Pruebas de Hipótesis

2022.

Pruebas de Hipótesis

En la práctica profesional nos vemos obligados con frecuencia a tomar decisiones relativas a una población sobre la base de información proveniente de una muestra. Estas decisiones se llaman ***decisiones estadísticas***.

• Se llaman ***decisiones estadísticas*** a las decisiones que deben tomarse con respecto a una población a partir de información obtenida de una muestra extraída de las mismas.

.

Pruebas de Hipótesis

En la práctica profesional nos vemos obligados con frecuencia a tomar decisiones relativas a una población sobre la base de información proveniente de una muestra. Estas decisiones se llaman ***decisiones estadísticas***.

• Se llaman ***decisiones estadísticas*** a las decisiones que deben tomarse con respecto a una población a partir de información obtenida de una muestra extraída de las mismas.

La **inferencia estadística** está formada por un conjunto de métodos utilizados para tomar decisiones u obtener conclusiones sobre una población a partir de la información contenida en una muestra.

Por ejemplo:

Podemos querer decidir, basados en datos muestrales, si el tiempo promedio requerido por una máquina para el llenado de bolsas de cemento ha cambiado durante el funcionamiento, o si el poder cubritivo de una lata de pintura de 20 litros es en promedio de 400 m^2, entre otras.

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es cualquier afirmación o conjetura sobre una o varias características de interés de la población.

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es cualquier afirmación o conjetura sobre una o varias características de interés de la población.

Una prueba o test de hipótesis es una técnica que permite comprobar si la información que proporciona una muestra observada "*concuerda*" o no con las hipótesis estadísticas formuladas y, por lo tanto, decidir si se debe rechazar o no dicha hipótesis.

Las pruebas de hipótesis se emplean en todos los ámbitos donde puede contrastarse la teoría con la observación.

Pruebas de Hipótesis

H_0: Hipótesis nula: es el estado actual de la investigación, (hipótesis que se supone cierta, es decir, lo que se cree hasta el momento).

H_1: Hipótesis alternativa: representa el cambio en la población que el investigador espera que sea verdadera (por esto se llama hipótesis del investigador y está relacionada con su investigación).

La hipótesis nula (**H_0**) será rechazada en favor de la hipótesis alternativa (**H_1**) sólo si la evidencia muestral sugiere que **H_0** es falsa. Si la muestra no contradice fuertemente a **H_0**, se continuará creyendo en la verdad de la hipótesis nula. Las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son entonces ***rechazar* H_0** o ***no rechazar* H_0**

<u>Test de hipótesis o reglas de decisión</u>

Los procedimientos que nos permiten determinar si la información que surge de las muestras observadas "*difiere significativamente*" de los resultados esperados, y por lo tanto nos ayudan a decidir si existe evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis, se llaman ***pruebas (test, contraste) de hipótesis o reglas de decisión***.

Test de hipótesis o reglas de decisión

Los procedimientos que nos permiten determinar si la información que surge de las muestras observadas "*difiere significativamente*" de los resultados esperados, y por lo tanto nos ayudan a decidir si existe evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis, se llaman ***pruebas (test, contraste) de hipótesis o reglas de decisión***.

Probar una hipótesis implica tomar una decisión al comparar la muestra observada con respecto a la teoría. Por lo tanto, en esta toma de decisión podemos cometer errores:

Test de hipótesis o reglas de decisión

Los procedimientos que nos permiten determinar si la información que surge de las muestras observadas "*difiere significativamente*" de los resultados esperados, y por lo tanto nos ayudan a decidir si existe evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis, se llaman ***pruebas (test, contraste) de hipótesis o reglas de decisión***.

Probar una hipótesis implica tomar una decisión al comparar la muestra observada con respecto a la teoría. Por lo tanto, en esta toma de decisión podemos cometer errores:

Errores de TIPO I y TIPO II

Test de hipótesis o reglas de decisión

Los procedimientos que nos permiten determinar si la información que surge de las muestras observadas "*difiere significativamente*" de los resultados esperados, y por lo tanto nos ayudan a decidir si existe evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis, se llaman ***pruebas (test, contraste) de hipótesis o reglas de decisión***.

Probar una hipótesis implica tomar una decisión al comparar la muestra observada con respecto a la teoría. Por lo tanto, en esta toma de decisión podemos cometer errores:

Errores de TIPO I y TIPO II

El **error de tipo I** se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera. La probabilidad de cometer un error de tipo I es denota por α (nivel de significación).

Pruebas de Hipótesis

<u>Test de hipótesis o reglas de decisión</u>

Los procedimientos que nos permiten determinar si la información que surge de las muestras observadas "*difiere significativamente*" de los resultados esperados, y por lo tanto nos ayudan a decidir si existe evidencia suficiente para rechazar o no una hipótesis, se llaman ***pruebas (test, contraste) de hipótesis o reglas de decisión***.

Probar una hipótesis implica tomar una decisión al comparar la muestra observada con respecto a la teoría. Por lo tanto, en esta toma de decisión podemos cometer errores:

Errores de TIPO I y TIPO II

El **error de tipo I** se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo esta verdadera. La probabilidad de cometer un error de tipo I es denota por α (nivel de significación).

El **error de tipo II** se comete cuando no se rechaza la hipótesis nula siendo esta falsa. La probabilidad de cometer un error de tipo II es denota por β.

Pruebas de Hipótesis

Por lo tanto, al probar cualquier hipótesis estadística, existen cuatro situaciones diferentes que determinan si la decisión final es correcta o errónea.

Decisión	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
No se rechaza H_0	No hay error	Error de Tipo II
Rechazar H_0	Error de Tipo I	No hay error

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar } \mathrm{H}_0 \ / \ \mathrm{H}_0 \text{verdadera})$$

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{no rechazar } \mathrm{H}_0 \ / \ \mathrm{H}_0 \text{falsa})$$

Pruebas de Hipótesis

Nunca se puede eliminar la probabilidad de cometer un error de tipo I o un error de tipo II cuando se usan muestras para hacer inferencias, nuestro objetivo será minimizarlos.

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar H}_0 \ / \ \text{H}_0 \text{verdadera})$$

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{no rechazar H}_0 \ / \ \text{H}_0 \text{falsa})$$

La probabilidad **α** de cometer un **error de tipo I** recibe el nombre de **nivel de significación de la prueba**. Esta probabilidad se especifica antes de tomar la muestra de manera que los resultados no influyan en nuestra decisión. **En la práctica son frecuentes niveles de significación de 0.01, 0.05, 0.1**.

Interpretación: Si por ejemplo, tomamos un nivel de significación de 0.05 (o del 5%) al diseñar una regla de decisión, entonces existen unas 5 oportunidades entre 100 de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad esta es verdadera; es decir, tenemos un 95% de confianza de que hemos tomado la decisión correcta.

