INTRODUCCIÓN

Qué es una computadora?

Dispositivo físico para procesar información a través de algoritmos.

Algoritmo: procedimiento definido para procesar información realizable físicamente.

Complejidad: Cantidad de recursos usados por la computadora para resolver un problema.

Tiempo y **Espacio** (Memoria)

Depende de la computadora

Ejemplo: $2n^2 + 3$ y $4n^3 + n + 7$ para dos computadoras distintas.

n unidades de tiempo.

Para abstraerse de los detalles de las máquinas Medida gruesa

$O(n^2)$ y $O(n^3)$ cota superior del tiempo requerido. $O(n^2)$ y $O(log(n))$ están en $O(n^3)$.

Algoritmo eficiente si tiene dependencia polinomial: $O(n^k)$

$O(n)$ es lineal

$O(log(n))$ logarítmica

También eficientes.

Si el tiempo de un algoritmo no puede ser acotado por ninguna polinomial tiene un tiempo super polinomial y se habla (típicamente) de dependencia exponencial: $O(c^n)$.

Esta medida gruesa de la complejidad permite independizarse del modelo de computación. Por ejemplo, el tiempo que lleva mover la información de un lado a otro es lineal en n y no influye en la relación polinomial versus exponencial.

Computadoras: rango amplio que va desde las netbooks hasta las supercomputadoras usadas por la NASA. Parece entonces que habría que dividir el problema de la eficiencia por categorías. Pero la Tesis de Church-Turing afirma que *todo problema que sea resuelto por una Máquina de Turing puede ser resuelto en cualquier computadora.*

Tesis de Church-Turing (versión fuerte):

Todo problema resoluble algorítmicamente de forma eficiente puede ser resuelto eficientemente con una Máquina de Turing.

En los primeros años parecía que las computadoras analógicas podían resolver eficientemente problemas que no tenían solución eficiente en la máquina de Turing. Pero cuando se consideró el ruido en las computadoras analógicas se vió que no eran más eficientes que la de Turing. El primer obstáculo con el que se encontró la versión fuerte de la tesis de Church Turing fue cuando Solovay y Strassen mostraron que era posible ver con cierta *probabilidad* si un entero es *primo* o no usando números aleatorios. Repitiendo el procedimiento se puede acercarse a la certeza en la primalidad. Todavía no se conoce ningún test de primalidad determinístico.

Modificación de la Tesis de Church-Turing (versión fuerte):

Todo problema resoluble algorítmicamente de forma eficiente puede ser resuelto eficientemente con una Máquina de Turing probabilística.

Una máquina de Turing *probabilística* sería una con un generador aleatorio como una moneda.

Es ésto universalmente válido?

El problema es que la formulación es clásica y con la física clásica no se puede simular la cuántica.

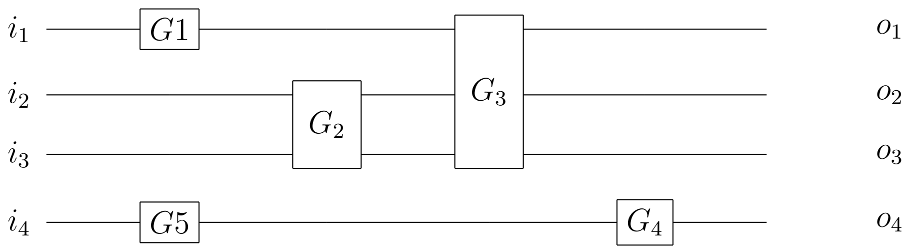
Tesis Cuántica de Church-Turing (versión fuerte):

Todo problema resoluble algorítmicamente de forma eficiente puede ser resuelto eficientemente con una Máquina de Turing cuántica.

Si bien la versión clásica está aceptada, la cuántica todavía no.

A. Modelo de Circuitos

Circuitos de cables que llevan bits a compuertas que realizan operaciones elementales sobre ellos.



Universalidad

Un conjunto finito de compuertas es suficiente para construir el circuito para hacer cualquier cálculo.

Definición

Un conjunto de compuertas es universal en *computación clásica* si para toda función $f : [0,1]^n \rightarrow [0,1]^m$ con n y m enteros positivos se puede construir un circuito que tenga exclusivamente compuertas de dicho conjunto.

Ejemplo

$[NAND, FANOUT]$

NAND es la negación de **AND** y **FANOUT** hace dos outputs de un mismo input.

Si nos restringimos a compuertas reversibles, hay que remontarse a compuertas de 3 bits como la de **Toffoli** que invierte el tercer bit si los otros dos están en 1 y lo deja igual si no.

La compuerta de **Toffoli** sola es universal para computación clásica.

Así como hablamos de máquina de Turing probabilística, en términos de circuitos podríamos pensar en circuitos probabilísticos que tengan *compuertas aleatorias* que actúan sobre un bit generando como salida un bit aleatorio.

