Principios Fundamentales aplicables a la Mecánica de los Fluidos

Principios Fundamentales

Si pensamos en una cierta masa M -un conjunto definido de partículas materiales de Fluido- que se mueve y evoluciona en el espacio interactuando con el medio que la rodea, esta evolución estará regida por las Leyes Fundamentales de la Física:

1. Conservación de la Masa
2. Conservación del Momentum Lineal (2^{da} Ley de Newton)
3. Conservación del Momentum Angular
4. 1^{er} Principio de la Termodinámica (Conservación de la Energía)
5. 2^{do} Principio de la Termodinámica

Con estos principios podremos resolver cualquier problema de la Mecánica de Fluidos. Ahora bien, existe una variada gama de formas en que estos principios pueden expresarse y particularizarse en casos específicos. De manera general, tendremos dos formulaciones (expresiones de dichos principios) básicas:

a) Formulación Diferencial: expresiones de los principios fundamentales para cada partícula de fluído (expresión punto a punto), que la mayoría de las veces adquieren la forma de Ecuaciones Diferenciales. En esta formulación nos interesa un alto grado de detalle, dar el *campo* de velocidades, de presiones, de temperaturas, etc, para cada punto o partícula del fluido.

b) Formulación Integral : expresiones de dichos principios para un Sistema de Partículas -conjunto de partículas- o masa M de fluído, que la mayoría de las veces adquieren la forma de Expresiones Integrales y Globales (Formulación de Volúmenes de Control). En esta formulación, más ingenieril, provee de cantidades integrales o globales, tales como la caída de presión entre los extremos de una cañería, el torque actuante sobre el rotor de una turbina, el coeficiente de arrastre aerodinámico de un automotor, etc.

El buen criterio a desarrollar por el ingeniero será, frente a los requerimientos de un diseño o problema a resolver, poder decidir entre ambas formulaciones, entre el nivel de detalle-exactitud requerido y los costos en tiempo, recursos materiales y humanos necesarios para lograr dicho nivel. Por lo general, la formulación diferencial estará asociada a soluciones de gran detalle pero de alto costo, contrariamente a la formulación integral. Aunque en numerosos casos son complementarias, más aún con el advenimiento de las técnicas computacionales como herramientas estándar del ciclo de diseño.
Dado que estos principios están asociados a partículas materiales y no a puntos del espacio, tendremos que encontrar la manera de expresar dichas leyes desde el punto de vista Euleriano, es decir, para un punto fijo en el espacio en el caso de la Formulación Diferencial y, para un Volumen de Control (volumen fijo en el espacio) en el caso de la Formulación Integral. Esta cuestión surge como problema debido a que las leyes físicas se refieren a partículas materiales que se mueven en el espacio, y por lo tanto debería identificárselas y seguirlas en su movimiento, siendo la descripción natural la Lagrangeana o Material. Pero en fluidos esta descripción se torna prácticamente en irrealizable, por lo menos en el largo plazo, dado que partículas que están muy lejos pueden terminar muy cerca y viceversa, llevando a funciones con estructura compleja y/o discontinuas. Entonces, la solución debe buscarse en expresar estas leyes (naturalmente materiales) en un marco descriptivo de carácter espacial.

Pensemos entonces que dada una cantidad extensiva (por unidad de masa) ϕ asociada a cada partícula, la cantidad total asociada a la masa M que ocupa en el tiempo t un volumen $\Omega(t)$, estará dada por:

$$\Phi(t) = \int_{\Omega(t)} \rho\,\phi\ dV$$

siendo ρ la densidad, observar que $\rho.dV = dm$, es el diferencial de masa. En particular, puede escribirse que la masa M está dada por,

$$M = \int_{\Omega(t)} \rho\ \ dV\,.$$

Debe tenerse en cuenta que tanto ρ como ϕ son funciones de $\boldsymbol{x}$ y t.
Si $\Omega(t)$ es el volumen del espacio que va ocupando la masa de partículas M a medida que el tiempo transcurre, tendremos que el cambio con el tiempo de la cantidad integral $\Phi(t)$ (su tasa o variación temporal) asociada a la masa M estará dado por:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \phi\,\rho \;\mathrm{dV} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho\,\phi \;\mathrm{dV} - \int_{\Omega(t)} \rho\,\phi \;\mathrm{dV}\right)\Big/ \Delta t$$

El movimiento de las partículas define una transformación natural entre el volumen ocupado por el sistema en el tiempo *t*, y el volumen ocupado por el sistema en el tiempo $t + \Delta t$. La relación entre un volumen diferencial en la configuración inicial dV(*t*) y el volumen que ocupan esas mismas partículas en el tiempo $t + \Delta t$, $\mathrm{dV}(t + \Delta t)$, estará dado por el Jacobiano de la transformación, es decir,
$\mathrm{dV}(t + \Delta t) = J\,\mathrm{dV}(t)$. En la figura 5 se observa un sistema de partículas de fluido, que en el tiempo *t* ocupa el volumen $\Omega(t)$. Producto del movimiento de las partículas, luego de un instante Δt, el sistema se habrá desplazado en el espacio ocupando el volumen $\Omega(t + \Delta t)$, correlativamente cada partícula se habrá movido de un punto (posición espacial) $\boldsymbol{x}$ al punto $\boldsymbol{x}'$, cumpliéndose la relación,