Pruebas de Hipótesis

Esquema para realizar una prueba de hipótesis. Etapas:

1) **Enunciado de la hipótesis nula y alternativa**: La hipótesis nula es la que se supone cierta. La hipótesis alternativa es la hipótesis que debe aceptarse en caso de rechazar la hipótesis nula. La hipótesis alternativa es la que se desea apoyar con base en la información contenida en la muestra.

2) **Selección del estadístico de prueba**: Para esto se debe considerar el parámetro poblacional utilizado en la definición de las hipótesis nula y alternativa y los datos del problema. El estadístico de prueba (como un estimador) es una función de la muestra en el cual se fundamenta la decisión estadística.

3) **Gráfico de la distribución del estadístico de prueba para la determinación de la región crítica** con el nivel de significación elegido y la búsqueda en tabla del valor crítico. La región de rechazo, especifica los valores del estadístico de la prueba para los cuales se rechaza la hipótesis nula.

Esquema para realizar una prueba de hipótesis. Etapas:

4) **Cálculo del valor observado a partir del estadístico**

5) **Comparación de valores**

6) **Exposición de las conclusiones**

Si se rechaza Ho:
- la evidencia muestral contradice H_0
- hay pruebas concluyentes contra H_0
- la prueba es significativa

Si no se rechaza Ho:
- la evidencia muestral no contradice H_0 (lo cual no prueba que sea verdadera).
- No hay evidencias contra H_0
- La prueba no es concluyente

Pruebas de Hipótesis

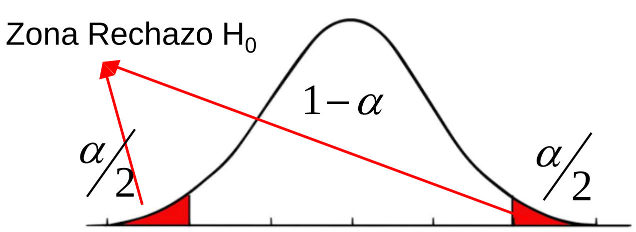
Dependiendo de la problemática a estudiar las distintas proposiciones que pueden surgir de la investigación, pueden ser contestadas probando:

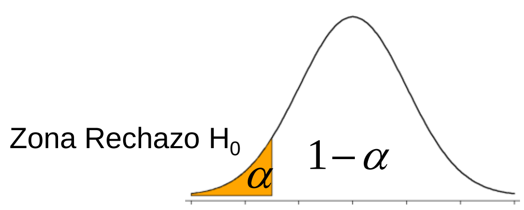
Establecer la hipótesis nula en términos de igualdad

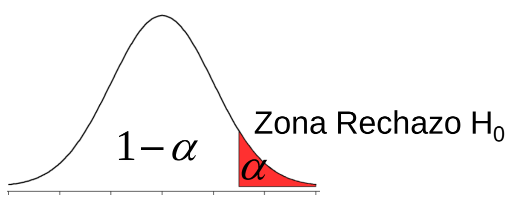
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_0 : \theta \leq \theta_0$

Establecer la hipótesis alternativa, que puede hacerse de tres maneras, dependiendo del interés del investigador

$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Bilateral	unilateral izquierda	unilateral derecha







Pruebas de Hipótesis

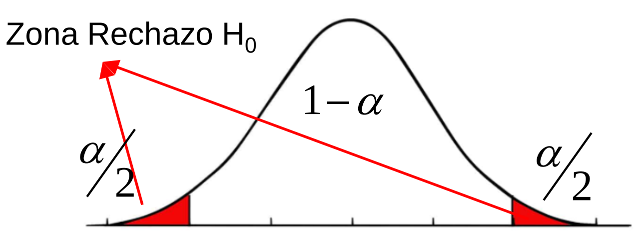
Dependiendo de la problemática a estudiar las distintas proposiciones que pueden surgir de la investigación, pueden ser contestadas probando:

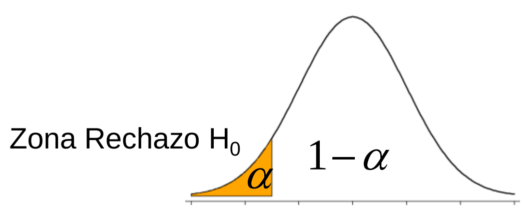
Establecer la hipótesis nula en términos de igualdad

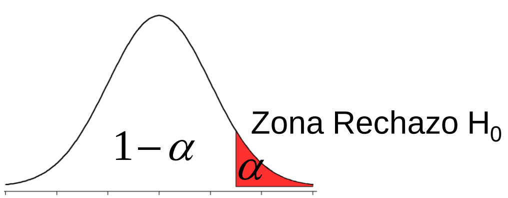
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_0 : \theta \leq \theta_0$

Establecer la hipótesis alternativa, que puede hacerse de tres maneras, dependiendo del interés del investigador

$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Bilateral	unilateral izquierda	unilateral derecha







Pruebas de Hipótesis

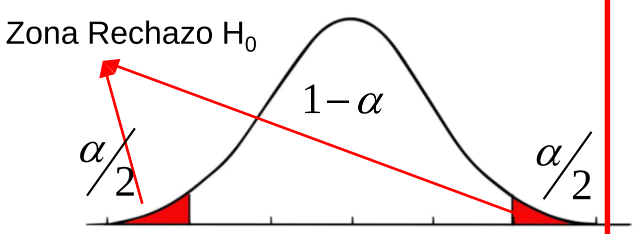
Dependiendo de la problemática a estudiar las distintas proposiciones que pueden surgir de la investigación, pueden ser contestadas probando:

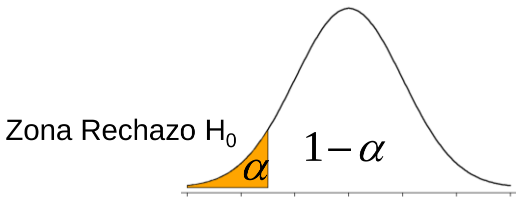
Establecer la hipótesis nula en términos de igualdad

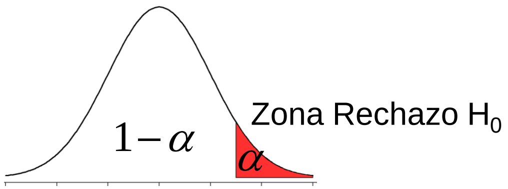
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_0 : \theta \leq \theta_0$

Establecer la hipótesis alternativa, que puede hacerse de tres maneras, dependiendo del interés del investigador

$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Bilateral	unilateral izquierda	unilateral derecha







