Procesamiento Cuántico de Datos

Miguel Arizmendi, Gustavo Zabaleta

17 de noviembre de 2016

Sitio web: www3.fi.mdp.edu.ar/fes/ProcQ.html

Mecánica Cuántica y Qubits

Qubits

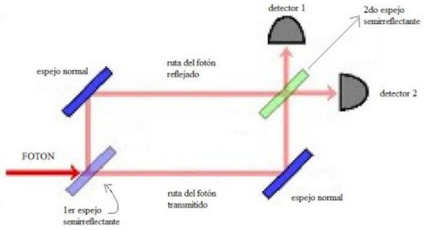
El qubit o bit cuántico es la unidad de información básica de la computación cuántica.

El estado cuántico

- En computación cuántica los estados asociados a los qubits están dados por vectores en espacios complejos de Hilbert de dimensión finita.
- En particular: Sistemas compuestos por partes de *dos niveles* con estado descripto por un vector en un espacio de Hilbert 2-dimensional.

Ejemplo: Sistema cuántico de 2 niveles

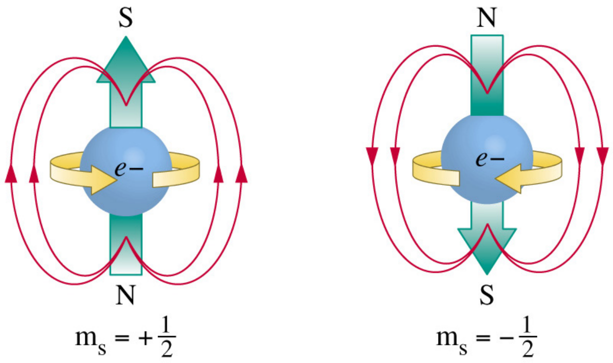
- Un fotón que puede pasar por dos caminos distintos como se ve en la figura.



Mecánica Cuántica y Qubits

Ejemplo: Spin de las partículas de spin $-\frac{1}{2}$

- *spin* -$\frac{1}{2}$ como electrones, protones o neutrones.
- El spin estará *up* $(+\frac{1}{2})$ o *down* $(-\frac{1}{2})$.



Mecánica Cuántica y Qubits

Ejemplo: Energía de un electrón orbitando un núcleo como en el átomo de Hidrógeno.

- Los posibles valores de energía son discretos $\equiv$ Están cuantificados.
- El estado más probable es el *fundamental* seguido por el *primer excitado*.
- La probabilidad de que los otros estados estén ocupados es prácticamente despreciable $\Rightarrow$ sistema de 2 niveles.

- El estado de estos sistemas es descripto por un vector en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones.
- Los estados asociados a cada uno de los niveles se identifican con $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.

Mecánica Cuántica y Qubits

Estado general del sistema

$$\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle, \text{ con } \alpha_0,\alpha_1 \in \mathbb{C}$$

- α_0 y α_1: Amplitudes de los estados de la base $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.
- Condición de normalización: $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1$

El estado general del sistema de cada uno de los ejemplos es:

- La superposición de camino 0 y 1 para el fotón.
- La superposición spin *up* y *down* para la partícula de *spin* -$\frac{1}{2}$.
- La superposición del nivel fundamental y el excitado para el electrón en el átomo.

Mecánica Cuántica y Qubits

Fases en el vector de estado

- La probabilidad de medición está asociada a la norma del vector de estado: $e^{i\theta}|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle$.
- Por lo tanto $|0\rangle + |1\rangle \equiv e^{i\theta}|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle$

Por otro lado

Factores de fase relativos entre estados ortogonales sí son significativos:

$$|0\rangle + |1\rangle \neq |0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle$$

.

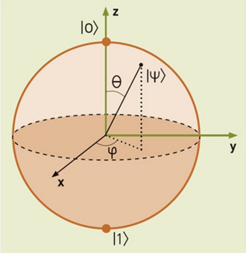
Mecánica Cuántica y Qubits

Esfera de Bloch

El estado más general de un qubit

$$|\psi\rangle = cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi} sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

se representa como un punto en la superficie de una esfera 3D

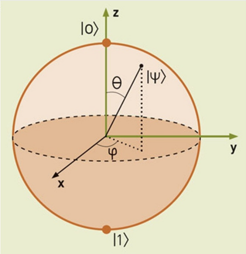


llamada *esfera de Bloch*

Mecánica Cuántica y Qubits

Consideraciones sobre la esfera de Bloch

1. El estado de un bit clásico que puede ser 0 o 1 se ubicaría en los polos norte y sur de la esfera.
2. El caso probabilístico clásico, $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ se representaría como un punto sobre el segmento que une los polos verticalmente.



