

# Procesamiento Cuántico de Datos

Miguel Arizmendi, Gustavo Zabaleta

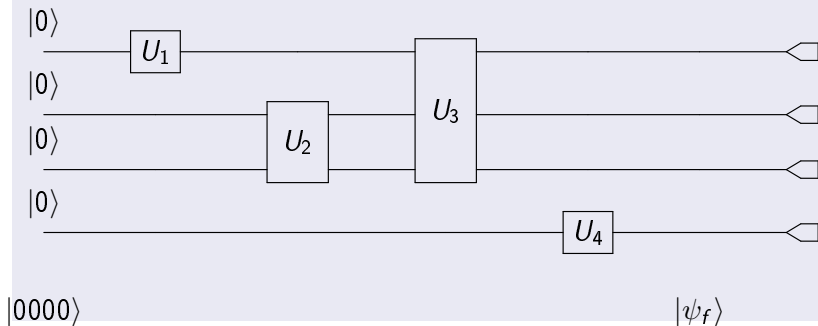
24 de noviembre de 2016

Sitio web: [www3.fi.mdp.edu.ar/fes/ProcQ.html](http://www3.fi.mdp.edu.ar/fes/ProcQ.html)

# UN MODELO CUÁNTICO DE COMPUTACIÓN

## El Modelo de Circuitos Cuánticos

Los qubits son transportados por cables y en su recorrido se encuentran con compuertas cuánticas que actúan sobre ellos.



## El Modelo de Circuitos Cuánticos

### Descripción del circuito del ejemplo

- $|\psi_i\rangle = |0000\rangle$  es el estado de entrada.
- $|\psi_i\rangle$  es procesado por las compuertas  $U_1, U_2, U_3, U_4$ .
- La salida  $|\psi_f\rangle$  es también un estado de 4 qubits (posiblemente entangled).
- Medición qubit por qubit en la base computacional.

En muchos casos no importa el estado de salida cuántico y sólo se está interesado en la información clásica que indica qué salida resultó. En el circuito de la Figura, se mide el estado cuántico  $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$  resultando el estado cuántico  $|b\rangle$  ( $b \in \{0, 1\}$ ), junto con la salida clásica  $b$  (0 o 1) que indica la salida.

## El Modelo de Circuitos Cuánticos

En muchos casos no importa el estado de salida cuántico y sólo se está interesado en la información clásica que indica qué salida resultó

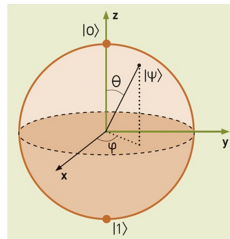
Ej.: Se mide el estado cuántico  $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$  resultando el estado cuántico  $|b\rangle$  ( $b \in \{0, 1\}$ ), junto con la salida clásica  $b$  (0 o 1) que indica la salida.



# Compuertas Cuánticas

## Compuertas de 1-Qubit

- La acción de  $U$  sobre  $|\psi\rangle$  puede ser pensada como una rotación sobre la esfera de Bloch del vector  $|\psi\rangle$  al vector  $U|\psi\rangle$ .
- Ej.  $NOT|0\rangle = |1\rangle$ . Lo que equivale a una rotación en un ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $x$ .



## Compuertas Cuánticas

### Compuertas de rotación sobre los ejes $x$ , $y$ y $z$

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= e^{\frac{-i\theta X}{2}} \\ R_y(\theta) &= e^{\frac{-i\theta Y}{2}} \\ R_z(\theta) &= e^{\frac{-i\theta Z}{2}}, \end{aligned}$$

donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son las matrices (o compuertas) de Pauli.

#### Ejercicio 1

Sea  $x$  un número real y  $A$  una matriz tal que  $A^2 = I$ . Muestre que

$$e^{iAx} = \cos(x)I + i\sin(x)A.$$

*Hint:* Aplique el desarrollo en serie de Taylor.

