Guía de problemas 1

Antes de comenzar, resumen de la notación de Dirac:

Notación	Descripción
z^*	complejo conjugado del número complejo z.
	$(a+ib)^* = (a-ib)$
$\lvert\psi\rangle$	Vector. Se conoce como *ket*
$\langle\psi\rvert$	Vector dual de $\lvert\psi\rangle$. Se conoce como *bra*.
$\langle\varphi\lvert\psi\rangle \equiv \langle\varphi\rvert\lvert\psi\rangle$	Producto interno entre los vectores $\lvert\varphi\rangle$ y $\lvert\psi\rangle$.
$\lvert\varphi\rangle \otimes \lvert\psi\rangle$	Producto tensorial de $\lvert\varphi\rangle$ y $\lvert\psi\rangle$.
$\lvert\varphi\rangle\lvert\psi\rangle$	Producto tensorial abreviado de $\lvert\varphi\rangle$ y $\lvert\psi\rangle$.
A^*	Complejo conjugado de la matriz A.
A^T	Transpuesta de la matriz A
$A^\dagger$	hermítico conjugado o adjunto de la matriz A, $A^\dagger = (A^T)^*$
	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$
$\langle\varphi\lvert A\psi\rangle$	Producto interno entre los vectores $\lvert\varphi\rangle$ y $A\lvert\psi\rangle$.
	Es equivalente al producto interno entre $A^\dagger\lvert\varphi\rangle$ y $\lvert\psi\rangle$

1 Álgebra lineal

(1) Autovalores y Autovectores

Calcule los autovalores y los autovectores de las siguientes matrices

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_x = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y = Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_z = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(2) Producto interno

Para una matriz M, sea $M^\dagger = (M^T)^*$, donde M^T es la transpuesta de M, y $*$ denota el conjugado del complejo M.

Dados los siguientes vectores $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule

(a) $v^\dagger \cdot v$
(b) $v^\dagger \cdot w$
(c) $v \cdot v^\dagger$
(d) $v^\dagger X w$

(3) Suponiendo que V es un espacio de estados con vectores base $ket0$ y $|1\rangle$, y A es un operador de V a V tal que $A|0\rangle = -i|1\rangle$ y $A|1\rangle = |0\rangle$. Obtenga la expresión matricial del operador A.

(4) Verifique que $|v\rangle = (1,1)^T$ y $|w\rangle = (1,-1)^T$ son ortogonales. ¿Cuáles son las formas normalizadas de estos vectores?

(5) Las matrices de Pauli pueden ser consideradas como operadores respecto de la base ortonormal $|0\rangle, |1\rangle$ para un espacio bidimensional de Hilbert. Exprese cada operador de Pauli en notación de producto externo.

(6) Sean $|w\rangle$ y $|v\rangle$ dos vectores cualesquiera, pruebe que $|w\rangle\langle v|^\dagger = |v\rangle\langle w|$

2 Producto tensorial

(1) Se $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Escriba $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ y $|\psi\rangle^{\otimes 3}$, en términos de producto tensorial.

(2) Calcule la representación tensorial de los productos los productos tensoriales entre operadores de Pauli, a) X y Z, b) I y X, c) X e I

3 Qubits

(1) ¿Cuáles de los siguientes son posibles estados de un qubit?

(a)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle \tag{2}$$

(b)

$$0.25|0\rangle + 0.75|1\rangle \tag{3}$$

(c)

$$0.6|0\rangle + 0.8|1\rangle \tag{4}$$

(d)

$$i\cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \tag{5}$$

Para cada estado válido, exprese la probabilidad de observar $|0\rangle$ y $|1\rangle$ cuando el sistema se mide en la base computacional estándar.
¿Cuál es la probabilidad de esos resultados cuando se los mide en la base $|+\rangle$,$|-\rangle$?

(2) Un sistema de dos qubits está en el siguiente estado

$$\frac{1}{\sqrt{30}}(|00\rangle + 2i|01\rangle - 3|10\rangle - 4i|11\rangle) \tag{6}$$

Se mide el primer qubit y se observa que es 1. ¿Cuál es el estado del sistema luego de la medición?¿Cuál es la probabilidad de que una medición subsecuente del segundo qubit de como resultado 1?