Evolución en Sistemas Cerrados

Postulado de Evolución

La evolución temporal del estado de un sistema cuántico cerrado es descripta por un operador lineal unitario.
Sea el estado inicial $|\psi_1\rangle$.
Después de la evolución: $|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle$.
Por linealidad se cumple que

$$U\sum_i \alpha_i|\psi_i\rangle = \sum_i \alpha_i U|\psi_i\rangle.$$

Ir a Medición (21)

Operadores U que actúan sobre 1 qubit $\equiv$ *compuertas de 1-qubit*

De esta forma, podemos representar los operadores sobre un qubit como matrices de 2×2 representados en una base.

Evolución en Sistemas Cerrados

Ejemplo: Compuerta cuántica NOT

$$NOT : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz correspondiente será (en la base computacional):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La compuerta *NOT* se identifica con el símbolo X y es una de las *matrices de Pauli*.

Evolución en Sistemas Cerrados

Las Compuertas de Pauli

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 = \sigma_x = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_2 = \sigma_y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Las compuertas de Pauli X, Y y Z corresponden a rotaciones alrededor de los ejes x, y y z de la esfera de Bloch, respectivamente.
- *Cualquier* operador unitario de 1-qubit se puede expresar como una combinación lineal de compuertas de Pauli.

Evolución en Sistemas Cerrados

Relación del Postulado de Evolución con la Ecuación de Schrödinger

La evolución de los sistemas cuánticos cerrados está dada por la *Ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle,$$

donde $\hbar$ es la *constante de Planck* y *H(t)* es un operador hermítico, el *Hamiltoniano* del sistema, que representa la Energía del mismo. Si consideramos Hamiltonianos constantes en el tiempo, la solución de la ecuación para dos tiempos t_1 y t_2 será:

$$|\psi(t_2)\rangle = e^{\frac{-iH(t_2-t_1)}{\hbar}}|\psi(t_1)\rangle.$$

Evolución en Sistemas Cerrados

Ejercicio 1:

Muestre que la anterior es solución de la Ecuación de Schrödinger con $H(t) = H$ constante en el tiempo.
Si H es hermítico $e^{\frac{-iH(t_2-t_1)}{\hbar}}$ es unitario y así se verifica el Postulado de Evolución.

Rta. en diapositiva (33)

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Postulado de Composición de Sistemas

El espacio de estados de este sistema combinado es el espacio producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de los espacios de estados $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ de los subsistemas componentes. Si el primer sistema está en el estado $|\psi_1\rangle$ y el segundo en el estado $|\psi_2\rangle$, el estado del espacio combinado será:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle.$$

Como dijimos antes este estado conjunto se escribe $|\psi_1\psi_2\rangle$.

El espacio de estados de *n* subsistemas

Es el producto tensorial de los espacios de estado de los *n* subsistemas.

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Postulado de Composición de Sistemas

Cuando dos sistemas físicos son tratados como un sistema , el espacio de estados de este sistema combinado es el espacio producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de los espacios de estados $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ de los subsistemas componentes. Si el primer sistema está en el estado $|\psi_1\rangle$ y el segundo en el estado $|\psi_2\rangle$, el estado del espacio combinado será:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle.$$

Como dijimos antes este estado conjunto se escribe $|\psi_1 \psi_2\rangle$.

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Estados Enredados (Entangled)

- El estado de un sistema compuesto de 2-qubits *no siempre puede* ser escrito en la forma $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.
- Un ejemplo importante es el de los estados *enredados* o *entangled* en el que los qubits no están aislados y pueden interactuar.
- El estado del sistema compuesto es un vector en el espacio 4-dimensional producto tensorial de los espacios de los 2 qubits.
- **La mayoría de los estados de 2-qubits son enredados**

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Ejercicio 2:

Considere el estado de 2-qubits:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|1\rangle.$$

Muestre que este estado es enredado probando que no hay ningún valor de α_0, α_1, β_0, β_1 tal que

$$|\psi\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle).$$

Rta. en diapositiva (34)

- Par EPR: $|\psi\rangle$ fue introducido por Einstein, Podolsky y Rosen en un artículo muy importante y controversial para la mecánica cuántica de 1935.

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Ejemplo: Sistema compuesto por 2 qubits y aplicamos la compuerta NOT (X) al primer qubit

La entrada de 2-qubits $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ se transforma en $X|\psi_1\rangle \otimes I|\psi_2\rangle = (X \otimes I)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$. La representación matricial de $X \otimes I$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si el sistema fuera de n qubits, aplicar X al primer qubit solamente corresponde a aplicar $X \otimes I \otimes I \cdots \otimes I$, con I repetido $n-1$ veces, a todo el sistema. En forma matricial sería una matriz de $2^n \times 2^n$.

