Variable Aleatoria

Dr. Pastore, Juan Ignacio

Variable Aleatoria Discreta
Repaso.

Definición de variable aleatoria (v.a.).

Definición: Dada un experimento ε y su espacio muestral asociado Ω, una variable aleatoria *X* se define como una función que asigna a cada elemento *w* del espacio muestral un número real.

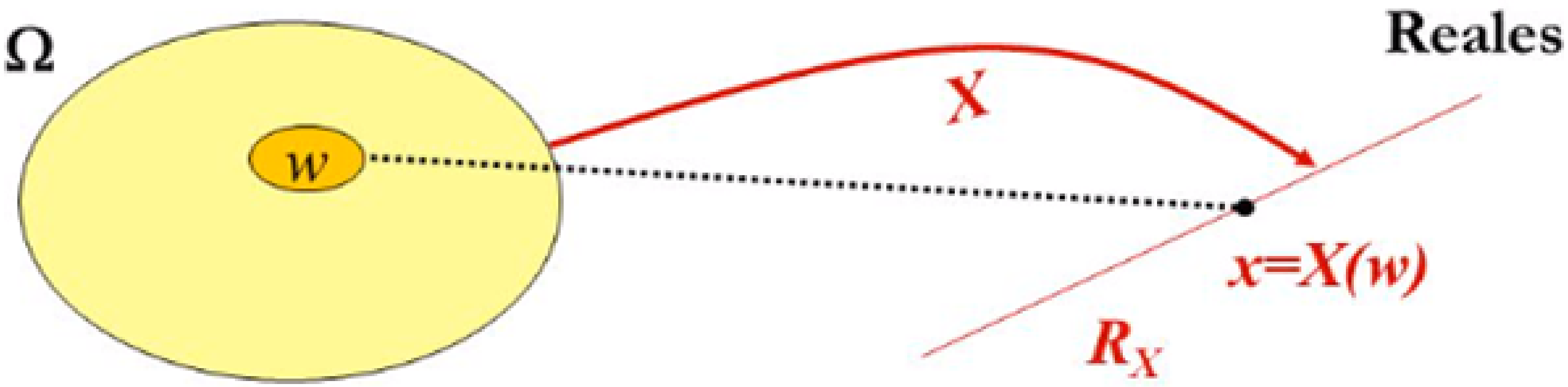


Fig. Representación gráfica de una v.a

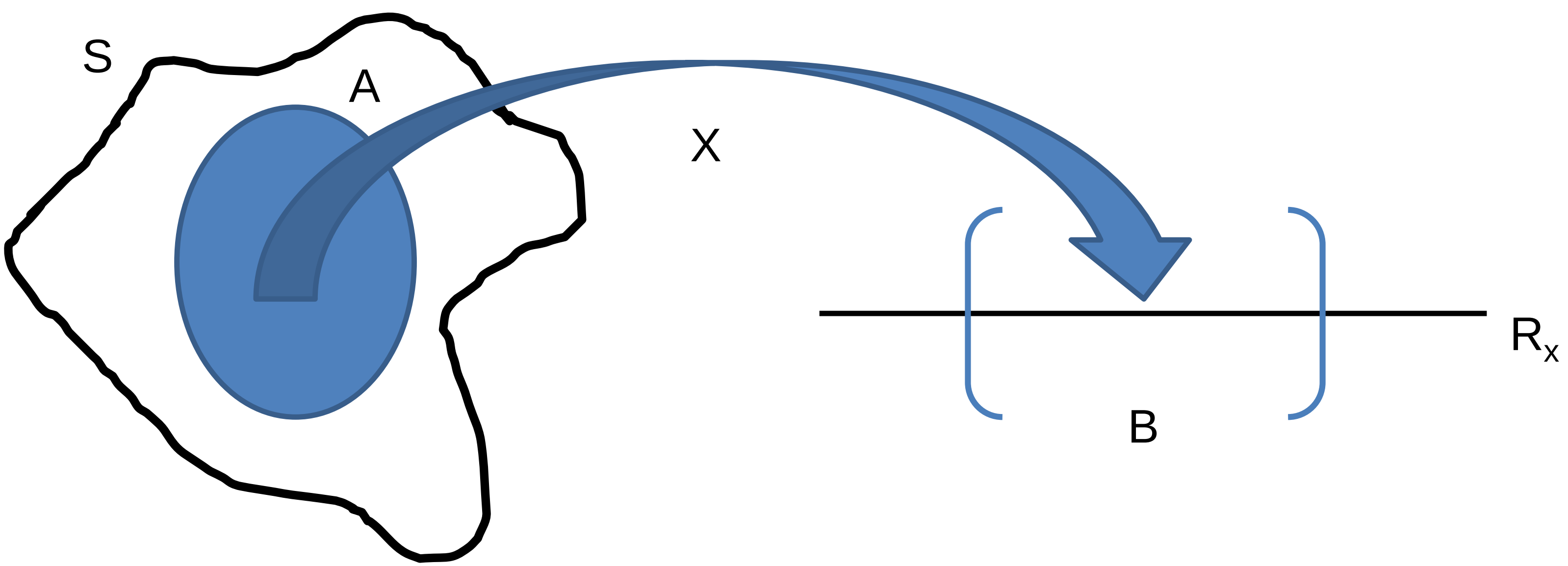
Ω : espacio muestral asociado a un experimento. R_X : valores posibles de X (recorrido de la v.a).

Definición de variable aleatoria (v.a.).

¿Cómo podemos calcular la probabilidad de eventos asociados a R_X**?** Para esto daremos la definición de **<u>eventos equivalentes</u>**.

<u>Definición</u>: Sea ε un experimento y S el espacio muestral asociado al experimento. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_X su recorrido.

$A \subset S$ y $B \subset R_X$ son eventos equivalentes si $A = \{s \in S : X(s) \in B\}$



Definición de variable aleatoria (v.a.).

¿Cómo podemos calcular la probabilidad de eventos asociados a R_X**?** Para esto daremos la definición de **eventos equivalentes**.

Definición: Sea B un evento en el recorrido R_X, entonces definimos $P(B)$ como sigue.

$P(B) = P(A)$, donde y $A \subset S$ es un evento equivalente a B, $A = \{s \in S : X(s) \in B\}$

Variables aleatorias discretas

Definición: Se dice que X es una $\boxed{\textbf{variable aleatoria discreta (v.a.d)}}$ si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que:

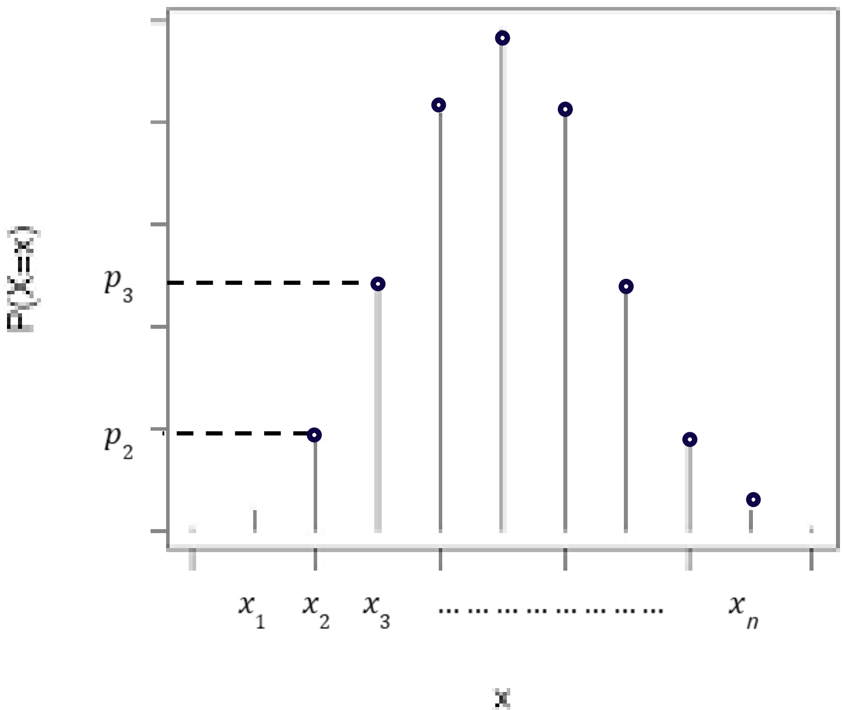
$$P(x_i) = P(X = x_i) = P\left(\{s \in S : \mathrm{X}(s) = x_i\}\right)$$

a) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$

b) $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$

La función así definida se llama ***función de probabilidad*** de la v. a. X. El conjunto de pares ordenados $(x_i, P(x_i))$ se llama ***distribución de probabilidades*** de la v. a. X.