Rta en diapositiva (33)

## Compuertas Cuánticas

Es fácil verificar que  $X^2 = I$ ,  $Y^2 = I$  y  $Z^2 = I$  y por lo tanto:

$$\begin{aligned}R_x(\theta) &= e^{\frac{-i\theta X}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)X \\R_y(\theta) &= e^{\frac{-i\theta Y}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Y \\R_z(\theta) &= e^{\frac{-i\theta Z}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Z.\end{aligned}$$



## Compuertas Cuánticas

### Forma matricial en la base computacional

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -i\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ -i\text{sen}(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ \text{sen}(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix}.$$

## Compuertas Cuánticas

Considere un estado arbitrario de 1-qubit escrito en términos de sus ángulos del vector de Bloch  $\sigma$  y  $\tau$ :

$$\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)|0\rangle + e^{i\tau}\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)|1\rangle.$$

En la base computacional será el vector columna

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \\ e^{i\tau}\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \end{pmatrix}$$

## Compuertas Cuánticas

El efecto de aplicar  $R_z(\theta)$  a este estado será:

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sigma}{2}) \\ e^{i\tau} \text{sen}(\frac{\sigma}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos(\frac{\sigma}{2}) \\ e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\tau} \text{sen}(\frac{\sigma}{2}) \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sigma}{2}) \\ e^{i\theta} e^{i\tau} \text{sen}(\frac{\sigma}{2}) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\theta}{2}} (\cos(\frac{\sigma}{2})|0\rangle + e^{i(\tau+\theta)} \text{sen}(\frac{\sigma}{2})|1\rangle).$$

Eliminando la fase global, el estado resultante de aplicar  $R_z(\theta)$  es:

$$\cos(\frac{\sigma}{2})|0\rangle + e^{i(\tau+\theta)} \text{sen}(\frac{\sigma}{2})|1\rangle.$$

Ha cambiado  $\tau \rightarrow \tau + \theta$ .

Rotación de  $\theta$  alrededor del eje  $z$  de la esfera de Bloch.

## Compuertas Cuánticas

### Teorema

Toda compuerta unitaria  $U$  de 1-qubit admite la descomposición:

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta),$$

- $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  números reales.

Este teorema se cumple por la relación entre compuertas unitarias y rotaciones en la esfera de Bloch vista antes.

## Compuertas Cuánticas

Como no hay nada especial en los ejes  $y$  y  $z$  de la esfera de Bloch:

### Teorema

Toda compuerta unitaria  $U$  de 1-qubit admite la descomposición:

$$U = e^{i\alpha} R_l(\beta) R_m(\gamma) R_l(\delta),$$

- $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  números reales.
- $l$  y  $m$  dos ejes no paralelos de la esfera de Bloch.

## Compuertas Cuánticas

### Corolario

Toda compuerta unitaria  $U$  de 1-qubit se puede escribir en la forma:

$$U = e^{i\alpha}AXBXC,$$

- $A$ ,  $B$  y  $C$  son operadores unitarios que cumplen  $ABC = I$ .

### Ejercicio 2

Pruebe que  $XR_y(\theta)X = R_y(-\theta)$  y  $XR_z(\theta)X = R_z(-\theta)$ .

Rta en diapositiva (36)

# Compuertas Cuánticas

## Compuertas Control-U

- Control-NOT (*CNOT*) es un caso particular.
- Compuerta cuántica de 2-qubits.
- Aplica condicionalmente la compuerta *NOT* en el segundo qubit (*target*) cuando el primer qubit (*control*) está en el estado  $|1\rangle$ .

$$\begin{aligned}c - NOT|0\rangle|\psi\rangle &= |0\rangle|\psi\rangle \\c - NOT|1\rangle|\psi\rangle &= |1\rangle NOT|\psi\rangle.\end{aligned}$$

## Compuertas Cuánticas

### Compuertas Control-U

De la misma forma que la *CNOT* se puede definir la compuerta *Control-U* ( $c-U$ ) para cualquier compuerta de 1-qubit  $U$  que será una compuerta de 1-qubit que cumple con:

$$\begin{aligned} c-U|0\rangle|\psi\rangle &= |0\rangle|\psi\rangle \\ c-U|1\rangle|\psi\rangle &= |1\rangle U|\psi\rangle. \end{aligned}$$

El símbolo de la compuerta  $c-U$  es:





## Compuertas Cuánticas

### Ejercicio 3

Obtenga el resultado de la acción de la compuerta *CNOT* sobre las bases siguientes:

$$a) B_1 = \left\{ |0\rangle \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), |0\rangle \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), |1\rangle \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), |1\rangle \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right\},$$

$$b) B_2 =$$

$$\left\{ \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

### Ejercicio 4

Pruebe que la compuerta  $c-U$  corresponde al operador

$$|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U.$$

Respuestas en diapositiva 39

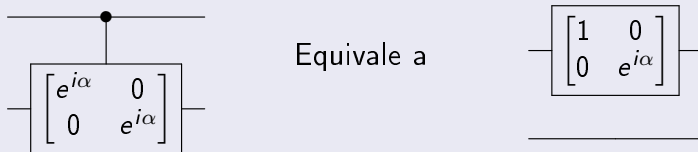
## Compuertas Cuánticas

Circuito equivalente a la compuerta  $c-U$  usando compuertas de 1-qubit y compuertas  $CNOT$

- Usamos  $U = e^{i\alpha}AXBXC$

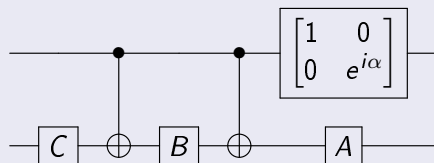
### Desfasaje controlado

- Aplica  $e^{i\alpha}$  sobre el bit target en forma controlada por el bit control



## Compuertas Cuánticas

### Circuito equivalente a la compuerta $c-U$



- Si el qubit de control es  $|1\rangle \Rightarrow U = e^{i\alpha}AXBXC$  se aplica al segundo qubit.
- Si el qubit control es  $|0\rangle$  la operación  $ABC = I$  es aplicada al segundo qubit.

# Conjuntos Universales de Compuertas Cuánticas

## La compuerta de *Hadamard*

- Transforma la base computacional de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

- Representación matricial (en base computacional)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

## Conjuntos Universales de Compuertas Cuánticas

La compuerta de Hadamard es su auto-inversa  $H = H^{-1}$

$$\begin{aligned} H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) &= |0\rangle \\ H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) &= |1\rangle. \end{aligned}$$

La compuerta  $T$  o de fase  $\frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} T|0\rangle &= |0\rangle \\ T|1\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle. \end{aligned}$$

con representación matricial:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

Equivale a

$$T = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix}$$

## Conjuntos Universales de Compuertas Cuánticas

### Definición

Un conjunto de compuertas se dice *universal* si todo operador unitario de n-qubits puede ser reemplazado por un circuito cuántico que use solamente compuertas de ese conjunto.

### Definición

Una compuerta de 2-qubits se conoce como *entangling* si para algún vector entrada producto  $|\psi\rangle|\phi\rangle$  la salida de la compuerta no es un estado producto, o dicho de otra manera es *entangled*.

## Conjuntos Universales de Compuertas Cuánticas

### Teorema

El conjunto formado por alguna compuerta entangling de 2-qubits y *todas* las compuertas de 1-qubit es universal.

- Ej:  $CNOT + (\text{todas las compuertas de 1-qubit}) = \text{universal}$ .

### Teorema

El conjunto  $\{H, T\}$  es universal para compuertas de 1-qubit.

### Teorema

El conjunto  $\{CNOT, H, T\}$  es un *conjunto universal de compuertas*.

## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### Mediciones proyectivas completas

- Muy usadas en computación y comunicación cuánticas.
- Los protocolos de codificación superdensa y teleportación cuántica están basados en mediciones de Von Neumann.

Sea  $|\psi\rangle$  expresado en la base ortonormal  $|\varphi_j\rangle$  :

$$|\psi\rangle = \sum_j \alpha_j |\varphi_j\rangle.$$

- Una medición de Von Neumann de  $|\psi\rangle$  con respecto a la base  $\{|\varphi_j\rangle\}$  dará como resultado 'j' y el estado quedará en  $|\varphi_j\rangle$  con probabilidad  $|\alpha_j|^2$ .



## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### Circuito cuántico para registrar la medición de Von Neumann

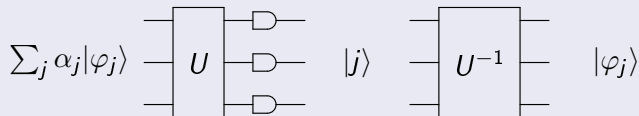
- 1 se construye un circuito que realiza la transformación unitaria:

$$U|\varphi_j\rangle = |j\rangle$$

- $j$  se supone en  $n$ -bit binario y  $|j\rangle$  es el estado de la base computacional correspondiente de  $n$ -qubits.
  - $U$  hace el cambio de base de la  $\{|\varphi_j\rangle\}$  a la computacional.
- 2 Se mide el registro  $|j\rangle$  en la base computacional.
  - 3 Se aplica  $U^{-1}$  (recorriendo el circuito de  $U$  hacia atrás y reemplazando cada compuerta por su inversa).

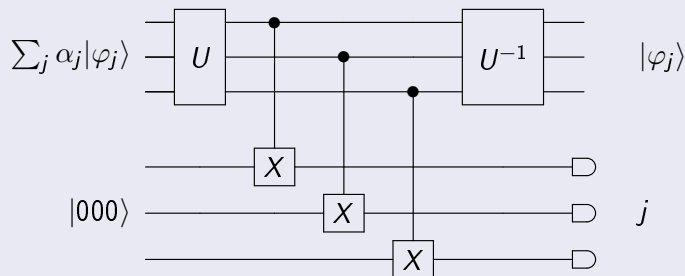
## Mediciones con Circuitos Cuánticos

Circuito cuántico para registrar la medición de Von Neumann



## Mediciones con Circuitos Cuánticos

Una alternativa posible en la que no se mide el estado intermedio en la base computacional:



- En este circuito se registran los qubits en los cables inferiores que son medidos luego en la base computacional.

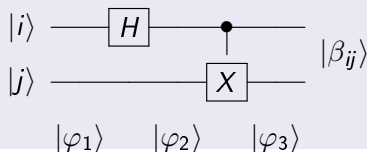
## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### Ejemplo de cambio de base $U$

- Esta base se conoce como *base de Bell* y sus estados como *estados de Bell* (también llamados *pares EPR*).

$$\begin{aligned}
 |\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle & |\beta_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\
 |\beta_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle & |\beta_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle
 \end{aligned}$$

### Circuito base computacional $\Rightarrow$ Base de Bell



## Mediciones con Circuitos Cuánticos

Verificación para  $|\varphi_1\rangle = |00\rangle$

- 1 Después de la compuerta de Hadamard:

$$\begin{aligned} |\varphi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle). \end{aligned}$$

- 2 Luego la compuerta control-NOT:

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

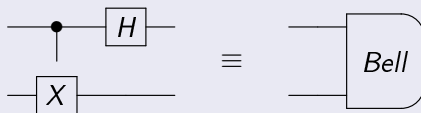
Por lo tanto  $|\varphi_3\rangle = |\beta_{00}\rangle$ .

- Se puede verificar de la misma forma que los otros estados de la base computacional  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  y  $|11\rangle$  son transformados en  $|\beta_{01}\rangle$ ,  $|\beta_{10}\rangle$  y  $|\beta_{11}\rangle$  respectivamente.

## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### *Medición de Bell* (medición de Von Neumann respecto a la base de Bell)

- 1 Aplicar el circuito de la Figura anterior en sentido inverso.
  - 2 Medir en la base computacional.
  - 3 Aplicar el mismo circuito en directa.
- Si sólo importa la salida clásica de la medición,  $\{00, 10, 01, 11\}$ , no hay necesidad de hacer el cambio de base a la de Bell después de la medición y alcanza con el circuito:



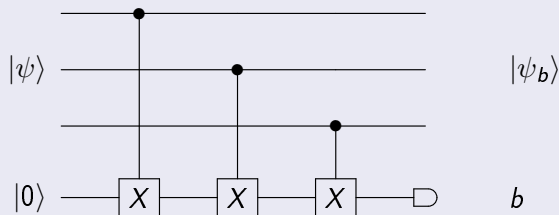
## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### Ejemplo de medición proyectiva incompleta: Paridad

- Cualquier estado de entrada  $|\psi\rangle = \sum_x \beta_x |x\rangle$  se puede expresar como  $|\psi\rangle = \alpha_0 |\psi_0\rangle + \alpha_1 |\psi_1\rangle$ .
- $\alpha_i = \sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}$  y  $|\psi_i\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\alpha_i}$
- La medición de paridad resultará 0 y el estado  $|\psi_0\rangle$  con probabilidad  $|\alpha_0|^2$  o 1 y el estado  $|\psi_1\rangle$  con probabilidad  $|\alpha_1|^2$ .