Sistemas Compuestos por muchos Qubits

Hay compuertas de 2-qubits que no pueden ser escritas como producto de compuertas de 1-qubit

Ejemplo: **C***ontrolled*-**NOT**

$$|00\rangle \to |00\rangle, |01\rangle \to |01\rangle, |10\rangle \to |11\rangle, |11\rangle \to |10\rangle.$$

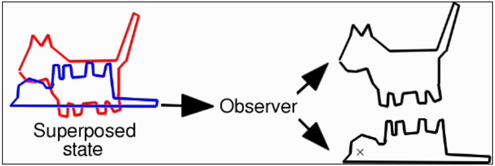
$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3: Verifique que la matriz atribuida a CNOT cambia el estado del segundo qubit si el primer qubit está en $|1\rangle$ y lo deja como está si no. Rta. en diapositiva 35

Medición

¿Qué pasa cuando medimos?

- El Postulado de Evolución(10) $\Rightarrow$ SISTEMA CERRADO.
- Si se mide alguna de las propiedades de interés del sistema.
- Hay interacción entre el aparato de medición y el sistema.
- ~~Postulado de Evolución y su condición de unitariedad.~~



Medición

Postulado de medición

Sea el estado del sistema A

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle,$$

con $\{|\varphi_i\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de estados $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ del sistema.

- Una *medición de Von Neumann* sobre el sistema A con respecto a la base $\{|\varphi_i\rangle\}$ tendrá como resultado i con probabilidad $|\alpha_i|^2$.
- El estado de A queda $|\varphi_i\rangle$.
- El aparato de medición marca el resultado i.

Medición

Espacio de estados bipartito $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$

- Si el estado del sistema es $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle|\gamma_i\rangle$.
- El resultado de la medición sobre A será i con probabilidad $|\alpha_i|^2$.
- Dejando al sistema bipartito en el estado $|\varphi_i\rangle|\gamma_i\rangle$.

Ejercicio 4: De acuerdo al Postulado de Medición la probabilidad de obtener i es $p(i) = |\alpha_i|^2$ si el estado del sistema es $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle$, con $|\alpha_i|^2 = \alpha_i \alpha_i^* = \langle\psi|\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\psi\rangle$. Muestre que los estados $|\psi\rangle$ y $e^{i\theta}|\psi\rangle$ son equivalentes dado que $p(i)$ es la misma en ambos casos. Ésta es la justificación de que las fases globales no tengan significado físico. Rta. en diapositiva (37)

Medición

Medición Proyectiva

- Medición de Von Neumann
- Proyección ortogonal: P que cumple $P^\dagger = P$ y $P^2 = P$.
- Operador identidad $I = \sum_i P_i$:
  - P_i : proyectores ortogonales
  - Medición proyectiva con salida i
  - $p(i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$
  - El estado del sistema queda $\frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p(i)}}$

Medición Proyectiva en otras palabras

Proyecta el estado inicial $|\psi\rangle$ con uno de los proyectores posibles P_i con probabilidad igual al cuadrado del módulo de la amplitud de la componente de $|\psi\rangle$ en el subespacio de la proyección.

Medición

Ejercicio 5:

a) Pruebe que si los operadores proyección P_i satisfacen $P_i^\dagger = P_i$ y $P_i^2 = P_i$, entonces $P_i P_j = 0 \;\; \forall \; i \neq j$.
b) Pruebe que todo estado $|\psi\rangle$ puede ser descompuesto como $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle$ donde $\alpha_i = \sqrt{p_i}$, $p(i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$ y $|\psi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p(i)}}$.
Pruebe también que $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{i,j}$.
c) Pruebe que cualquier descomposición $I = \sum_i P_i$ del operador identidad en un espacio de Hilbert de dimensión N tiene a lo sumo N términos en la suma.
Rta. en diapositiva (40)

Medición

Medición de Von Neumann

Completa o Máxima $\Rightarrow P_i$ cumple con la condición de completitud $I = \sum_i P_i$.

Ejemplo de medición de Von Neumann

Medición en la base computacional: $P_i = |i\rangle\langle i|$, proyectan sobre los vectores base y se cumple completitud.

Ejemplo de medición proyectiva *incompleta*

Medición de paridad: $P_0 = \sum_{parity(x)=0} |x\rangle\langle x|$ y $P_1 = \sum_{parity(x)=1} |x\rangle\langle x|$. En P_0 se suman todos las secuencias con un número par de 1s y en P_1 aquellos con número impar de 1s.