La complejidad en el circuito está dada por el número de compuertas, la *profundidad* que es el número de etapas temporales dadas por la acción de compuertas individualmente o en paralelo. La *profundidad* en el circuito anterior sería 4 mientras las compuertas son 5. La *profundidad* es equivalente al tiempo. El *espacio* estaría asociado al *ancho* del circuito que es el número de cables o bits, 4 en la figura anterior.

B. Álgebra Lineal para el Modelo de Circuitos

Sea el circuito de la figura anterior y nos dan como dato los valores de los inputs: $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4$. Si nos pidieran los outputs, tendríamos que ir siguiendo los bits de izquierda a derecha a medida que pasan por las compuertas en los cables. Para un circuito *determinístico* el estado en cada cable está dado por el valor del bit (0 o 1).
Para un circuito *probabilístico* cada bit podrá estar en 0 con probabilidad p_0 y en 1 con p_1. Vector de probabilidades:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Un cable con estado 0 en un circuito determinístico se representa por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el de estado 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las compuertas serán entonces representadas por *operadores* que actúan sobre los vectores de estado. Por ejemplo:

$$NOT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad NOT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$NOT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La acción de la compuerta sobre un estado:

$$NOT \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

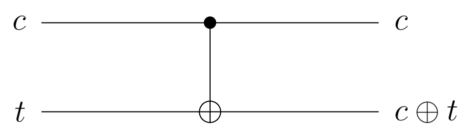
Estado de 2 cables: el primero dado por: p_0 y p_1 y el segundo por q_0 y q_1. Las posibilidades del estado combinado son: $\{00,\ 01,\ 10,\ 11\}$. $Prob(i,j) = p_i q_j$. El estado combinado en ambos cables será representado por:

$$\begin{pmatrix} p_0 q_0 \\ p_0 q_1 \\ p_1 q_0 \\ p_1 q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

Compuertas que actúan sobre mas de 1 cable, por ejemplo la **CNOT** (*controlled-NOT*) actúa sobre el bit *control* y el bit *target*. Aplica **NOT** sobre el bit *target* si el bit *control* está en 0 y lo deja igual si está en 1. El bit control queda inalterado.

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CNOT \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



C. Notación de Dirac

Espacios vectoriales de números complejos y de dimensión finita. Miembros de una clase de espacios vectoriales llamados espacios de Hilbert $\mathcal{H}$. Dimensión 2^n, con n entero positivo. <u>Base Computacional</u>:

$$\underbrace{|00\ldots00\rangle}_{n}, \quad |00\ldots01\rangle, \quad \ldots, \quad |11\ldots10\rangle, \quad |11\ldots11\rangle$$

que se corresponden con los vectores columna:

$$|00\ldots00\rangle \Longleftrightarrow \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} 2^n, \qquad |00\ldots01\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

La notación de Dirac *Ahorra espacio* : En n-qubit estados los vectores columna son 2^n dimensionales mientras que en notación de Dirac son n números binarios.

Ejemplo

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\,|11\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\,|1\rangle \otimes |1\rangle$$

se escribe como vector columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Vectores Duales

Producto interno o escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & \ldots & v_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^* w_i$$

En notación de Dirac el producto escalar es:

$$\langle\chi|\,|\psi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|01\rangle + \tfrac{i}{\sqrt{3}}\,|11\rangle \\ |\phi\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\end{aligned}$$

como vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y el producto interno es:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{6}}$$

El producto interno de vectores ortogonales es 0. La *norma* de $|\psi\rangle$ es:

$$||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Un conjunto ortonormal es un conjunto de vectores ortogonales de norma 1 (unitarios).
Base Ortonormal está formada por un conjunto de vectores $\{|b_n\rangle\}$ que cumplen:

$$\langle b_n|b_m\rangle = \delta_{n,m}$$

y todo vector $|\psi\rangle$ se escribe como:

$$|\psi\rangle = \sum_n \psi_n\,|b_n\rangle\,,$$

con

$$\psi_n \in \mathbb{C}$$

$$\psi_n = \langle b_n|\psi\rangle$$

son los coeficientes de ψ en la base $\{|b_n\rangle\}$
Los vectores de la base computacional en $\mathcal{H}$ son $|00\rangle\,, |01\rangle\,, |10\rangle\,, |11\rangle$.