Pruebas de Hipótesis

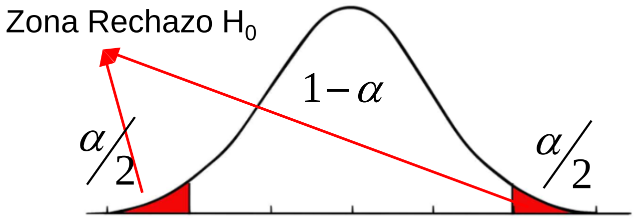
Dependiendo de la problemática a estudiar las distintas proposiciones que pueden surgir de la investigación, pueden ser contestadas probando:

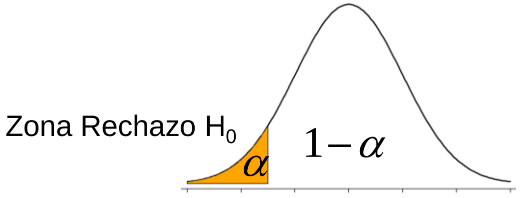
Establecer la hipótesis nula en términos de igualdad

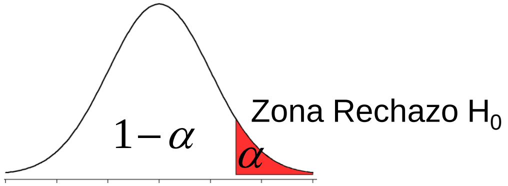
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_0 : \theta \leq \theta_0$

Establecer la hipótesis alternativa, que puede hacerse de tres maneras, dependiendo del interés del investigador

$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Bilateral	unilateral izquierda	unilateral derecha







Pruebas de Hipótesis

En la práctica son frecuentes niveles de significación de 0.01, 0.05, 0.1. Esta probabilidad se especifica antes de tomar la muestra de manera que los resultados no influyan en nuestra decisión.

Pruebas de hipótesis acerca de dos parámetros

a) **Prueba de hipótesis para la comparación de medias de dos distribuciones normales cuando ambas desviaciones estándares son conocidas.**

Otro problema que se presenta en el trabajo experimental es determinar si dos distribuciones de probabilidad tienen algunos parámetros que coinciden, sin especificar los valores comunes de estos parámetros. El ejemplo más sencillo de estas pruebas es establecer la igualdad de dos medias.

Pruebas de hipótesis acerca de dos parámetros

a) Prueba de hipótesis para la comparación de medias de dos distribuciones normales cuando ambas desviaciones estándares son conocidas.

Distribución de la diferencia entre dos medias muestrales

Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n_X}$ una muestra aleatoria de n_x v. a. independientes distribuidas normalmente, cada una con media $E(X_i) = \mu_X$ y $V(X_i) = \sigma_X^2$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n_X$ Sean $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n_Y}$ una muestra aleatoria de n_Y v. a. independientes distribuidas normalmente, cada una con media $E(Y_i) = \mu_Y$ y $V(Y_i) = \sigma_Y^2$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n_Y$. Sean también independientes todas las X e Y .

Sabemos que $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n_X}$ y $\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n_Y}$ **tienen la siguiente distribución:**

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n_X}\right) \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)$$

Estimación por Intervalos

Sabemos que la combinación lineal de v.a. normales es normal por lo tanto:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n_X}\right) \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)$$

$$\boxed{\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)}$$

Estimación por Intervalos

Sabemos que la combinación lineal de v.a. normales es normal por lo tanto:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y , \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} \right)$$

Estandarizando tenemos:

$$\boxed{Z = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \left(\mu_X - \mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1)}$$

Pruebas de Hipótesis

<u>**Ejemplo**</u>: Un diseñador quiere reducir el tiempo de secado de una pintura. Se prueban dos fórmulas de pintura. La fórmula 1 es la normal y la fórmula 2 posee un ingrediente secante que se espera reduzca el tiempo de secado. Se sabe que el tiempo de secado tiene una desviación estándar de 8 min y que ésta no se afecta con la adición del nuevo ingrediente. Se pintan 10 especímenes con la fórmula 1, y 10 con la fórmula 2, obteniéndose tiempos promedio de secado de $\overline{x_1} = 121 \min$, y $\overline{x_2} = 112 \min$ respectivamente. ¿A qué conclusión se llega sobre la eficacia del nuevo ingrediente utilizando $\alpha = 0.05$?

Ejemplo: Un diseñador quiere reducir el tiempo de secado de una pintura. Se prueban dos fórmulas de pintura. La fórmula 1 es la normal y la fórmula 2 posee un ingrediente secante que se espera reduzca el tiempo de secado. Se sabe que el tiempo de secado tiene una desviación estándar de 8 min y que ésta no se afecta con la adición del nuevo ingrediente. Se pintan 10 especímenes con la fórmula 1, y 10 con la fórmula 2, obteniéndose tiempos promedio de secado de $\overline{x_1} = 121\,\text{min}$, y $\overline{x_2} = 112\,\text{min}$ respectivamente. ¿A qué conclusión se llega sobre la eficacia del nuevo ingrediente utilizando $\alpha = 0.05$?

$$\overline{x_1} = 121\,\text{min} \qquad \overline{x_2} = 112\,\text{min} \qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 8^2 \qquad n_1 = n_2 = 10$$

$$\alpha = 0.05$$

a) **Pruebas de hipótesis para la comparación de medias poblacionales si se conocen las desviaciones estándar.**

1) **Enunciado de la hipótesis nula y alternativa**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \left(\begin{matrix} se\ busca\ evidencia\ fuerte\ que\ indique\ que\ el\ tiempo\ de \\ secado\ promedio\ de\ la\ muestra\ 2\ es\ menor \end{matrix} \right)$$

a) **Pruebas de hipótesis para la comparación de medias poblacionales si se conocen las desviaciones estándar.**

1) **Enunciado de la hipótesis nula y alternativa**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \left(\begin{array}{l} se\ busca\ evidencia\ fuerte\ que\ indique\ que\ el\ tiempo\ de \\ secado\ promedio\ de\ la\ muestra\ 2\ es\ menor \end{array} \right)$$

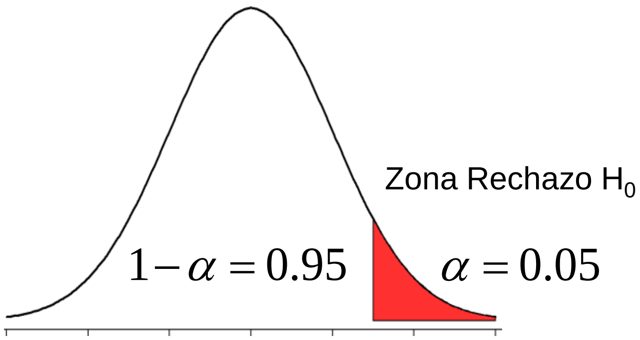
2) **Selección del estadístico de prueba:**

Cómo se conocen las desviaciones estándar el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\boxed{Z = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \left(\mu_X - \mu_Y\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_X} + \dfrac{\sigma^2}{n_Y}}} \sim N\left(0,1\right)}$$

a) **Pruebas de hipótesis para la comparación de medias poblacionales si se conocen las desviaciones estándar.**