Medición

Observables

- Las mediciones proyectivas son frecuentemente descriptas en términos de un *observable*.
- Todo observable en cuántica es un operador Hermítico M que actúa en el espacio de estados del sistema.
- M Hermítico $\Rightarrow M = \sum_i m_i P_i$
- P_i: Proyector ortogonal sobre el autoespacio de M con autovalor real m_i
- Medir el observable $M \Rightarrow$ medición proyectiva con respecto a la descomposición $I = \sum_i P_i$
- Donde i es el autovalor m_i

Medición

Medición POVM (Positive Operator-Valued Measure)

Supongamos:

- M_m son operadores de medición.
- $|\psi\rangle$ el estado del sistema.
- $p(m) = \left\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \right\rangle$ la probabilidad de medir m.

Si definimos:

- $E_m = M_m^\dagger M_m$, E_m es un operador positivo.
- $\sum_m E_m = I$ y $p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle$.

Medición

Medición POVM (Positive Operator-Valued Measure)

El conjunto de operadores $\{E_m\}$ son suficientes para determinar las probabilidades. Los operadores E_m son los *elementos POVM* de la medición.

Ejemplo POVM

- Medición proyectiva con operadores P_m.
- $P_m P_{m'} = \delta_{mm'}$ y $\sum_m P_m = I$.

En este ejemplo (y sólo en él) los elementos POVM son los operadores de medición porque $E_m = P_m^\dagger P_m = P_m$.

Medición

Ejercicio 6:

Considere el operador de Pauli Z:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dado que Z es hermítico puede ser (y de hecho es) un observable.
a) Exprese la descomposición espectral de Z en la base computacional.
b) ¿Cuáles serían los resultados posibles de una medición?

Rta. en diapositiva (41)

Medición

Ejercicio 7:

Verifique que la medición del observable de Pauli X es equivalente a una medición proyectiva completa con respecto a la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Rta. en diapositiva (42)

Ejercicio 8:

a) Pruebe que la realización de una medición proyectiva de Paridad con respecto a P_0 y P_1 sobre un estado de n-qubits es equivalente a medir el observable $Z^{\otimes n}$.
b) Explique por qué no es equivalente realizar una operación completa de Von Neumann con respecto a la base computacional y luego medir la paridad de la cadena resultante a hacer directamente una medición proyectiva de la paridad.

Rta. en diapositiva (43)

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 1:

$$\frac{i\hbar d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle$$

si

$$H(t) = H$$

Integrando

$$\frac{i\hbar}{H}\int_{\psi(t_1)}^{\psi(t_2)} \frac{d|\psi(t)\rangle}{|\psi(t)\rangle} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

se llega a:

$$\frac{i\hbar}{H}\ln\left(\frac{|\psi(t_2)\rangle}{|\psi(t_1)\rangle}\right) = (t_2 - t_1)$$

Por lo tanto:

$$|\psi(t_2)\rangle = |\psi(t_1)\rangle e^{\frac{-iH(t_2-t_1)}{\hbar}}$$

Volver a diapositiva (14)

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 2:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|1\rangle.$$

$$|\psi_2\rangle = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle).$$

Distribuimos $|\psi_2\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$
Para que $|\psi_2\rangle = |\psi\rangle$ se debería cumplir que $\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_1 \neq 0$
Pero eso implica que $\alpha_0\beta_1$ y $\alpha_1\beta_0$ también son distintas de 0. Por lo tanto

$$|\psi\rangle \neq |\psi_2\rangle$$

Volver a diapositiva (18)

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 3:

$$CNOT|00\rangle = |00\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CNOT|01\rangle = |01\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 3:

$$CNOT|10\rangle = |11\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$CNOT|11\rangle = |10\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Volver a Ej. 3 en diapositiva 20

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 4:

- Si $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle \Rightarrow p(i) = |\alpha_i|^2$,
- $|\alpha_i|^2 = \alpha_i \alpha_i^* = \langle\psi|\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\psi\rangle$
- Tenemos que mostrar que $|\psi\rangle$ y $|\psi_2\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ son equivalentes.