Variable aleatoria discreta



Distribución de probabilidades de la v.a discreta X

X	$p_i = p(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como**:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como**:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \left\{ \overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D} \right\} \qquad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como**:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \left\{ \overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D} \right\} \qquad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como**:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \left\{ \overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D} \right\} \qquad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como**:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

$$S = \left\{ \overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D} \right\} \qquad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.d. definida como:

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una claculadora no defectuosa.

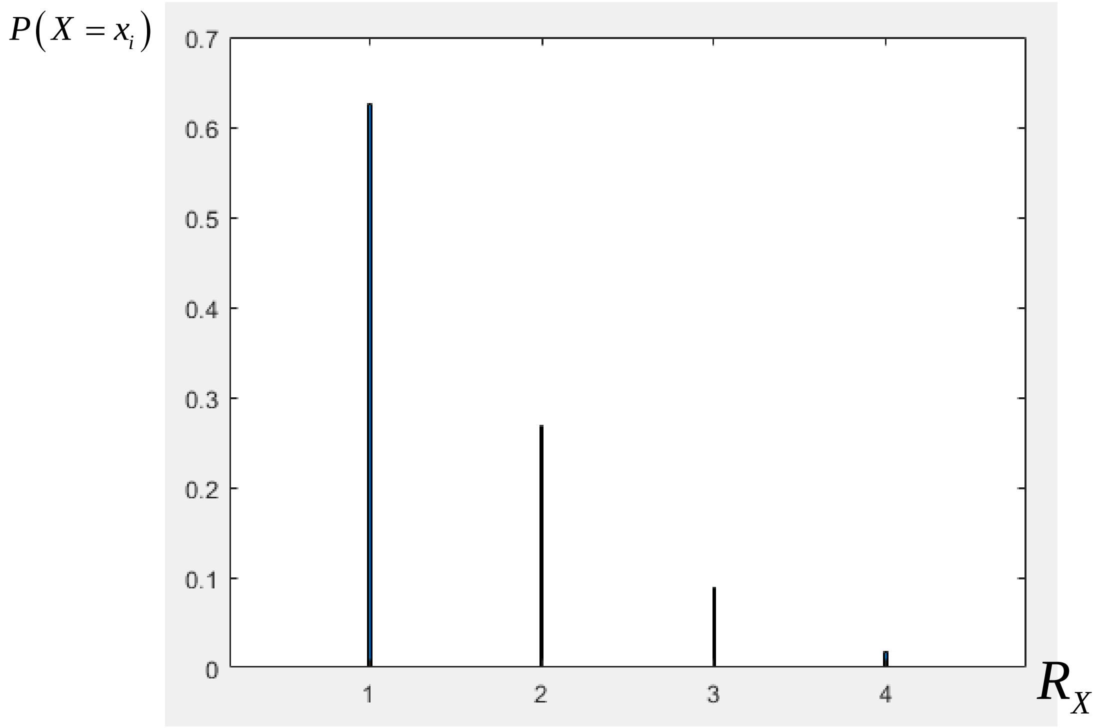
$$S = \left\{\overline{D}, D\overline{D}, DD\overline{D}, DDD\overline{D}\right\} \qquad R_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. **Hallar la distribución de probabilidades de la v.a**.

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$5/8$
2	$3/8\ 5/7 = 15/56$
3	$3/8\ 2/7\ 5/6 = 5/56$
4	$3/8\ 2/7\ 1/6\ 1 = 1/56$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$



Variable aleatoria discreta

Función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta **FDA**

Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), la función de distribución acumulada se define como: $F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j) / x \in R_X$ (la suma se toma sobre todos los índices j tal que $x_j \leq x$)

Propiedades de la FDA

1- F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

2- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Variable aleatoria discreta

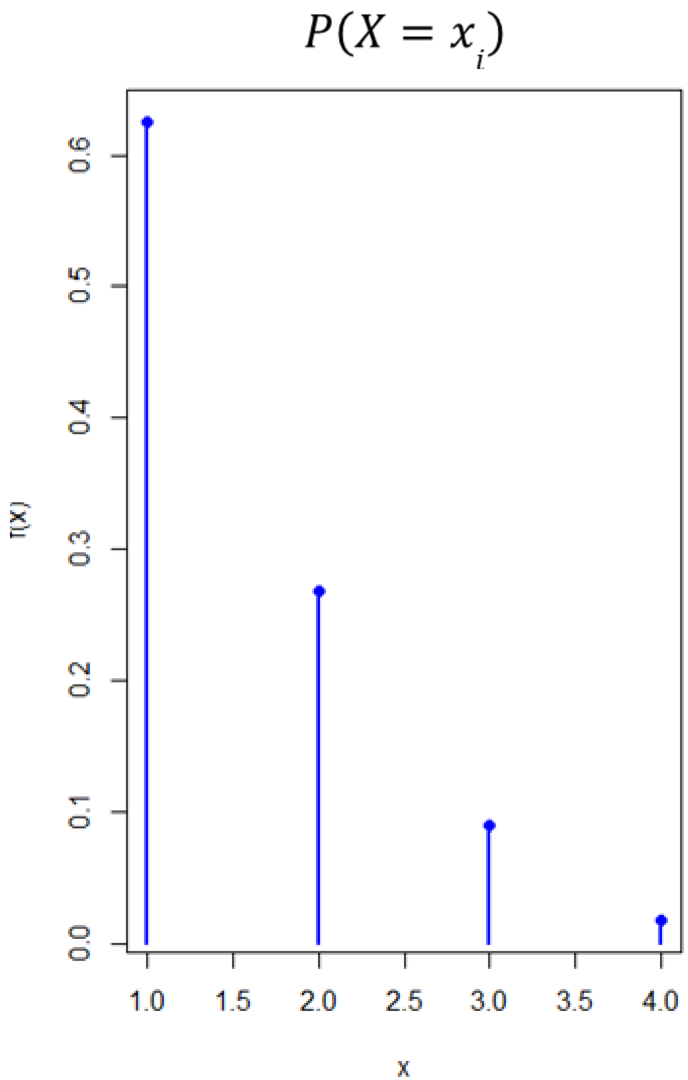
Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.

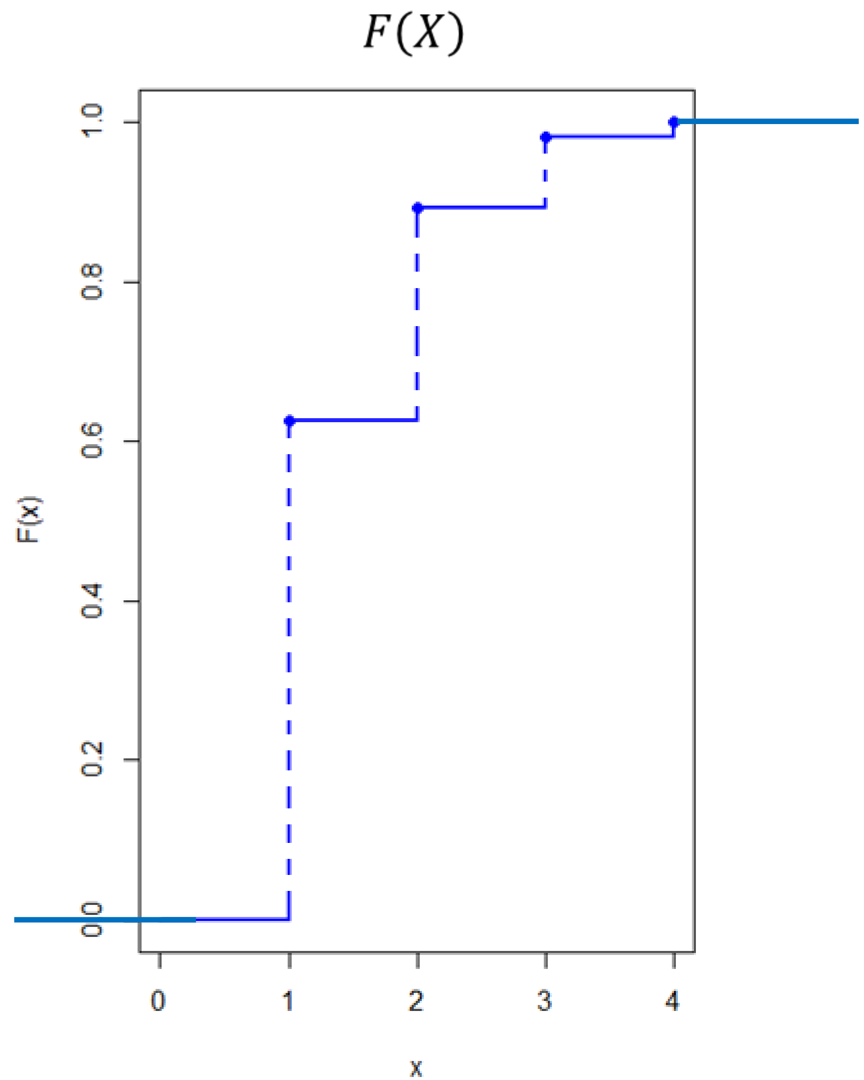
X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{5}{8}$
2	$\frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
3	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
4	$\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}1 = \frac{1}{56}$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{5}{8} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{50}{56} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{55}{56} & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Variable aleatoria discreta





Características numéricas de una variable aleatoria discreta

<u>Características numéricas de las variables aleatorias</u>:

Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

<u>Momentos</u>: El momento k-ésimo para una variable aleatoria discreta respecto al origen se define como:

$$E\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^k\, p\left(x_i\right)$$

<u>Definición</u>: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidades $\left(x_i, P\left(x_i\right)\right)$ para $i=1,2,\ldots$. Se llama valor esperado de X o esperanza matemática de X a:

$$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p\left(x_i\right)$$

$E\left(X\right)$ existe si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p\left(x_i\right)$ converge en valor absoluto, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\, p\left(x_i\right)\right| < \infty$.