3) **Gráfico de la distribución del estadístico de prueba para la determinación de la región crítica con el nivel de significación elegido. Determinar los valores críticos.**



$$Z_{crt} = Z_{\alpha} = 1.64$$

a) **Pruebas de hipótesis para la comparación de medias poblacionales si se conocen las desviaciones estándar.**

4) **Cálculo del valor observado a partir del estadístico**

$$z_{obs}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\overbrace{\left(\mu_X-\mu_Y\right)}^{0}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}=\frac{121-112}{\sqrt{\dfrac{64}{10}+\dfrac{64}{10}}}=\frac{9\sqrt{5}}{8}=2.52$$

a) **Pruebas de hipótesis para la comparación de medias poblacionales si se conocen las desviaciones estándar.**

4) **Cálculo del valor observado a partir del estadístico**

$$z_{obs}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\overbrace{\left(\mu_X-\mu_Y\right)}^{0}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}=\frac{121-112}{\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{64}{10}}}=\frac{9\sqrt{5}}{8}=2.52$$

5) **Comparación de valores**

Cómo $Z_{obs}>Z_{crt}=1.64$ se rechaza H_0

6) **Exposición de las conclusiones**

<u>**Conclusión**</u>: existe evidencia estadística de que la nueva fórmula disminuye el tiempo de secado.

b) **Prueba de hipótesis para la comparación de medias de dos distribuciones normales suponiendo que ambas desviaciones estándares son desconocidas pero iguales.**

Este es el mismo problema que el anterior, excepto que ahora se supone que las varianzas σ^2_X y σ^2_Y son desconocidas pero iguales, es decir $\sigma^2_X = \sigma^2_Y = \sigma^2$.

Se usa un estimador ***T*** que es una función de la diferencia entre las medias muestrales

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\left[(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2\right]}{n_X + n_Y - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t_{n_X + n_Y - 2}}$$

Que tiene un distribución t de Student con $n_X + n_Y - 2$ grados de libertad

b) **Prueba de hipótesis para la comparación de medias de dos distribuciones normales suponiendo que ambas desviaciones estándares son desconocidas pero iguales.**

Ejemplo: Dos máquinas de una fábrica producen piezas del mismo tipo. Se toman de cada máquina 15 piezas y se analiza la cantidad de plomo X que contienen que se supone una variable aleatoria normal. De los datos muestrales se obtuvieron los siguientes valores:

Máquina A	Máquina B
$\overline{X}_A = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15$	$\overline{X}_B = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$

¿Se puede mantener, con un nivel de confianza de 0,95, y suponiendo igualdad de varianzas, que las dos máquinas producen piezas con el mismo contenido medio de plomo?

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

¿Se puede mantener, con un nivel de confianza de 0,95, y suponiendo igualdad de varianzas, que las dos máquinas producen piezas con el mismo contenido medio de plomo?

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\left[(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2\right]}{n_X + n_Y - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

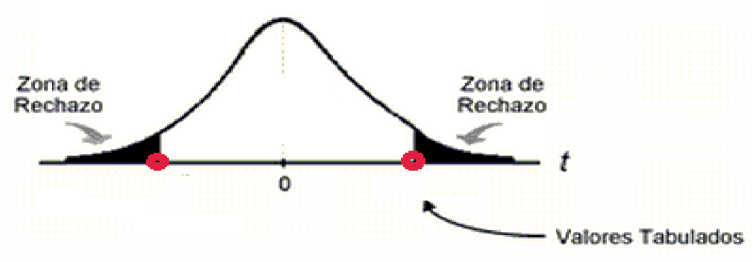
$$T_{obs} = \frac{4.676 - 5.301}{\sqrt{\frac{14 \times 0.878^2 + 14 \times 0.989^2}{28}} \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = -1.83$$

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases} \qquad \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$T_{obs} = \frac{4.676 - 5.301}{\sqrt{\frac{14 \times 0.878^2 + 14 \times 0.989^2}{28}} \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = -1.83$$



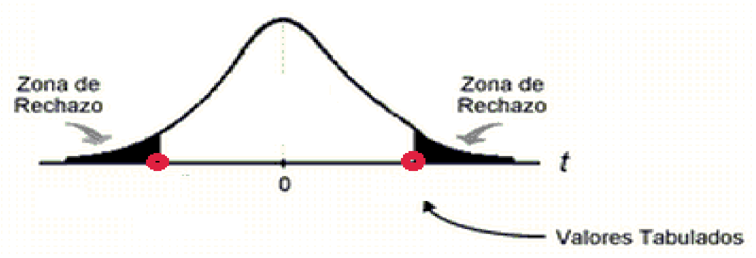
$$T_{crit\ izq} = -2.048 \quad T_{crit\ der} = 2.048$$

Pruebas de Hipótesis

$$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15 \qquad \overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases} \qquad \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$T_{obs} = \frac{4.676 - 5.301}{\sqrt{\frac{14 \times 0.878^2 + 14 \times 0.989^2}{28}} \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = -1.83$$



$$T_{crit\ izq} = -2.048 \quad T_{crit\ der} = 2.048$$

No se rechaza H_0. Se puede mantener que las dos máquinas producen piezas con el mismo contenido de plomo.

Contrastes para la diferencia entre dos medias: muestras grandes independientes con varianzas desconocidas conocida

Sea X una población con media μ_X y varianza σ^2_X , e Y otra población con media μ_Y y varianza σ^2_Y .

- Muestras aleatorias de n_X observaciones de X y n_Y observaciones de Y, independientes, y tanto n_X como n_Y son grandes y σ^2_X y σ^2_X son desconocidas:

El estadístico del contraste es:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \left(\mu_X - \mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \sim N\left(0,1\right)$$

Pruebas de Hipótesis

Nos resta ver qué sucede si las varianzas poblacionales no se pueden suponer iguales.

Nos resta ver qué sucede si las varianzas poblacionales no se pueden suponer iguales.