## Mediciones con Circuitos Cuánticos

### Circuito que calcula la paridad de estados de 3 qubits



- La medición de cada uno de los 3 qubits por medio de las compuertas Control-NOT producirá el estado  $|\psi_b\rangle$  como estado de salida con probabilidad  $|\alpha_b|^2$  con  $b = 0, 1$ .



## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 1

Recordemos la expansión en serie de Taylor de  $e^x$ ,  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , con  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (1)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (3)$$

## Resolución de ejercicios

### sigue Ejercicio 1

De la misma forma para una matriz cuadrada  $A$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!}$$

Por lo tanto:

$$e^{i\beta A} = I + (i\beta A) + \frac{(i\beta A)^2}{2!} + \frac{(i\beta A)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\beta A)^k}{k!} \quad (4)$$

- Recordemos que se debe cumplir  $A^2 = I$  y que  $i = \sqrt{-1}$

## Resolución de ejercicios

## Final Ejercicio 1

Reagrupando

$$e^{i\beta A} = \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{(2k)!} + \dots\right)I + \left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots\right)A \quad (5)$$

Se comprueba entonces

$$e^{i\beta A} = \cos(\beta)I + i \sin(\beta)A$$

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 2)

$$X R_y(\theta) X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\text{sen}(\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X R_y(\theta) X = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \text{sen}(\theta/2) \\ -\text{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\text{sen}(-\theta/2) \\ \text{sen}(-\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$X R_z(\theta) X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\theta Y}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta Y}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

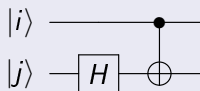
$$X R_z(\theta) X = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\theta Y}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta Y}{2}} \end{bmatrix} \equiv R_z(-\theta)$$

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 3

a)

Empezamos escribiendo el circuito:



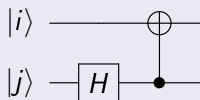
En la siguiente tabla se resume el resultado de aplicar C-Not:

$$\begin{array}{l}
 |0\rangle \left( \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \mapsto |0\rangle \left( \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 |0\rangle \left( \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \mapsto |0\rangle \left( \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 |1\rangle \left( \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \mapsto |1\rangle \left( \frac{|1\rangle+|0\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 |1\rangle \left( \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \mapsto |1\rangle \left( \frac{|1\rangle-|0\rangle}{\sqrt{2}} \right)
 \end{array} \quad (6)$$

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 3

¿Qué sucede si ahora el circuito es el siguiente?



$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} |0\rangle \\ |1\rangle \end{array} \mapsto \left. \begin{array}{l} \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} |0\rangle \\ |1\rangle \end{array} \mapsto \left. \begin{array}{l} \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (7)$$

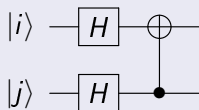
¡Estados entangled!

(volver a diapositiva (17))

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 3

b) El circuito



$$\begin{pmatrix} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \frac{|00\rangle+|01\rangle+|11\rangle+|10\rangle}{2} \\ \frac{|00\rangle+|01\rangle+|11\rangle-|10\rangle}{2} \\ \frac{|00\rangle+|01\rangle-|11\rangle-|10\rangle}{2} \\ \frac{|00\rangle-|01\rangle-|11\rangle+|10\rangle}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 4

Primero veamos la expresión matricial de cada término

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego } c - U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$



## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 4

Veamos un Ejemplo: Sea  $U = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  La compuerta control tiene la representación matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Supongamos

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Resolución de ejercicios

## Ejercicio 4

$$c - U|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$