sqrt{2}\sigma dw = \frac{\cancel{\sqrt{2}\sigma}}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$