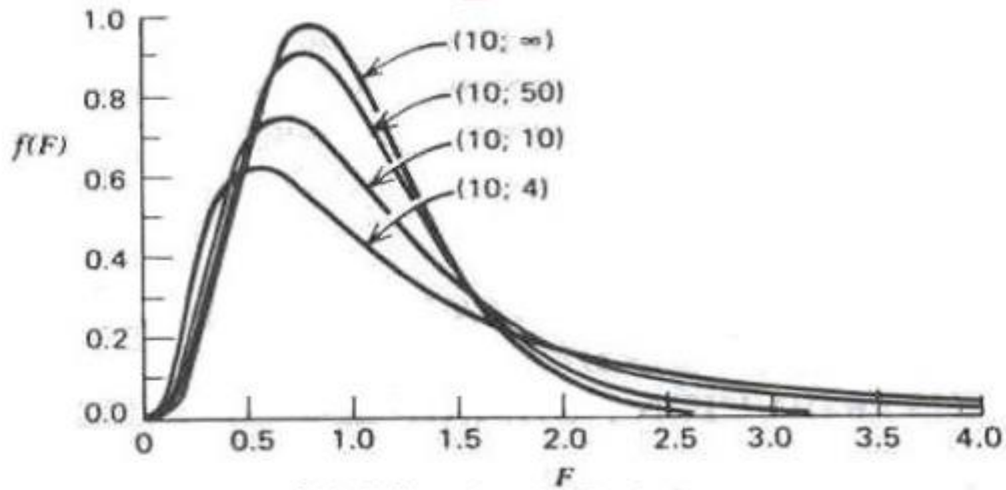
c) Prueba de hipótesis para la comparación de varianzas de dos distribuciones normales.

La distribución F de Fisher

Si χ_1^2 y χ_2^2 son v.a. independientes que tienen distribución ji-cuadrado, con n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, la variable aleatoria definida por:

$$F = \frac{\dfrac{\chi_1^2}{n_1}}{\dfrac{\chi_2^2}{n_2}}$$

Tiene una distribución F con n_1 y n_2 grados de libertad.



Distribución F para varios grados de libertad.

Distribución de la razón de dos varianzas muestrales

$$\frac{(n_X - 1) S_X^2}{\sigma_X^2} \sim {\chi^2}_{n_X - 1} \qquad \frac{(n_Y - 1) S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim {\chi^2}_{n_Y - 1}$$

Distribución de la razón de dos varianzas muestrales

$$\frac{(n_X - 1) S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{n_X - 1} \qquad \frac{(n_Y - 1) S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{n_Y - 1}$$

$$\frac{\left. \dfrac{(n_X - 1) S_X^2}{\sigma_X^2} \right/ (n_X - 1)}{\left. \dfrac{(n_Y - 1) S_Y^2}{\sigma_Y^2} \right/ (n_Y - 1)} =$$

Distribución de la razón de dos varianzas muestrales

$$\frac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{n_X - 1} \qquad \frac{(n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi_{n_Y - 1}$$

$$\frac{\left.\dfrac{(n_X - 1)S_X^2}{\sigma_X^2}\right/ (n_X - 1)}{\left.\dfrac{(n_Y - 1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}\right/ (n_Y - 1)} = \frac{S_X^2 / \sigma_X^2}{S_Y^2 / \sigma_Y^2} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$$

El procedimiento óptimo para probar la hipótesis $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ está basado en la variable aleatoria:

Pruebas de Hipótesis

El procedimiento óptimo para probar la hipótesis $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ está basado en la variable aleatoria:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{n_X - 1, n_Y - 1}$$

La cual tiene una distribución F de Fishe

Ejemplo: Se mide una magnitud física por dos métodos diferentes y se obtienen los siguientes resultados:

Método 1	$x_1 = 9.6$	$x_2 = 10.0$	$x_3 = 9.8$	$x_4 = 10.2$	$x_5 = 10.6$
Método 2	$y_1 = 10.4$	$y_2 = 9.7$	$y_3 = 10.0$	$y_4 = 10.3$	

Se puede afirmar que los dos métodos tienen igual precisión de mediciones, admitiendo un nivel de significación $\alpha = 0.02$ (se supone que los resultados de las mediciones se distribuyen normalmente).

Pruebas de Hipótesis

Ejemplo: Se mide una magnitud física por dos métodos diferentes y se obtienen los siguientes resultados:

Método 1	$x_1 = 9.6$	$x_2 = 10.0$	$x_3 = 9.8$	$x_4 = 10.2$	$x_5 = 10.6$
Método 2	$y_1 = 10.4$	$y_2 = 9.7$	$y_3 = 10.0$	$y_4 = 10.3$	

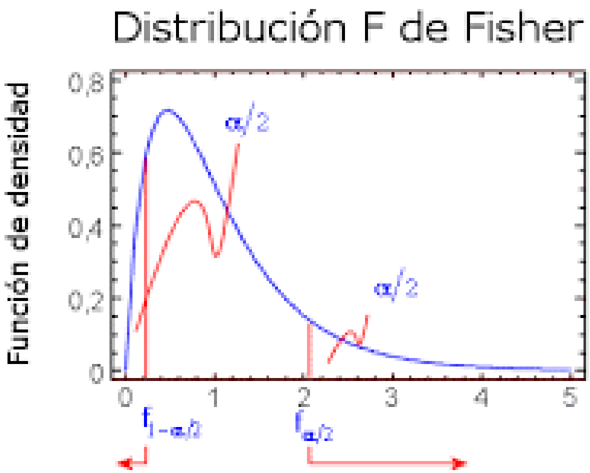
Se puede afirmar que los dos métodos tienen igual precisión de mediciones, admitiendo un nivel de significación $\alpha = 0.02$ (se supone que los resultados de las mediciones se distribuyen normalmente).

$$n_1 = 5, n_2 = 4\ , \quad \alpha = 0.02 \qquad S_1^2 = 0{,}148 \qquad S_2^2 = 0{,}1$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1 \end{cases}$$

Pruebas de Hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2 = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2 \neq 1 \end{cases}$$



$$F_{obs} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.148}{0.1} = 1.48$$

$$F_{\left(n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(4,3;0,01)} = 28,71$$

$$F_{\left(n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{F_{(3,4;0,01)}} = \frac{1}{16,69} = 0,0599$$

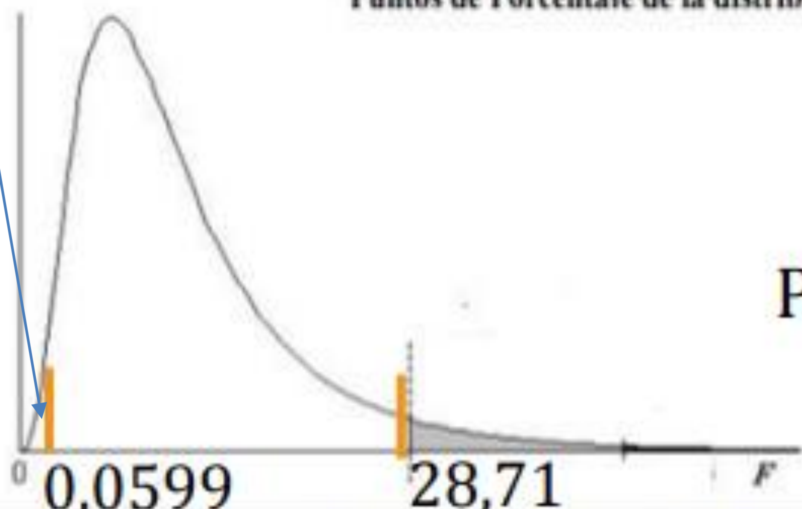
$$n_1 = 5, n_2 = 4 \,, \quad \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$$