A este número también se lo llama valor promedio de X.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$5/8$
2	$3/8\ 5/7 = 15/56$
3	$3/8\ 2/7\ 5/6 = 5/56$
4	$3/8\ 2/7\ 1/6\ 1 = 1/56$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i \times P(X = x_i) = 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{5}{56} + 4 \times \frac{1}{56} = 1{,}5$$

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$5/8$
2	$3/8 \; 5/7 = 15/56$
3	$3/8 \; 2/7 \; 5/6 = 5/56$
4	$3/8 \; 2/7 \; 1/6 \; 1 = 1/56$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i \times P(X = x_i) = 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{5}{56} + 4 \times \frac{1}{56} = 1{,}5$$

Interpretación: ????.

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X=x_i)$
1	$5/8$
2	$3/8 \, 5/7 = 15/56$
3	$3/8 \, 2/7 \, 5/6 = 5/56$
4	$3/8 \, 2/7 \, 1/6 \, 1 = 1/56$
	$\sum_i P(X=x_i)=1$

$$E(X)=\sum_{x_i \in R_X} x_i \times P(X=x_i) = 1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{5}{56}+4\times\frac{1}{56}=1{,}5$$

<u>**Interpretación**</u>: se espera que el número de extracciones necesarias hasta obtener una calculadora no defectuosa esté entre 1 y 2 extracciones.

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Propiedades del valor esperado de una v.a.d:

1) Si $X = cte$ entonces $E(X) = c$
2) $E(cX) = cE(X)$ para toda constante *c*.
3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (X e Y v.a.)
4) $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$
5) $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X e Y son v.a. independientes.
6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX+b) = aE(X) + b$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

a) Si X es una v.a.d

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$

Características numéricas de una variable aleatoria discreta

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

Dem/

$$V(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=E\left[X^2-2XE(X)+\left(E(X)\right)^2\right]=$$

$$=E\left(X^2\right)-2E(X)E\left(\underbrace{E(X)}_{cte}\right)+E\left(\underbrace{\left(E(X)\right)^2}_{cte}\right)=E\left(X^2\right)-2\left[E(X)\right]^2+\left[E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

Propiedades de la Varianza:

1) Si $X=cte$ entonces $V(X)=0$
2) $V(X+c)=V(X)$ para toda constante *c*.
3) $V(cX)=c^2V(X)$ para toda constante *c*.
4) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)
5) $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)

Variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un lote de 8 calculadoras contiene 3 defectuosas. Consideremos el siguiente experimento: Se selecciona una calculadora al azar y se la prueba, repitiéndose la operación hasta obtener una calculadora no defectuosa. Hallar la distribución de probabilidades de la v.a.

X: número de extracciones que se realizan hasta obtener una calculadora no defectuosa.

x_i	$P(X = x_i)$
1	$5/8$
2	$3/8\ 5/7 = 15/56$
3	$3/8\ 2/7\ 5/6 = 5/56$
4	$3/8\ 2/7\ 1/6\ 1 = 1/56$
	$\sum_i P(X = x_i) = 1$

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i \times P(X = x_i) = 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{5}{56} + 4 \times \frac{1}{56} = 1{,}5$$

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 \times P(X = x_i) = 1^2 \times \frac{5}{8} + 2^2 \times \frac{15}{56} + 3^2 \times \frac{5}{56} + 4^2 \times \frac{1}{56} = 2.7857$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2.7857 - (1{,}5)^2 = 0.5357}$$

Algunas distribuciones teóricas	
Discretas	
Bernoulli: Asociado a un experimento dicotómico. **Binomial**: como una suma de variables aleatorias con distribución Bernoull, independientes. **Hipergeométrica**: **Poisson**: número de éxitos por unidad de medida.	

Distribución de Bernoulli.

Experimento Bernoulli: es dicotómico, sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Su espacio muestral asociado puede definirse como: $S = \{éxito,\ fracaso\}$. Podemos definir una v.a. $X : S \to \{0,1\}$ tal que $X(éxito) = 1$ y $X(fracaso) = 0$.

Si la probabilidad de éxito es p $(0 < p < 1)$ y la probabilidad de fracaso es $(1-p)$ podemos construir la siguiente "distribución de probabilidades":

Características Numéricas de la distribución de Bernoulli:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p \times (1-p)$$

x_i	$p(x_i)$
0	$(1-p)$
1	p
	$(1-p) + p = 1$

La anterior distribución de probabilidades se denomina distribución de Bernoulli.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Distribución de Bernoulli.

Experimento Bernoulli: es dicotómico, sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Su espacio muestral asociado puede definirse como: $S = \{éxito,\ fracaso\}$. Podemos definir una v.a. $X : S \to \{0,1\}$ tal que $X(éxito) = 1$ y $X(fracaso) = 0$.

Si la probabilidad de éxito es p $(0 < p < 1)$ y la probabilidad de fracaso es $(1-p)$ podemos construir la siguiente "distribución de probabilidades":

x_i	$p(x_i)$
0	$(1-p)$
1	p
	$(1-p)+p=1$

$$FDA$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ (1-p) & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

La anterior distribución de probabilidades se denomina distribución de Bernoulli.

Distribución Binomial

Una variable aleatoria Binomial puede considerarse como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes, esto es, “una v. a. Binomial aparece cuando estamos interesados en el número de veces que un suceso A acurre (éxito) en n pruebas independientes de un experimento de tipo Bernoulli” ε.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Formalmente:

Definición: X es una variable aleatoria con distribución Binomial, $X \sim B(n,p)$ si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$$

donde $0<p<1$ (p constante) y n es un número entero positivo.

Características:

- Mide el número de éxitos en una secuencia de *n* ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija *p* de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Para usar el modelo se requiere que haya:

a) N repeticiones independientes.

b) el resultado de cada prueba es dicotómica.

c) $P(A)=p$, $0<p<1$ constante, en las n pruebas independientes.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Veamos que P así definida es una legítima distribución de probabilidades.

a) $P(X=k)\geq 0 \quad k=1,2\ldots,n$ por definición.

b) $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$, se prueba fácilmente a partir del teorema del binomio de Newton

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Veamos que P así definida es una legítima distribución de probabilidades.

a) $P(X=k)\geq 0 \quad k=1,2\ldots,n$ por definición.

b) $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$, se prueba fácilmente a partir del teorema del binomio de Newton

$$(x+y)^{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k} \quad .$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Veamos que P así definida es una legítima distribución de probabilidades.

a) $P(X=k)\geq 0 \quad k=1,2\ldots,n$ por definición.

b) $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$, se prueba fácilmente a partir del teorema del binomio de Newton

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \quad .$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1^n=1$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Esperanza y varianza de matemática de la distribución binomial: consideremos a X como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes cada una con $E(X_i) = p$ y varianza $V(X_i) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

$$\underline{E(X)} = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = \underline{np}$$

$$\underline{V(X)} = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = \underline{n \times p \times (1-p)}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Esperanza y varianza de matemática de la distribución binomial: consideremos a X como una suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes cada una con $E(X_i) = p$ y varianza $V(X_i) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = n \times p \times (1-p)$$

$$\boxed{X \sim B(n, p) \quad \Rightarrow \quad E(X) = n \times p \quad ; \quad V(X) = n \times p \times (1-p)}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

X=número de muestras de aire que contiene una molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

X=número de muestras de aire que contiene una molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas.

$$X \sim B(18, 0.1)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

X=número de muestras de aire que contiene una molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas.

$$X \sim B(18, 0.1)$$

$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0.1)^2(1-0.1)^{18-2}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

X=número de muestras de aire que contiene una molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas.

$$X \sim B(18, 0.1)$$

$$P(X=2) = \binom{18}{2}(0.1)^2(1-0.1)^{18-2}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X} < 2) = 1 - (P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1))$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

<u>Ejemplo</u>: Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras:

a) exactamente 2 contengan la molécula rara.
b) Al menos 2 contengan la molécula rara.
c) Entre 3 y 5 (ambos valores inclusive) muestras contengan la molécula rara.