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x},t)\,\Delta t \qquad (¤)$$

Por lo tanto es posible escribir,

$$\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(\boldsymbol{x}', t+\Delta t)\;\; \phi(\boldsymbol{x}', t+\Delta t)\;\mathrm{dV}(t+\Delta t) =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \rho(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\Delta t\;,\; t+\Delta t)\,\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\Delta t\;,\; t+\Delta t)\; J.\mathrm{dV(t)}$$

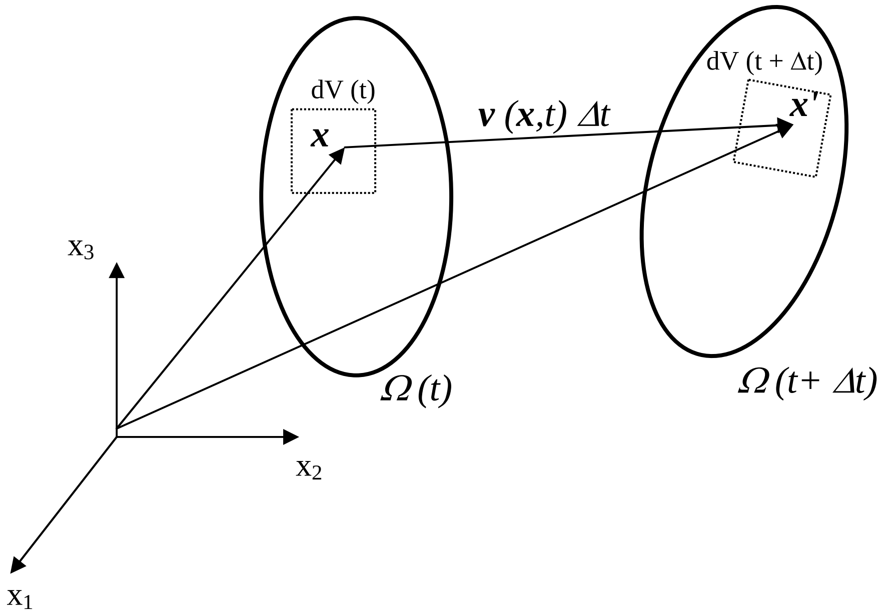


Figura 5

De esta manera hemos logrado expresar la integral en el volumen $\Omega(t + \Delta t)$ y en el tiempo $t + \Delta t$, como función de variables definidas en el volumen $\Omega(t)$ y en el tiempo t.

Recordando que $J\,(\boldsymbol{x}\,,\,t + \Delta\,t) = \left|\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right| = \left|\delta_{ij} + \dfrac{\partial v_i(x_j\,,t)}{\partial x_j}\Delta t\right|$

De la fórmula anterior, desarrollando el determinante y reteniendo sólo los términos de primer orden -lo que será totalmente válido en el límite-, surge inmediatamente que

$J\,(\boldsymbol{x}\,,\,t + \Delta t) = 1 + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{v})\,.\,\Delta t$, observar que esta formula es válida en el caso en que ***x*** y ***x'*** están relacionados de la manera particular expresada en (¤), es decir cuando ***x*** es la posición de las partículas al tiempo *t* y ***x'*** la posición de las mismas al tiempo $t + \Delta t$.
Además,obviamente se tiene en este caso que $J\,(\boldsymbol{x}\,,\,t) = 1$. De esta manera se puede ver que la derivada material del jacobiano en esta transformación infinitesimal es la divergencia del campo de velocidades:

$$\frac{DJ}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} (J\,(x,t+\Delta t) - J\,(x,t))/\Delta t = div\,(\boldsymbol{v}) \qquad (\S)$$

Este resultado será utilizado más adelante. Es importante resaltar el subrayado anterior, ya que esta fórmula es válida cuando la derivada material está evaluada en el tiempo *t* en que $J\,(\boldsymbol{x}\,,\,t) = 1$.

Volviendo a

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho\,\phi\ \mathrm{dV} - \int_{\Omega(t)} \rho\,\phi\ \mathrm{dV}\right)\Big/\Delta t$$

la diferencia de integrales puede ser escrita como

$$\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho\,\phi\ \mathrm{dV} - \int_{\Omega(t)} \rho\,\phi\ \mathrm{dV} =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \rho\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\Delta t\ ,\ t+\Delta t)\,\phi\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\Delta t\ ,\ t+\Delta t)\,J.\mathrm{dV(t)}\ -$$

$$- \int_{\Omega(t)} \rho\,(\boldsymbol{x},\ t)\,\phi\,(\boldsymbol{x},\ t)\,\mathrm{dV(t)} =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\rho\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\,\Delta t\ ,\ t+\Delta t)\,\phi\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\,\Delta t\ ,\ t+\Delta t).\,J\ \text{-}\,\rho\,(\boldsymbol{x},\ t)\,\phi\,(\boldsymbol{x},\ t)\right)\mathrm{dV(t)}$$

entonces, dividiendo por *Δt* y tomando el límite, el paréntesis dentro de la integral resulta:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \phi\,\rho\ \mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\,div(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dV}$$