Conclusión: Las varianzas son iguales.

$$F_{\left(n_x-1,n_y-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{F_{\left(n_y-1,n_x-1;0,01\right)}}$$

DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Puntos de Porcentaie de la distribución F



$P(F>0{,}0599)=0{,}99$

$P(F>28{,}71)=0{,}01$

5 % (normal) y 1 % (negrillas) puntos para la distribución de F

n_2	n1 grados delibertad (para el mayor cuadrado medio)																								n_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
1	161	199	216	[illegible]	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254	1
	4052	**4999**	[illegible]	[illegible]	**5764**	**5859**	**5928**	**5981**	**6022**	**6056**	**6083**	**6107**	**6143**	**6170**	**6209**	**6234**	**6260**	**6286**	**6302**	**6324**	**6334**	**6350**	**6360**	**6366**	
2	18.51	19.00	[illegible]	[illegible]	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49	19.50	2
	98.50	**99.00**	[illegible]	[illegible]	**99.30**	**99.33**	**99.36**	**99.38**	**99.39**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**	
3	10.13	9.55	[illegible]	[illegible]	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.56	8.55	8.54	8.53	8.53	3
	34.12	**30.82**	[illegible]	**28.71**	[illegible]	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.28**	**26.24**	**26.18**	**26.15**	**26.13**	
4	7.71	6.94	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63	4
	[illegible]	[illegible]	**16.69**	[illegible]	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.55**	**14.45**	**14.37**	**14.25**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.84**	**13.75**	**13.69**	**13.61**	**13.58**	**13.52**	**13.49**	**13.46**	
5	6.61	[illegible]	[illegible]	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.41	4.39	4.37	4.37	5

Nos resta ver qué sucede si las varianzas poblacionales no se pueden suponer iguales.

Ejemplo: Dos máquinas de una fábrica producen piezas del mismo tipo. Se toman de cada máquina 15 piezas y se analiza la cantidad de plomo X que contienen que se supone una variable aleatoria normal. De los datos muestrales se obtuvieron los siguientes valores:

Máquina A	Máquina B
$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15$	$\overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$

¿Se puede mantener, con un nivel de confianza de 0,95, y suponiendo igualdad de varianzas, que las dos máquinas producen piezas con el mismo contenido medio de plomo?

Pruebas de Hipótesis

Nos resta ver qué sucede si las varianzas poblacionales no se pueden suponer iguales.

Ejemplo: Dos máquinas de una fábrica producen piezas del mismo tipo. Se toman de cada máquina 15 piezas y se analiza la cantidad de plomo X que contienen que se supone una variable aleatoria normal. De los datos muestrales se obtuvieron los siguientes valores:

Máquina A	Máquina B
$\overline{X_A} = 4.676 \quad S_A = 0.878 \quad n_A = 15$	$\overline{X_B} = 5.301 \quad S_B = 0.989 \quad n_B = 15$

¿Se puede mantener, con un nivel de confianza de 0,95, y suponiendo igualdad de varianzas, que las dos máquinas producen piezas con el mismo contenido medio de plomo?

Veamos si es correcto el supuesto que hicimos, sobre la igualdad de varianzas, en el ejemplo anterior sobre las dos máquinas que producen piezas del mismo tipo.

Pruebas de Hipótesis

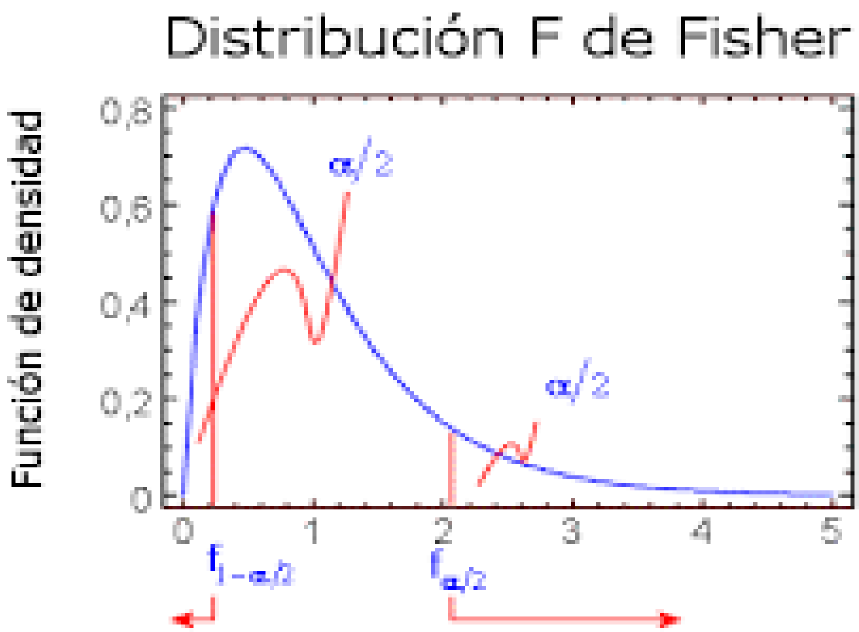
Veamos si es correcto el supuesto que hicimos, sobre la igualdad de varianzas, en el ejemplo anterior sobre las dos máquinas que producen piezas del mismo tipo.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1 \end{cases}$$

Pruebas de Hipótesis

Veamos si es correcto el supuesto que hicimos, sobre la igualdad de varianzas, en el ejemplo anterior sobre las dos máquinas que producen piezas del mismo tipo.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1 \end{cases}$$



$$F_{obs} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.878}{0.989} = 0.887$$

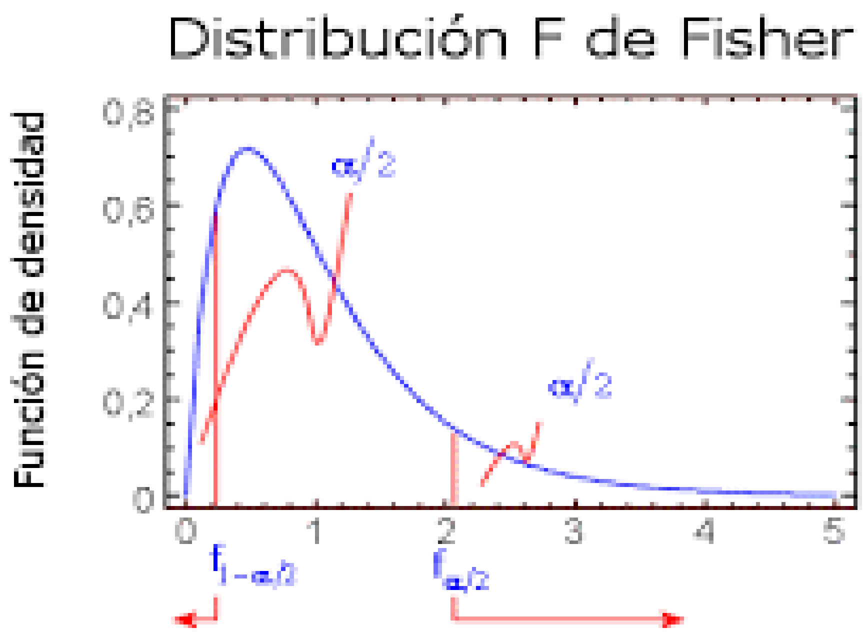
$$F_{\left(n_A-1, n_B-1; \frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(14,14;0,025)} = 2,95$$

$$F_{\left(n_A-1, n_B-1, 1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{F_{(14,14;0,025)}} = \frac{1}{2,95} = 0,338$$