X=número de muestras de aire que contiene una molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas.

$$X \sim B(18, 0.1)$$

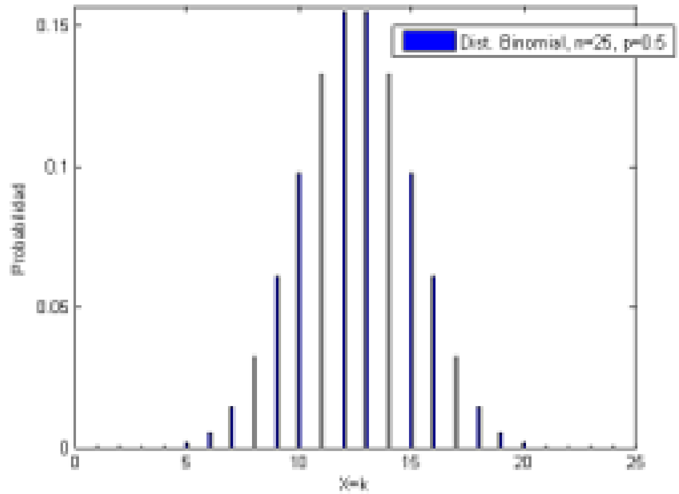
$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0.1)^2(1-0.1)^{18-2}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X} < 2) = 1 - (P(\mathrm{X} = 0) + P(\mathrm{X} = 1))$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

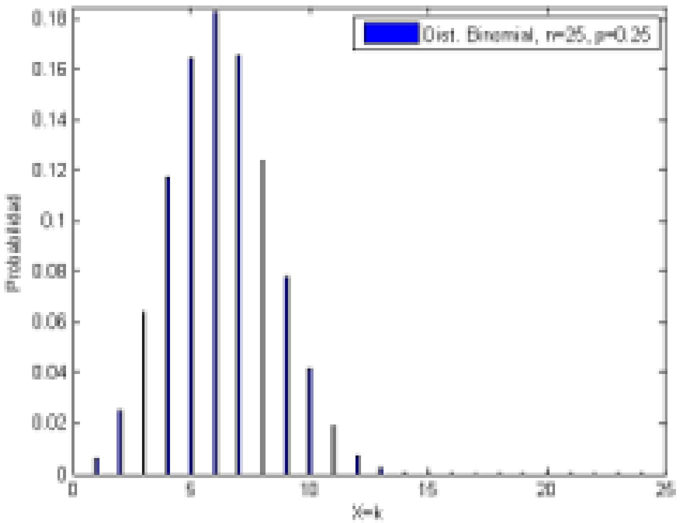
Análisis de la gráfica de la distribución binomial a partir del n y p

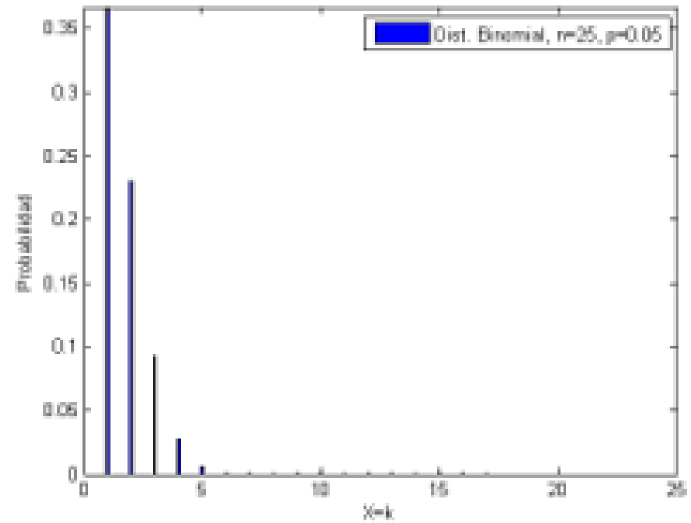
Simétrica: Si $p = 0.5$ la distribución binomial será simétrica independientemente del tamaño de la muestra.



Algunas Variables Aleatorias Discretas

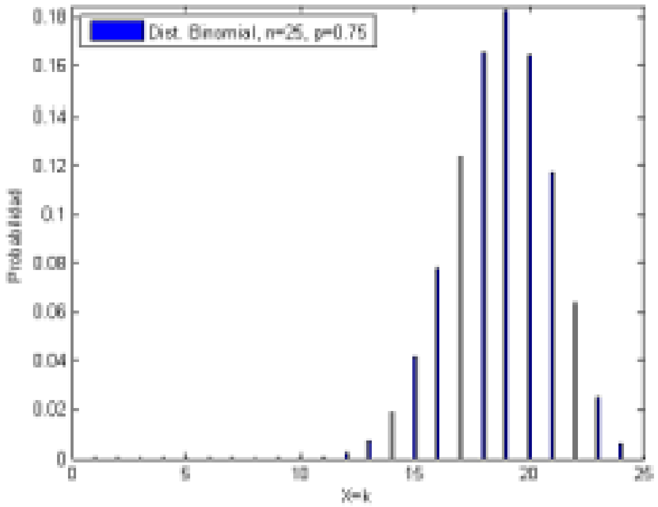
<u>Sesgada a derecha</u>: Si $p \to 0$ la distribución binomial tendrá sesgo hacia la derecha.

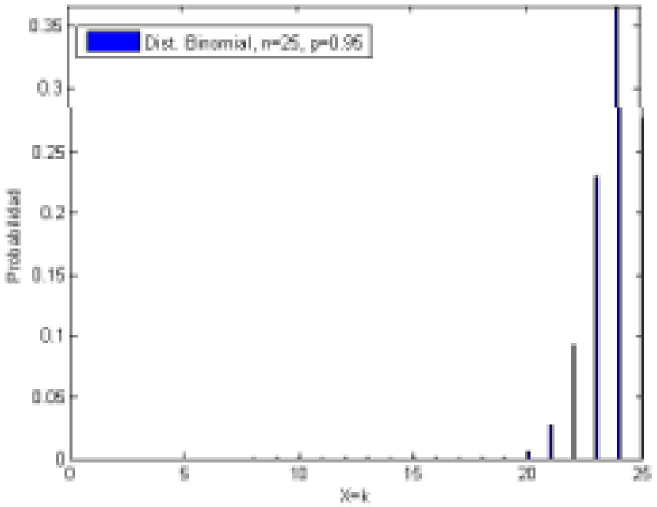




Algunas Variables Aleatorias Discretas

Sesgada a izquierda: Si $p \to 1$ la distribución binomial tendrá sesgo hacia la izquierda.





Distribución Hipergeométrica:

Cuando estudiamos la distribución Binomial la probabilidad p de éxito permanecía constante para cada una de las pruebas independientes.

Consideremos el siguiente caso:

De una caja que contiene N bolas de las cuales a son rojas ($a \leq N$) se escoge al azar una bola sin reemplazo o sustitución y definimos la variable aleatoria:

X: número de bolas rojas extraídas en las n repeticiones, $R_X = \{1, 2, \ldots, a\}$

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, a$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Definición: Se dice que X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, con parámetros N, n, a si su distribución de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \ldots, a$$

Donde:

n: Tamaño de la muestra.
N: Tamaño de la población
a: número de éxitos en la población.
N-a: número de fracasos en la población.
k: número de éxitos en la muestra.

Observaciones:

Una variable Hipergeométrica es generada según las siguientes condiciones

1) N pruebas no independientes.

2) El resultado de cada prueba es dicotómico.

3) La probabilidad de éxito $P(A)$ no se mantiene constante, es decir, varía con cada prueba.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: La producción diaria de 850 partes contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se toman 4 partes al azar, sin sustitución, de la producción del día, cuál es la probabilidad de que ninguna de las partes cumpla con los requerimientos del cliente?

X: "número de partes que no cumplen con los requerimientos del cliente."

$$P(X=4)=\frac{\binom{800}{0}\binom{50}{4}}{\binom{850}{4}}=0.00001066\cong 0$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Variable aleatoria de Poisson.

Muchos hechos no ocurren como resultado de n pruebas de un experimento, sino en puntos de tiempo, espacio o volumen, es decir, estamos interesados en el número de ocurrencias (defectos) por unidad de medida.

Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles $k = 0,1,2,\ldots$. Si su función de probabilidades está dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k = 0,1,\ldots$$

decimos que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ (frecuencia de ocurrencias medias), y se nota $Po(\lambda)$.

Interpretación: La distribución de Poisson expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media λ , la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierta unidad de medida.