Ejercicio: Escriba estos vectores de la base en formato columna y verifique ortonormalidad. Calcule el producto interno anterior

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{6}}$$

usando notación de Dirac.
Otra base distinta de la computacional en $\mathcal{H}$ de dimensión 2 es la de *Hadamard* que en términos de la computacional se escribe:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned}$$

Ejercicio: Verifique ortonormalidad en la base de *Hadamard*.
La base ortonormal para $\mathcal{H}^*$ es la *base dual* $\{\langle b_n|\}$

D. Operadores

Un operador lineal es una transformación que actúa sobre vectores de $\mathcal{H}$ y produce vectores de $\mathcal{H}$.
Producto Externo $|\psi\rangle\langle\phi|$

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)\,|\gamma\rangle = (\langle\phi|\gamma\rangle)\,|\psi\rangle\,.$$

El *proyector ortogonal* sobre $|\psi\rangle$ es el producto externo de $|\psi\rangle$ consigo mismo $|\psi\rangle\langle\psi|$ y proyecta sobre $|\psi\rangle$:

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\phi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)\,|\psi\rangle$$

O sea proyecta al vector $|\phi\rangle$ sobre el subespacio unidimensional generado por $|\psi\rangle$.
Teorema
Sea $\{|b_n\rangle\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial $\mathcal{H}$. Todo operador lineal T de $\mathcal{H}$ se puede escribir de la forma:

$$T = \sum_{n,m} T_{n,m}\,|b_n\rangle\langle b_m|$$

con $T_{n,m} = \langle b_n|T|b_m\rangle$.

El conjunto de los operadores lineales en el espacio vectorial $\mathcal{H}$ forma un nuevo espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En este teorema se construye una base para $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a partir de la base de $\mathcal{H}$. La acción de T es entonces:

$$T|\psi\rangle = \sum_{n,m} T_{n,m}|b_n\rangle\langle b_m|\psi\rangle = \sum_{n,m} T_{n,m}\langle b_m|\psi\rangle|b_n\rangle$$

$T_{n,m}$ es el elemento n, m de la matriz T.

Ejemplo: Sea el operador Z que actúa sobre la base computacional de la forma:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow -|1\rangle . \end{aligned}$$

Z puede escribirse:

$$|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

y en representación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Completitud

$$I = \sum_n |b_n\rangle\langle b_n|$$

La suma sobre todas las proyecciones de la base da la *Identidad*.

Operador Adjunto

$T^\dagger$ es el adjunto de T si:

$$(\langle\psi|T^\dagger|\phi\rangle)^* = \langle\phi|T|\psi\rangle, \forall|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

En términos de matrices, la matriz de $T^\dagger$ es la *compleja conjugada transpuesta* de T.

Los operadores asociados a la evolución temporal de estados cuánticos en sistemas cerrados son *unitarios*.

Un operador es *unitario* si $U^\dagger = U^{-1}$ con U^{-1} el inverso de U. Ésto implica que $U^\dagger U = I$. Los operadores *unitarios* preservan la *norma* de los vectores, característica fundamental para los estados cuánticos.

T es *hermítico* o *auto-adjunto* si $T^\dagger = T$.

Un *proyector* P es un operador lineal sobre $\mathcal{H}$ que cumple $P^2 = P$. Si además es ortogonal también $P^\dagger = P$.

$|\psi\rangle$ es autovector de T si

$$T|\psi\rangle = c|\psi\rangle$$

donde c es el autovalor.

Si $T = T^\dagger \implies T|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Los autovalores de un operador hermítico son reales. Ésto se cumple para operadores asociados con magnitudes *medibles* en mecánica cuántica.

La *traza* de A operador en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es:

$$Tr(A) = \sum_n \langle b_n|A|\, b_n\rangle$$

donde $\{|b_n\rangle\}$ es alguna base ortonormal de $\mathcal{H}$. Se puede demostrar que $Tr(A)$ no depende de la base ortonormal elegida, estando así bien definida.

E. El teorema Espectral

Un operador *normal* satisface:

$$AA^\dagger = A^\dagger A$$

Tanto los operadores *hermíticos* como los *unitarios* son *normales*.

Teorema Espectral: Todo operador *normal* T se puede escribir:

$$T = \sum_i T_i |T_i\rangle \langle T_i|$$

con T_i y $|T_i\rangle$ los autovalores y autovectores de T respectivamente.

Otra forma de expresar el teorema espectral es:

$$T = P\Lambda P^\dagger$$

con Λ una matriz diagonal con los autovalores de T y P una matriz unitaria con los autovectores de T como columnas de la matriz.
Ejercicio: Encuentre P y Λ para el operador:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F. Funciones de Operadores

De acuerdo al teorema espectral:

$$T = \sum_i T_i \left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right|$$

Dado que $\left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right|$ es un proyector cumple que:

$$(\left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right|)^m = \left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right|$$

para cualquier entero m. Además los autovectores son ortonormales, así que $\left\langle T_i \right| T_j\rangle = \delta_{i,j}$, con $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Ésto significa que para elevar T a una potencia m sólo hace falta calcular las correspondientes potencias de los elementos de la diagonal en el desarrollo espectral.