1. $|\psi_2\rangle = e^{i\theta} \sum_k \alpha_k |\varphi_k\rangle$
2. $p_2(k) = \langle\psi_2|\varphi_k\rangle \langle\varphi_k|\psi_2\rangle$
3. $p_2(k) = e^{-i\theta} \langle\psi|\varphi_k\rangle \langle\varphi_k|\psi\rangle e^{i\theta}$
4. $p_2(k) = e^{-i\theta} e^{i\theta} \langle\psi|\varphi_k\rangle \langle\varphi_k|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi_k\rangle \langle\varphi_k|\psi\rangle = |\alpha_k|^2$

Respuestas a ejercicios seleccionados

Un ejemplo sencillo: $|\psi_2\rangle = e^{i\theta}(i\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle)$

1. $\langle\psi_2| = e^{-i\theta}(-i\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle)$
2. La probabilidad de que mida 0 es $p(0) = \langle\psi_2|0\rangle\,\langle 0|\psi_2\rangle$
3. $p(0) = e^{-i\theta}(-i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|)|0\rangle\langle 0|(i\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle)e^{i\theta}$
4. $p(0) = (-i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|0\rangle)(i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|0\rangle)$
5. $p(0) = (-i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0|0\rangle)(i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0|0\rangle) = \frac{2}{3}$
6. De la misma forma, la probabilidad de medir 1 es $p(1) = 1/3$;

volver a diapositiva 23

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 5:

a)

- $P_i = |i\rangle\langle i|$
- $P_i^\dagger = |i\rangle\langle i|$
- $P^2 = PP^\dagger = |i\rangle \overbrace{\langle i||i\rangle}^{=1} \langle i| = |i\rangle\langle i|$
- $P_i P_j = |i\rangle \overbrace{\langle i||j\rangle}^{=0} \langle j| = 0$

b)

- partimos de $\mathcal{I}|\psi\rangle = \sum_i P_i|\psi_i\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle \overbrace{\langle\psi_i||\psi\rangle}^{\alpha_i}$
- $|\alpha_i|^2 = \alpha_i^* \alpha_i = \langle\psi \underbrace{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_{P_i} \psi\rangle = \langle\psi|P|\psi\rangle = p(i)$
- Entonces $\alpha_i = \sqrt{p(i)}$

Respuestas a ejercicios seleccionados

Sigue Rta.: Ejercicio 5:
Comparando
$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle = \sum_i \sqrt{p(i)} |\psi_i\rangle$ y $\sum_i P_i |\psi\rangle$ se llega a:

$$|\psi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p(i)}}$$

Por último

$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \overbrace{P_i P_j^\dagger}^{=0} \frac{\langle\psi|\psi\rangle}{\sqrt{p(i)p(j)}} = 0$, si $i \neq j$

Volver a diapositiva 25

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 6:

a)

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se nos pide una descomposición espectral en la base computacional. En ese caso,

$P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resulta claro que los autovalores m_0 y m_1 son 1 y -1 respectivamente. b) Claramente, los resultados posibles de la medición son $m_0 = 1$ o $m_1 = -1$.

¿Se le ocurre algún ejemplo?

Volver a diapositiva (30)

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 7:
Como vimos anteriormente, el observable X tiene autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y los autovectores son:
$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
La descomposición espectral queda:

$$X = |+\rangle\langle+| + (-1)|-\rangle\langle-|$$

Volver a diapositiva (31)

Respuestas a ejercicios seleccionados

Rta.: Ejercicio 8:
Proyección de paridad 3 qubits

$$P_0 = |000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|$$

$$P_1 = |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100| + |111\rangle\langle 111|$$

Un estado cualquiera ψ puede expresarse como

$$|\psi\rangle = \alpha_0|\psi_0\rangle + \alpha_1|\psi_1\rangle$$

Aplicar $\langle\psi|P_0|\psi\rangle = |\alpha_0|^2$ y $\langle\psi|P_1|\psi\rangle = |\alpha_1|^2$
Por otra parte

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; Z^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Respuestas a ejercicios seleccionados

sigue Rta.: Ejercicio 8:

Por lo tanto

$$Z^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Respuestas a ejercicios seleccionados

sigue Rta.: Ejercicio 8:
Por ejemplo:

Para el caso de $Z^{\otimes 2}$ y $\psi = \overbrace{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{11}|11\rangle}^{\alpha_1\psi_0} + \overbrace{\alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle)}^{\alpha_1\psi_1}$
donde se cumple $|\alpha_0|^2 = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{11}|^2$ y $|\alpha_1|^2 = |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2$
Podemos calcular la probabilidad de paridad utilizando
$\langle\psi_0|Z^{\otimes 2}|\psi_0\rangle =$
$\alpha_{00}\alpha^*_{00}(\langle 00||00\rangle\langle 00||00\rangle) + \alpha_{11}\alpha^*_{11}(\langle 11| + |11\rangle\langle 11| + |11\rangle) = |\alpha_0|^2$
De la misma forma sale

$$\langle\psi_1|Z^{\otimes 2}|\psi_1\rangle = |\alpha_1|^2$$