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Observaciones:

Una variable de Poisson es generada según las siguientes condiciones:

1) El número de ocurrencias es independiente de una unidad a otra, es decir los sucesos ocurren independientemente.

2) La frecuencia de ocurrencia media λ, es proporcional al tamaño de la unidad.

3) La probabilidad de más de una ocurrencia en una unidad cada vez más pequeña tiende a cero, es decir es despreciable.

Esperanza y varianza de matemática de la distribución

Sea X una v. a. tal que $X \sim P(\lambda)$, $E(X) = V(X) = \lambda$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4)=$$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad k=0,1,\ldots$$

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^{4}}{4!} = 0.175467$$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad k = 0,1,\ldots$$

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^{4}}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora).

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^{4}}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora). $X \sim Po(\lambda)$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^{4}}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora). $X \sim Po(\lambda) \quad \lambda = \frac{5}{2}$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplo: El sistema de estacionamiento medido impulsado por la municipalidad de Gral. Pueyrredon está 100% informatizado. Esto permitió modelar el número de infracciones mediante un modelo de Poisson con una tasa de cinco infracciones por hora. a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro infracciones se expidan durante una hora en particular?

Solución:

X: número de infracciones en 1 hora. $X \sim P(\lambda), \quad \lambda = 5$

$$P(X=4) = \frac{e^{-5}.5^4}{4!} = 0.175467$$

¿Cuál es la probabilidad de que se expidan exactamente cuatro infracciones en 30 minutos.?

X: número de infracciones en 30 min (media hora). $X \sim Po(\lambda) \quad \lambda = \frac{5}{2}$

$$P(X=4) =$$

EJERCICIO

Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

X ~ $B(n,p)$

El número esperado de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia está dada por:

$$E(X) = np$$

X ~ $\mathscr{P}(\lambda)$

Está caracterizada por un único valor λ. El cual representa el número promedio de eventos por unidad:

$$E(X) = \lambda$$

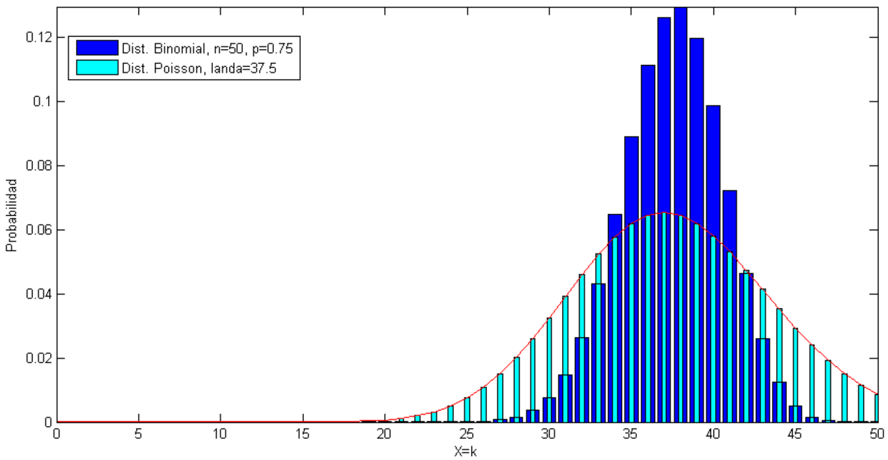
Veamos que sucede si ajustamos ambas variables aleatorias haciendo coincidir sus valores esperados. Es decir:

$$np = \lambda$$

Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

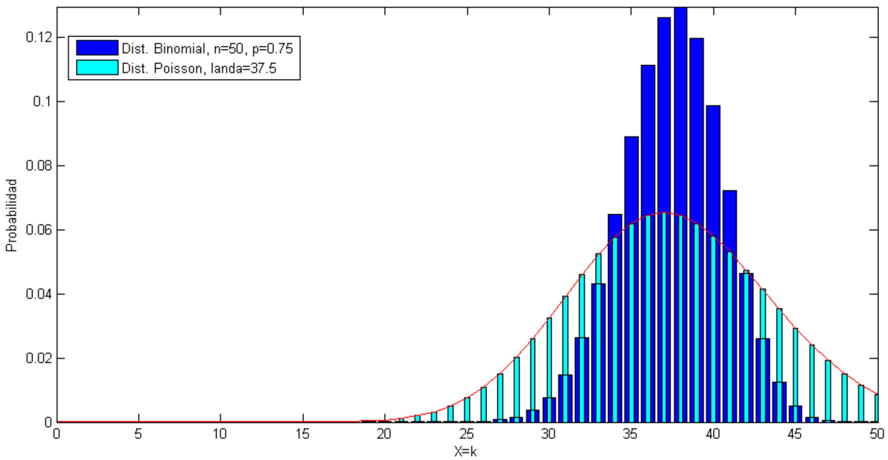
$$np = \lambda$$

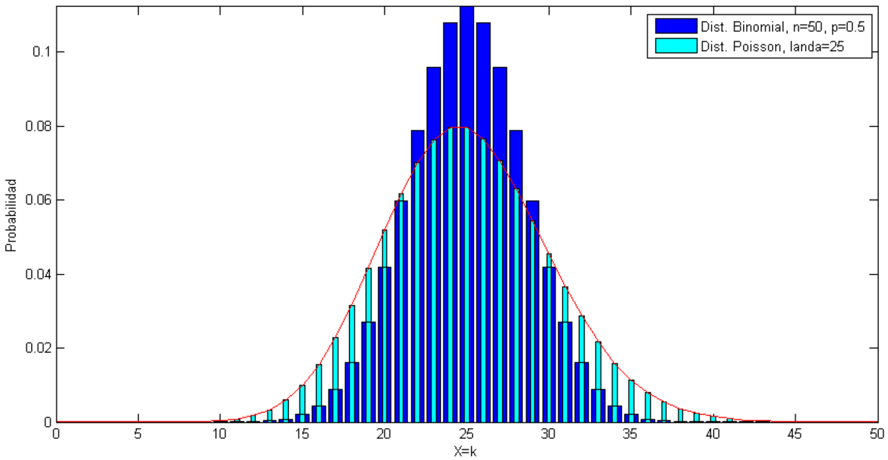


Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

$$np = \lambda$$

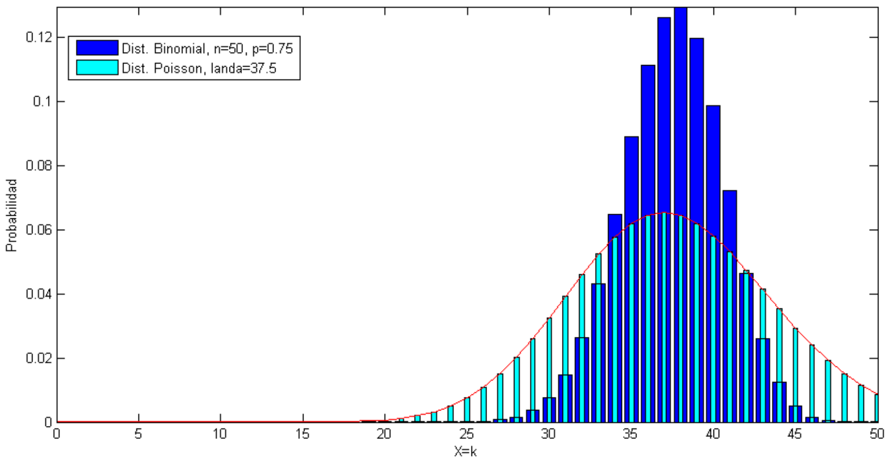


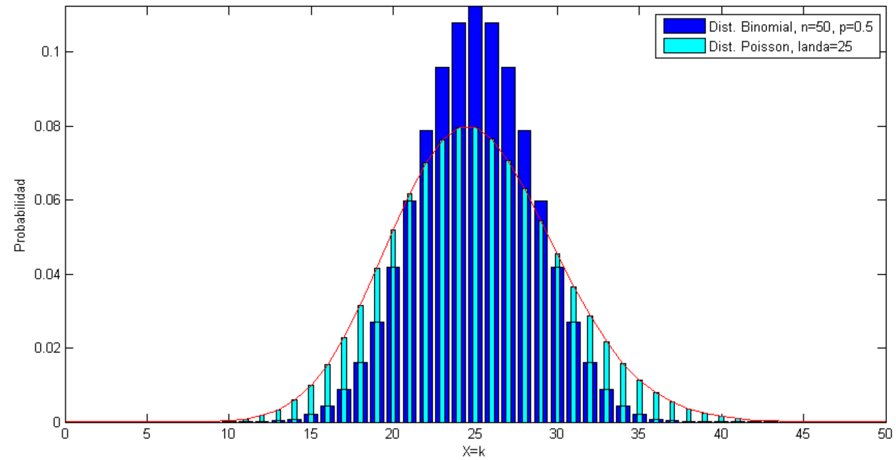


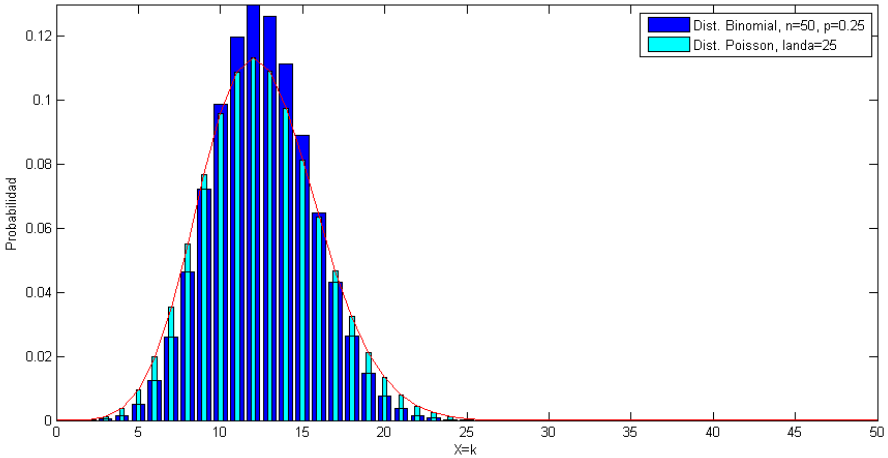
Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

$$np = \lambda$$



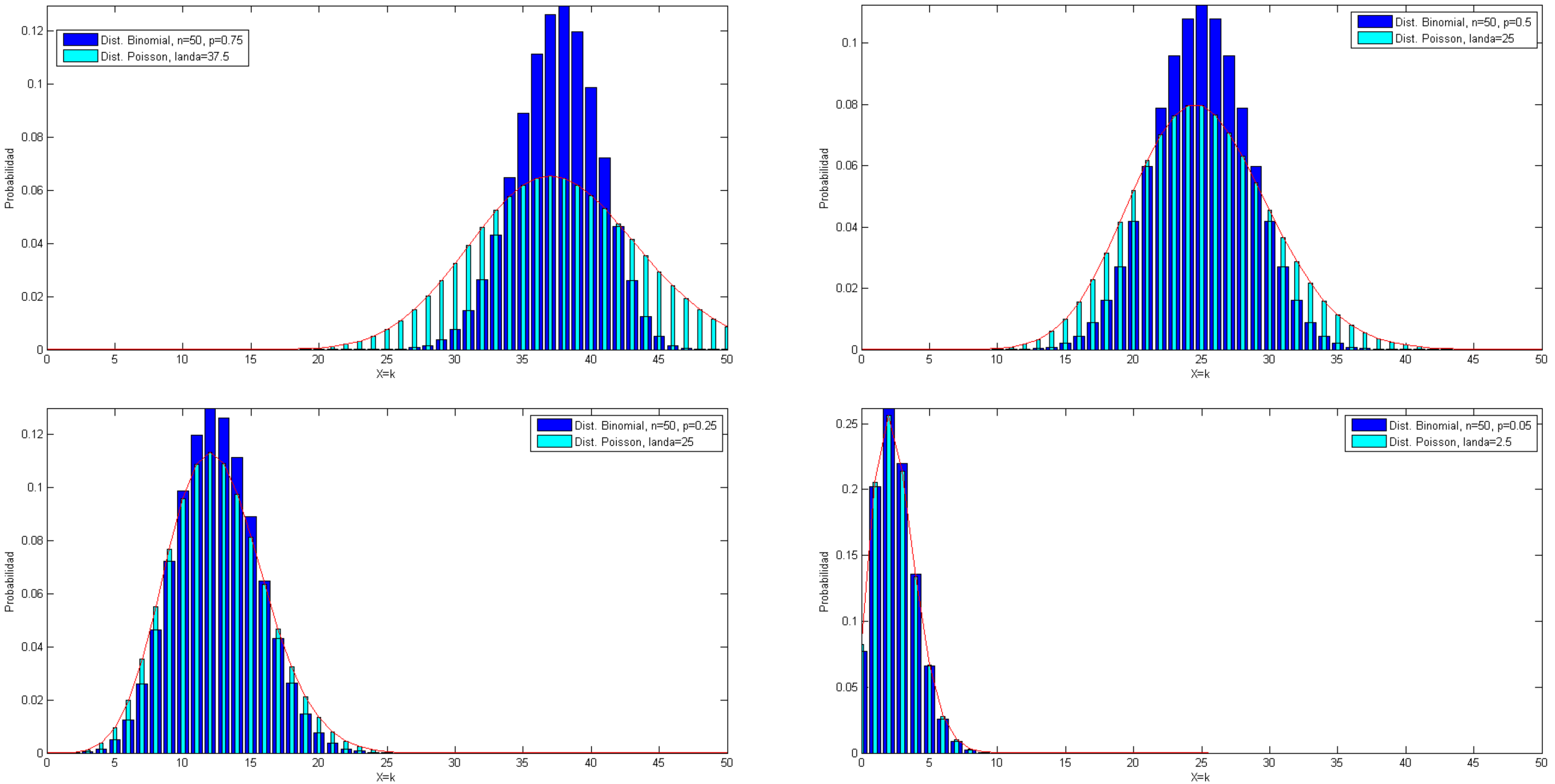




Aprox. de la distribución Binomial por la Poisson

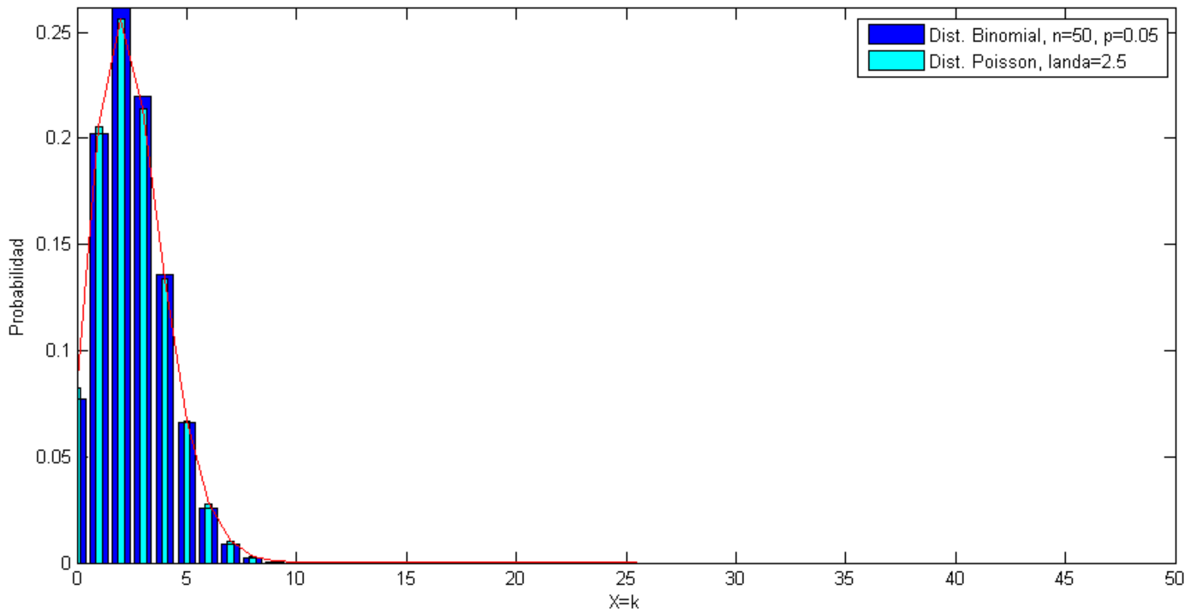
Haciendo coincidir los valores medios de ambas distribuciones. Tenemos:

$$np = \lambda$$



Conclusión

"Gráficamente" podemos concluir que a medida que ***n*** aumentamos y ***p*** disminuye, la distribución de Poisson se aproxima a la distribución Binomial.



Algunas Variables Aleatorias Discretas

<u>La distribución de Poisson como aproximación a la Binomial</u>.

Cuando en una distribución binomial el número de intentos (n) es grande y la probabilidad de éxito (p) es pequeña, la distribución binomial converge a la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} p^{(k)} (1-p)^{n-k}$$

$$= \ldots$$

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Es decir, en el límite obtenemos la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$. En la práctica podemos aproximar la distribución Binomial por la distribución de Poisson si se verifica que $n \geq 50$ y $np \leq 5$.