$n_A = 15, n_B = 15$, $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

Pruebas de Hipótesis

$$0.338 < F_{obs} = 0.887 < 2.95$$



No se rechaza $\mathbf{H_0}$ la hipótesis nula. No hay evidencia suficiente para suponer que las varianzas no son iguales. **(en el ejemplo anterior sobre las dos máquinas que producen piezas del mismo tipo).**

Pruebas de Hipótesis

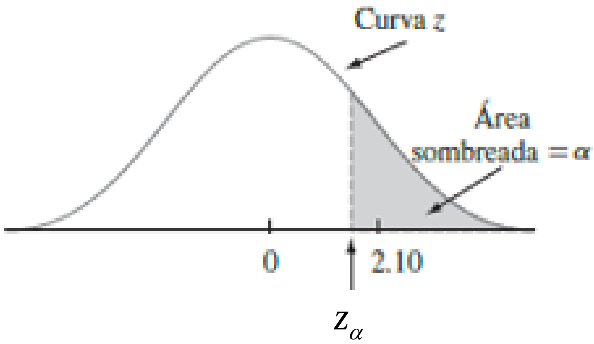
En la práctica son frecuentes niveles de significación de 0.01, 0.05, 0.1. Esta probabilidad se especifica antes de tomar la muestra de manera que los resultados no influyan en nuestra decisión.

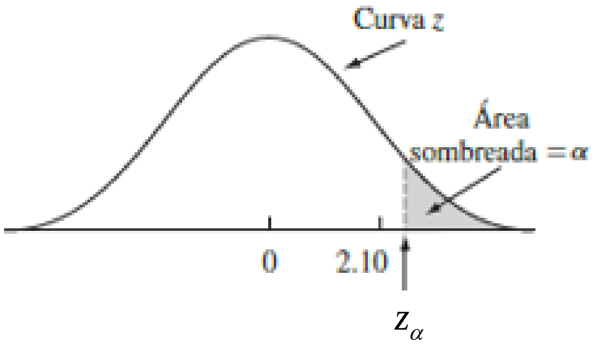
Dado que el nivel de significación es seleccionado por el investigador— algunos seleccionarán 0.05, otros 0.01 y así sucesivamente— puede darse el caso que algunos investigadores rechacen $\mathbf{H_0}$ en tanto que otros concluyan que los datos no muestran una contradicción suficientemente fuerte en contra de $\mathbf{H_0}$ para justificar su rechazo.

Supongamos que tenemos que trabajar sobre las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$\boxed{z = z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.10}$$

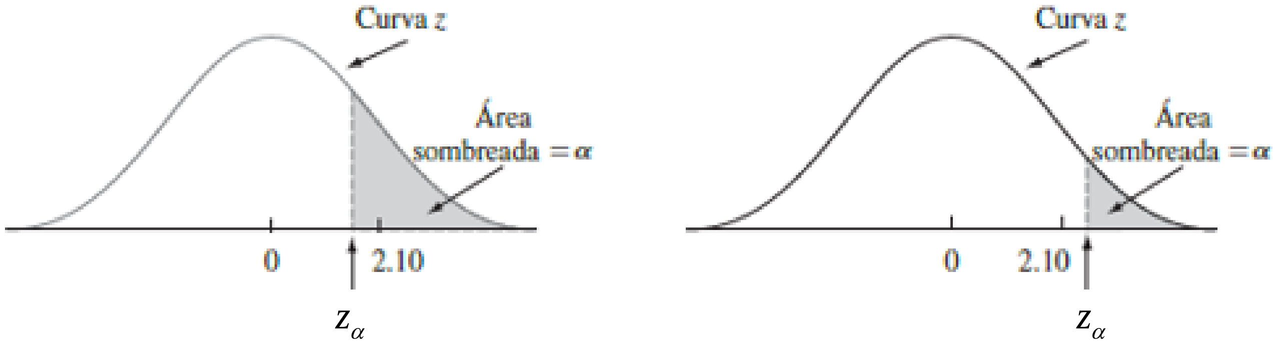




Nivel de significación α	Región de rechazo	Conclusión
0.05	$z \geq 1.645$	Rechazar H_0
0.025	$z \geq 1.96$	Rechazar H_0
0.01	$z \geq 2.33$	No rechazar H_0
0.005	$z \geq 2.58$	No rechazar H_0

Pruebas de Hipótesis

Con un nivel de significación **α** relativamente grande, el valor crítico $\boldsymbol{z_\alpha}$ se aleja de la cola superior y el valor 2.10 lo excede por lo tanto $\mathbf{H_0}$ es rechazada. Sin embargo, a medida que **α** disminuye, el valor crítico se incrementa y 2.10 es menor que $\boldsymbol{z_\alpha}$ y $\mathbf{H_0}$ no es rechazada.



Nivel de significación α	Región de rechazo	Conclusión
0.05	$z \geq 1.645$	Rechazar H_0
0.025	$z \geq 1.96$	Rechazar H_0
0.01	$z \geq 2.33$	No rechazar H_0
0.005	$z \geq 2.58$	No rechazar H_0

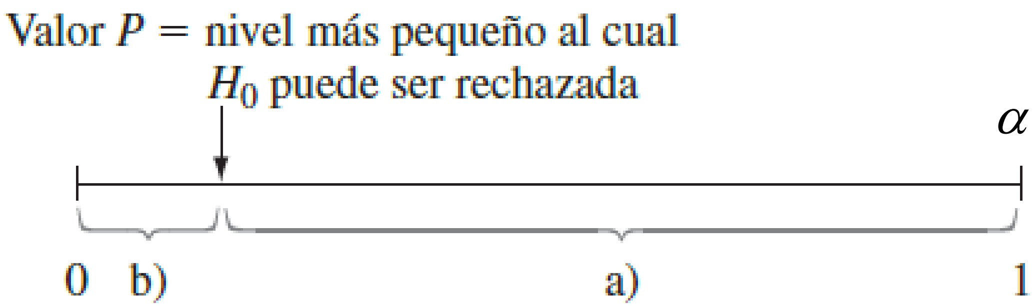
Pruebas de Hipótesis

_p_-valor.