$$T^m = (\sum_i T_i \left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right|)^m = \sum_i T_i^m \left| T_i \right\rangle \left\langle T_i \right| .$$

La serie de Taylor para una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m .$$

Por ejemplo la serie de Taylor para e^x es $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m} x^m$. Para todo x que se encuentre en el *intervalo de convergencia* la serie de Taylor converge al valor de la función.
De esta forma podemos definir la acción de funciones f sobre *operadores* sobre $\mathbb{C}$. Por

ejemplo:

$$e^T = \sum_m \frac{1}{m!} T^m$$

y en general para una función f que actúa sobre T:

$$f(T) = \sum_m a_m T^m,$$

que usando la descomposición espectral da:

$$\begin{aligned} f(T) &= \textstyle\sum_m a_m (\sum_i T_i \left|T_i\right\rangle \left\langle T_i\right|)^m \\ &= \textstyle\sum_m a_m \sum_i T_i^m \left|T_i\right\rangle \left\langle T_i\right| \\ &= \textstyle\sum_i (\sum_m a_m T_i^m) \left|T_i\right\rangle \left\langle T_i\right| \\ &= \textstyle\sum_i f(T_i) \left|T_i\right\rangle \left\langle T_i\right| . \end{aligned}$$

O sea que con T expresada en forma diagonal, $f(T)$ se calcula aplicando f a los elementos diagonales de T.

G. Producto Tensorial

El *producto tensorial* es una forma de combinar espacios, vectores y operadores. Supongamos que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert de dimensión n y m respectivamente. El espacio resultante del producto vectorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert nuevo y más grande de dimensión $n \times m$. Supongamos que $\{|b_i\rangle\}, 1 \leq i \leq n$ sea una base ortonormal de $\mathcal{H}_1$ y $\{|c_j\rangle\}, 1 \leq j \leq m$ sea una base ortonormal de $\mathcal{H}_2$, entonces $\{|b_i\rangle \otimes |c_j\rangle\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

El producto tensorial de dos vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ de los espacios $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente es un vector en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ representado por $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. El producto tensorial cumple con:

1.-

$$c(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (c\,|\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes (c\,|\psi_2\rangle).$$

2.- Sean $|\psi_1\rangle$, $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$,

$$(|\psi_1\rangle + |\phi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

3.- Sean $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi_2\rangle , |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$,

$$|\psi_1\rangle \otimes (|\psi_2\rangle + |\phi_2\rangle) = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$$

Supongamos que A y B son operadores que actúan en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente. Entonces $A \otimes B$ es un operador que actúa sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ definido por:

$$(A \otimes B)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = A\,|\psi_1\rangle \otimes B\,|\psi_2\rangle$$

y en general

$$(A \otimes B)\Big(\sum_{ij} \lambda_{ij}\,|b_i\rangle \otimes |c_j\rangle\Big) = \sum_{ij} \lambda_{ij} A\,|b_i\rangle \otimes B\,|c_j\rangle$$

La representación matricial de $(\alpha_0\,|0\rangle + \alpha_1\,|1\rangle) \otimes (\beta_0\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle)$ es

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}$$

En general $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ se escribe $|\psi\rangle\,|\phi\rangle$ o directamente $|\psi\phi\rangle$.

H. Teorema de Descomposición de Schmidt

Teorema Si $|\psi\rangle$ es un vector del espacio $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, entonces existen bases ortonormales $\left|\phi_i^A\right\rangle$ y $\left|\phi_i^B\right\rangle$ de $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ respectivamente y números no-negativos $\{p_i\}$ de forma que:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\,\left|\phi_i^A\right\rangle \left|\phi_i^B\right\rangle .$$

Es importante notar que en un desarrollo común se escribiría:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\,\left|\phi_i^A\right\rangle \left|\phi_j^B\right\rangle .$$

con $\alpha_{i,j}$ números complejos en general y términos cruzados con $i \neq j$

Ejemplo (trivial)

$|11\rangle$ pertenece a un espacio 4-dimensional $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ con $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ de dimensión 2. Este vector ya está escrito en términos de las bases de Schmidt:

$$\{\left|\phi_0^A\right\rangle = |0\rangle\,, \quad \left|\phi_1^A\right\rangle = |1\rangle\},$$
$$\{\left|\phi_0^B\right\rangle = |0\rangle\,, \quad \left|\phi_1^B\right\rangle = |1\rangle\},$$

Los coeficientes de Schmidt para este caso son $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$.

Ejercicio

Sea $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$.

En este caso la base computacional no sirve como base de Schmidt. Verifique que las bases de *Hadamard* en $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ son la base de Schmidt. Halle p_0 y p_1.

El teorema de descomposición de Schmidt puede ser aplicado a espacios vectoriales bipartitos mas complicados, aun cuando los dos subespacios tienen diferentes dimensiones.