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05$ = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05$ = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

$1-p = 0.95$ = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) $n = 100$; $p = 0.05$ = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

$1-p = 0.95$ = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) n = 100; p = 0.05 = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

1-p = 0.95 = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$X \sim B(100, 0.05)$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) n = 100; p = 0.05 = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

1-p = 0.95 = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

a) n = 100; p = 0.05 = p(encuadernación defectuosa) = p(éxito)

1-p = 0.95 = p(encuadernación no defectuosa) = p(fracaso)

x = número de encuadernaciones defectuosas en 100

$$X \sim B(100, 0.05)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad P(X = 2) = \binom{100}{2} \times 0.05^2 \times 0.95^{98} = 0.0812$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$\boxed{n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5}$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$\boxed{n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5}$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\lambda = n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

b) x = número de encuadernaciones defectuosas en 100 $X \sim B(100, 0.05)$

Condiciones para la aproximación:

$$\boxed{n \geq 50 \quad \wedge \quad np \leq 5}$$

$$n = 100 \quad n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$\lambda = n \times p = 100 \times 0.05 = 5$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!} \qquad P(X = 2) = \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} = 0.0843$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Ejemplos: Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando, a) la distribución Binomial, b) la aproximación de Poisson a la distribución Binomial.

Solución/

BINOMIAL

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^{k}\times(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2)=\binom{100}{2}\times 0.05^{2}\times 0.95^{98}=0.0812$$

POISSON

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^{k}}{k!}$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-5}\times 5^{2}}{2!}=0.0843$$

$$ERROR=\left|0.0843-0.0812\right|=0.0031$$

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Sea X = cantidad de piezas defectuosas en un lote $X \sim B\left(40000, \frac{1}{10000}\right)$

Ejemplo de aplicación

Una máquina envasadora daña una pieza de cada 10000 que envasa. Las piezas envasadas se comercializan en lotes de 40000. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga a lo sumo 2 elementos defectuosos?

Sea X = cantidad de piezas defectuosas en un lote $X \sim B\left(40000, \frac{1}{10000}\right)$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \binom{40000}{0}\left(\frac{1}{10000}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{40000-0} + \binom{40000}{1}\left(\frac{1}{10000}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{40000-1} + \binom{40000}{2}\left(\frac{1}{10000}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{40000-2}$$

$$= 0.238088652447538$$

Aproximación por Poisson.

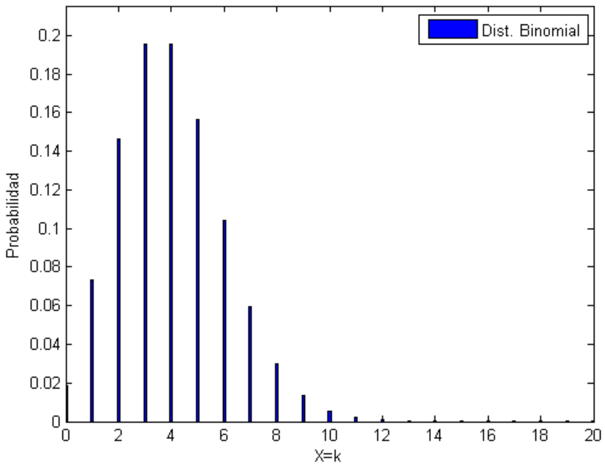
X = cantidad de piezas defectuosas. $n \to \infty \quad p \to 0 \quad np = 4 \quad X \sim P(4)$

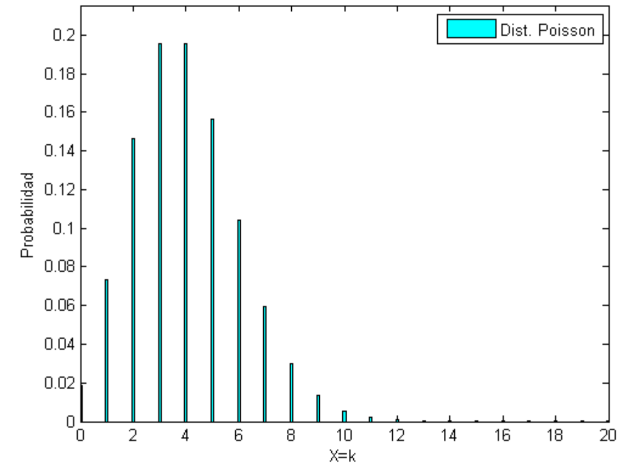
$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!}$$

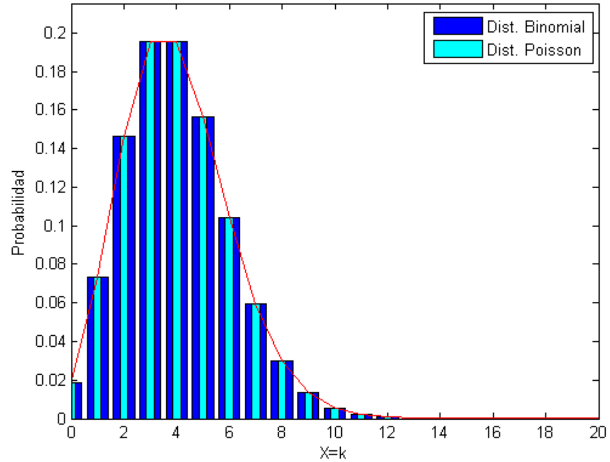
$$= 0.238103305553544$$

Algunas Variables Aleatorias Discretas

Gráficamente







La función solamente está definida en valores enteros de *k*. La línea continua sólo es una guías para el ojo y no indican continuidad.

Variable Aleatoria Continua

Definición de Variable Aleatoria Continua

Variables aleatorias continuas

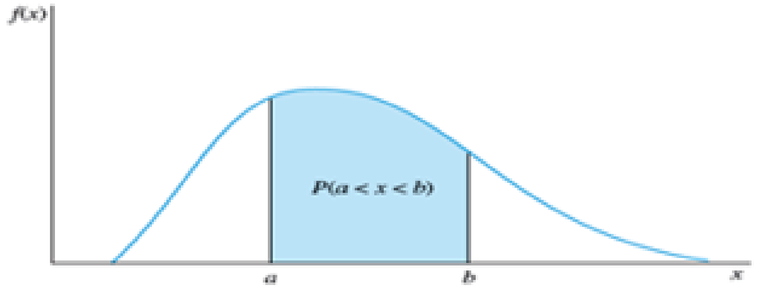
Definición: Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones.

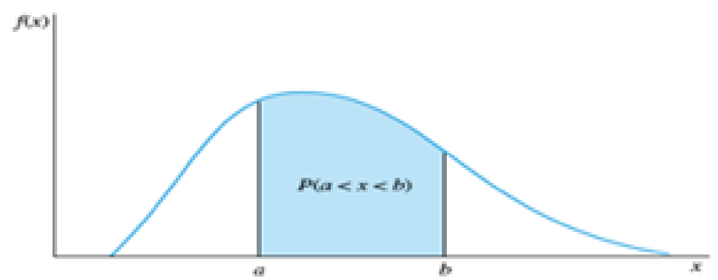
a) $f(x)\geq 0 \quad \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c) $\forall\, a,b$ tal que $-\infty < a < b < \infty \quad P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)\,dx$

Interpretación gráfica:



Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Se dice que X es una **variable aleatoria discreta** (v.a.d) si su rango o recorrido R_X es finito o infinito numerable y a cada valor posible $x_i \in R_X$ se le puede asociar un número $P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que: a) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_X$ b) $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$	**<u>Definición:</u>** Se dice que una v.a. X es una variable aleatoria continua, si existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de X que satisface las siguientes condiciones. a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ c) $\forall\, a, b$ tal que $-\infty < a < b < \infty$ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Algunas consideraciones</u>

a) $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$

La probabilidad cero no significa que el suceso sea imposible, es decir si A es el conjunto vacío entonces P(A)=0, pero el recíproco no es cierto.

Por lo tanto

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

b) Si $f^*(x) \ge 0 \quad \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\,dx = k \in \mathbb{R}^+$ entonces no es una legitima fdp. Pero podemos convertirla de la siguiente manera:

$$f(x) = {f^*(x)}/{k} \quad \forall x$$

c) Si X toma valores en el intervalo $[a,b]$ podemos definir $f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a,b]$.