El ***p-valor*** es el menor nivel de significación con el cual podemos rechazar la hipótesis nula H_0 .

Una vez que se ha determinado el ***p*-valor**, la conclusión a un nivel particular α resulta de comparar el ***p*-valor** con α:

1. p-valor $\leq \alpha$ entonces se rechaza H_0 al nivel α.
2. p-valor $> \alpha$ no rechazar H_0 al nivel α



a) Rechazo H_0

b) No se Rechazo H_0

Cuanto más próximo es el *p*-valor a 1 existe mayor confianza al no rechazar la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$. Cuanto más próximo es el *p*-valor a 0 existe mayor confianza al rechazar la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$.

Pruebas de Hipótesis

p-valor.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Los dueños de una fábrica afirman que el diámetro promedio de discos de metal de su marca, en mm, se distribuye normalmente con una media de 50 mm y una dispersión de 5 mm. Para comprobar la medida de estos diámetros, el comprador toma una muestra aleatoria de 20 discos. Sus diámetros dieron un promedio de 48 mm.

- De acuerdo a la información dada ¿Es un valor frecuente, un promedio de a lo sumo 48 mm?

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Pruebas de Hipótesis

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

De acuerdo a la información dada ¿Es un valor frecuente, un promedio de a lo sumo 48 mm?

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

De acuerdo a la información dada ¿Es un valor frecuente, un promedio de a lo sumo 48 mm?

$$P\left(\overline{X} < 48\right) =$$

p-valor.

$$n = 20, \quad \overline{X} = 48$$

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

De acuerdo a la información dada ¿Es un valor frecuente, un promedio de a lo sumo 48 mm?

$$P\left(\overline{X} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48 - 50}{5 / \sqrt{20}}\right) = \Phi(-1,78) = 0.0375 = p - valor$$

Pruebas de Hipótesis

p-valor.

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\overline{X} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48-50}{5/\sqrt{20}}\right) = \Phi(-1{,}78) = 0.0375 = p - valor$$

Plantemos además las siguientes hipótesis con un nivel de significación de 0.05:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50\ mm \\ H_1 : \mu < 50\ mm \end{cases}$$

$$z_{obs} = \frac{48-50}{5/\sqrt{20}} = -1.78 \qquad z_\alpha = -1.64$$

$$z_{obs} < z_\alpha$$

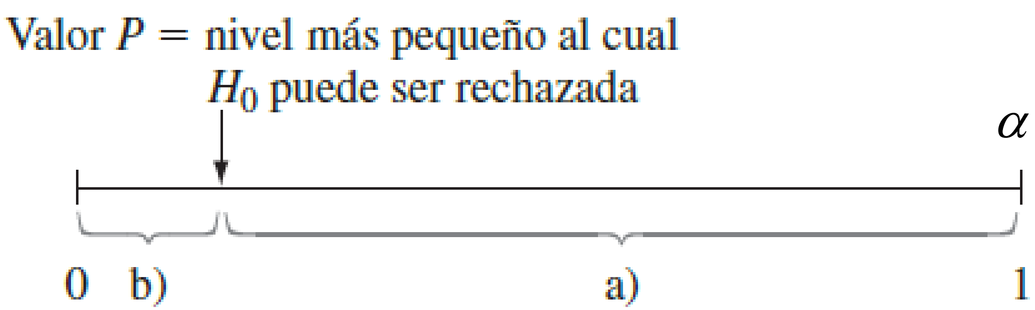
Pruebas de Hipótesis

p-valor.

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\overline{X} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48-50}{5/\sqrt{20}}\right) = \Phi(-1,78) = 0.0375 = p - valor$$



a) Rechazo H_0

b) No se Rechazo H_0

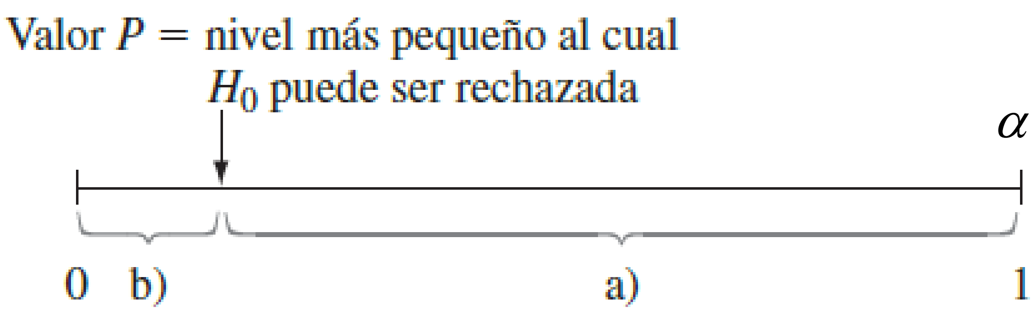
Pruebas de Hipótesis

p-valor.

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\overline{X} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48-50}{5/\sqrt{20}}\right) = \Phi(-1,78) = 0.0375 = p - valor$$



a) Rechazo H_0

b) No se Rechazo H_0

$\alpha = 0.05$ $\quad \alpha = 0.05 > 0.0375 = p - valor$ Se rechaza H0 con un nivel de significación de 0.05

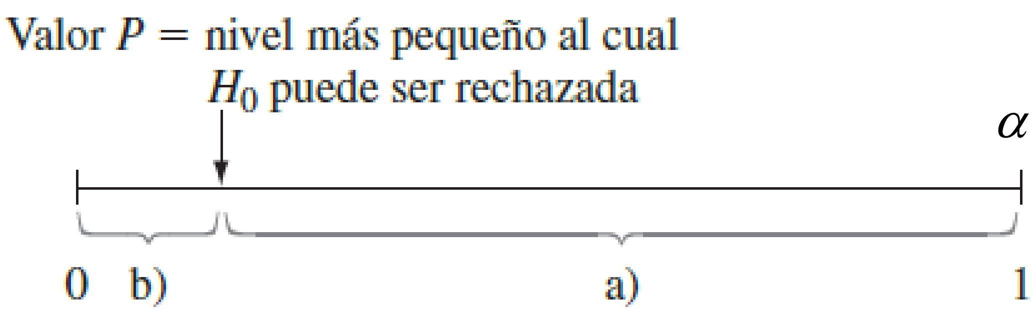
Pruebas de Hipótesis

p-valor.

Cómo se conoce σ el estadístico de prueba que se utiliza es:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\overline{X} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48-50}{5/\sqrt{20}}\right) = \Phi(-1,78) = 0.0375 = p - valor$$



a) Rechazo H_0

b) No se Rechazo H_0

$\alpha = 0.02$ $\quad \alpha = 0.02 < 0.0375 = p - valor$ No se rechaza H0 con un nivel de significación de 0.02