Definición de Variable Aleatoria Continua

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x\in(0,1) \\ 0 & \text{si } x\notin(0,1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k\in\mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima *f.d.p*

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x\in(0,1) \\ 0 & \text{si } x\notin(0,1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k\in\mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima *f.d.p*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 0\,dx} \quad \Rightarrow \quad k\int_{0}^{1} x-x^2\,dx=1$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Sea $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x\in(0,1) \\ 0 & \text{si } x\notin(0,1) \end{cases}$$

Halla un valor de $k\in\mathbb{R}$ de manera tal que $f(x)$ sea una legítima *f.d.p*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 0\,dx} \quad\Rightarrow\quad k\int_{0}^{1} x-x^2\;dx=1$$

$$1=k\left[\int_{0}^{1} x-x^2\;dx\right]=k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right]=k\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=k\left[\frac{1}{6}\right]\quad\Rightarrow\quad k=6$$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: con la *f.d.p* anterior hallar:

a) $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = 6\left[\int_{1/4}^{1/2} x - x^2 \, dx\right] = 6\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{1/4}^{1/2}\right] = ?$

b) $P\left(\underbrace{x \geq \frac{1}{3}}_{A} \Big/ \underbrace{\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}}_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)} = ?$

Definición de Variable Aleatoria Continua

Función de distribución acumulada (FDA)

Sea X una variable aleatoria discreta o continua. La función de distribución acumulada F se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall\, x$$

1) Si X es una v.a.d entonces $F(x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j)$. La suma se toma sobre todos los índices j que satisfacen $x_j \leq x$.

2) Si X es una v.a.c entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ siendo $f(s)$ la f.d.p.

Definición de Variable Aleatoria Continua

Propiedades de la FDA

1- F es no decreciente, es decir si $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$

2- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

3- Si f es la fdp de X entonces $f(x) = F'(x) \quad \forall x$ donde F es diferenciable. Es decir, la FDA, F, es una primitiva de f la *f.d.p*.

4- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ Regla de Barrow.

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Características numéricas de las variables aleatorias continuas:

Definición: Sea X una v. a. continua con f.d.p, f , definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se llama valor esperado de la v. a. continua X o esperanza matemática de X a:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

$E(X)$ existe si existe $\int_{-\infty}^{\infty} \left| x.f(x) \right| dx < \infty$.

Características numéricas de una v.a

Valor esperado o Esperanza matemática

Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), se define la Esperanza matemática como: $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i)$$	Sea X una **variable aleatoria continua** (v.a.c), se define la Esperanza matemática como: $$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

Propiedades del valor esperado o Esperanza Matemática

1) Si $X = cte$ entonces $E(X)=c$
2) $E(cX)=cE(X)$ para toda constante c.
3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, (X e Y v.a.)
4) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$
5) $E(XY)=E(X)E(Y)$ si X e Y son v.a. independientes.
6) Considerando las propiedades 1,2 y 3 tenemos que $E(aX+b)=aE(X)+b$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Ejemplo: Hallar la esperanza matemática de la v. a. continua con f.d.p dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x.0\,dx} + \int_{0}^{1} x.2x\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} x.0\,dx} = \int_{0}^{1} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Varianza de una variable aleatoria continua:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

a. Si X es una v.a.c

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx$$

Varianza o Varianza Matemática

Definición: La varianza de una v. a. X se define como:

$$V(X)=\sigma^2=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$$

En palabras, la varianza de una v. a. X es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de X respecto de su esperanza.

Variable aleatoria Discreta	Variable aleatoria continua
Sea X una **variable aleatoria discreta** (v.a.d), se define la Varianza matemática como: $$V(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i-E(X)\right)^2 p(x_i)$$	Sea X una **variable aleatoria continua** (v.a.c), se define la Varianza matemática como: $$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

Propiedades de la Varianza Matemática

1) Si $X = cte$ entonces $V(X)=0$
2) $V(X+c)=V(X)$ para toda constante *c*.
3) $V(cX)=c^2V(X)$ para toda constante *c*.
4) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)
5) $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$, (X e Y v.a. independientes)

Otra forma de expresar la varianza es la siguiente:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

<u>Definición</u>: La dispersión de una v.a. X se define como

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

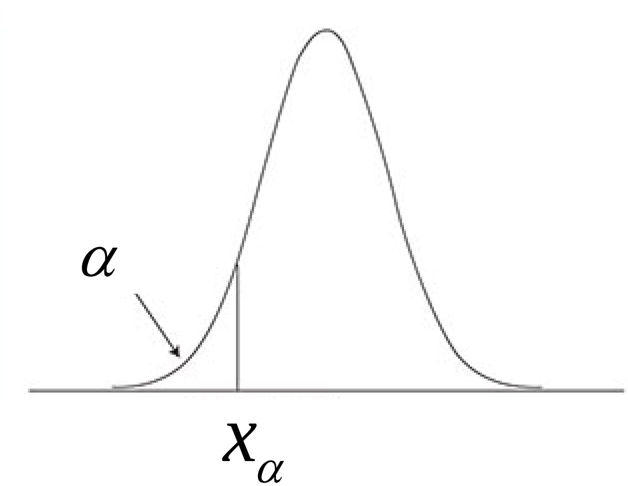
<u>Cuantiles de una v. a. continua</u>:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

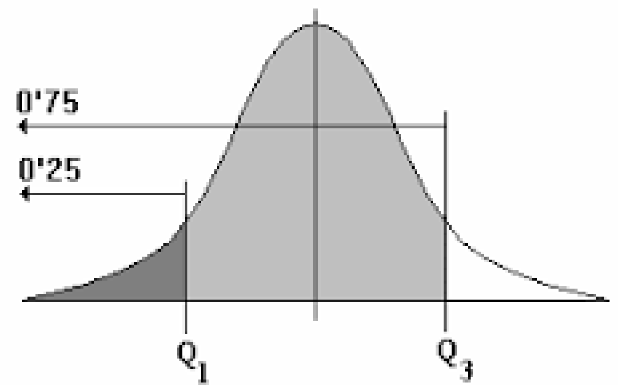
Cuantiles de una v. a. continua:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$



$$P(X < Q_1) = \int_{-\infty}^{Q_1} f(x)\,dx = 0.25$$

Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

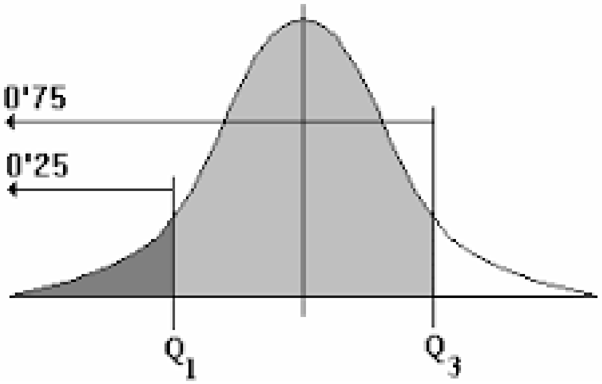
Cuantiles de una v. a. continua:

En estadística descriptiva dijimos, por ejemplo, que el percentil 10 deja aproximadamente el 10% de los datos a la izquierda. O equivalentemente el 10% de los datos son menores que el percentil 10.

Si X es una variable aleatoria continua, su percentil 10 es el valor que deja un área de 0,1 a la izquierda en la fdp de la variable.

En general se llama cuantil α al valor x_α tal que:

$$P(X < x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$

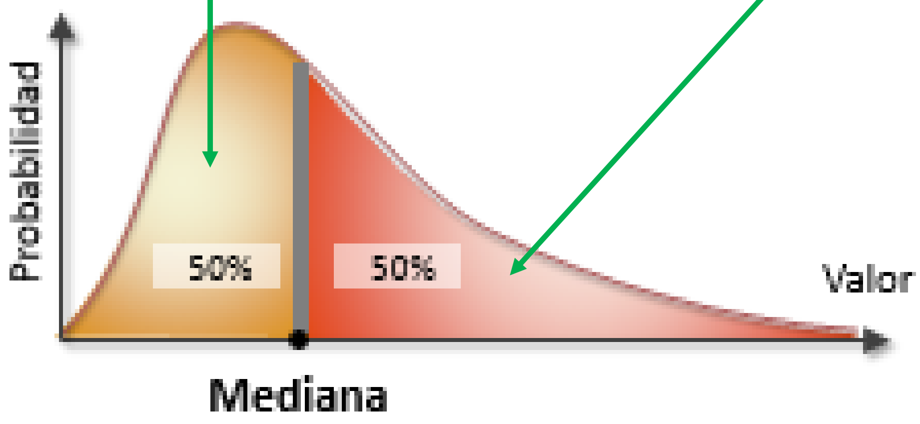


$$P(X < Q_3) = \int_{-\infty}^{Q_3} f(x)\,dx = 0.75$$

Mediana de una v.a. continua:

La media de una v.a continua es el valor m_e tal que

$$P(X < m_e) = \int_{-\infty}^{m_e} f(x)\,dx = 0,5 \quad \text{o} \quad P(X > m_e) = \int_{m_e}^{\infty} f(x)\,dx = 0,5$$



Características numéricas de Variable Aleatoria Continua

Moda de una v.a continua: es el valor de X para el cual $f(x)$ toma su valor máximo (si la fdp tiene un solo máximo)

Si f y f' son derivables en a, a es un máximo relativo o local si cumple

1) $f'(a) = 0$

2) $f''(a) < 0$