Otra manera rápida de arribar al mismo resultado es usar la fórmula obtenida en (§) de la siguiente manera,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \phi\,\rho\ \mathrm{dV} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_F} \phi\,\rho\,\mathrm{J}\ \mathrm{dV_F} = \int_{\Omega_F} \frac{D}{Dt}(\phi\,\rho\,\mathrm{J})\,\mathrm{dV_F} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\,\frac{DJ}{Dt}\right)\mathrm{dV} =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\,div(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dV}$$

1. Principio de Conservación de la masa

Si en la ecuación anterior se toma $\phi = 1$, y considerando que la masa del sistema de partículas debe permanecer constante, puede escribirse,

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \rho\ \mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ div(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dV} = 0$$

Como la ecuación anterior debe cumplirse para cualquier volumen de fluido que se considere y, por continuidad, el integrando debe anularse,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \; div(\boldsymbol{v}) = 0$$

Que es la forma diferencial del Principio de Conservación de la Masa, o Ecuación de Continuidad. Dicha ecuación puede reordenarse de la siguiente manera,

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -div(\boldsymbol{v}),$$

lo que indica que ***la divergencia del campo de velocidades es una medida de las variaciones relativas de densidad.*** Definiendo el volumen específico ($v_e = 1/\rho$) como la inversa de la densidad, se llega a,

$$\frac{1}{v_e}\frac{Dv_e}{Dt} = div(\boldsymbol{v})$$

ecuación que puede interpretarse como:

la divergencia del campo de velocidades mide los cambios de volumen por unidad de volumen para una partícula, es decir, nos dice cuanto esa partícula se está comprimiendo o expandiendo, según sea el caso. Por lo tanto, un fluido incompresible, es decir aquel en que el volumen por unidad de masa de cada partícula no varíe con el tiempo, dará como resultado flujos de divergencia nula:

$$\frac{Dv_e}{Dt} = 0 = v_e . div(\boldsymbol{v}) \Rightarrow div(\boldsymbol{v}) = 0.$$

Ahora, haciendo uso de la ecuación de continuidad, podemos reescribir

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \int_{\Omega(t)}\left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\, div(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)}\left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right)\right)\mathrm{dV} =$$

$$= \int_{\Omega(t)}\left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} - \phi\frac{D\rho}{Dt}\right)\mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)}\frac{D\phi}{Dt}\,\rho\,\mathrm{dV}$$

Es decir,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\phi\,\rho\,\mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)}\frac{D\phi}{Dt}\,\rho\,\mathrm{dV} \quad ,$$

lo cual puede leerse como que ***el operador derivada material al entrar en la integral sólo afecta a la función ϕ, ya que ρ.dV = dm es una constante debido a que la masa se conserva.***

Lema de Reynolds

Volviendo a

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \phi\,\rho\ \mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\, div(\boldsymbol{v}) \right) \mathrm{dV}\,,$$

el integrando puede reagruparse de la siguiente forma,

$$\frac{D(\rho\,\phi)}{Dt} + \rho\,\phi\, div(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\vec{\nabla}(\rho\,\phi) + \rho\,\phi\, div(\boldsymbol{v}) =$$

$$= \frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t} + div(\rho\,\phi\,\boldsymbol{v})$$

que reemplazado nuevamente en la integral resulta,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t} + div(\rho\,\phi\,\boldsymbol{v}) \right) \mathrm{dV}\,,$$

y por el Teorema de Gauss puede ponerse

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t}\,\mathrm{dV} + \int_{\partial\Omega(t)} \rho\,\phi\,\boldsymbol{v.n}\, dA\ ,$$

siendo $\partial\Omega(t)$ la superficie del volumen que ocupa el Sistema.

La expresión del Lema de Reynolds es entonces,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \phi\,\rho\ \mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t}\,\mathrm{dV} + \int_{\partial\Omega(t)} \rho\,\phi\,\boldsymbol{v.n}\, dA$$

Dado que Ω(t) es un volumen fijo en el espacio, se lo suele denominar Volumen de Control -V.C.- y denotándose a su superficie como la Superficie de Control -S.C.-, la ecuación anterior queda:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V.C.} \phi\,\rho\ \mathrm{dV} = \int_{V.C.} \frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t}\,\mathrm{dV} + \int_{S.C.} \rho\,\phi\ \boldsymbol{v.n}\ dA$$

Puede interpretarse que $\rho\ \boldsymbol{v.n}\ dA$ ***es la cantidad de masa que atraviesa dA en la unidad de tiempo –flujo másico- y que a su vez arrastra la cantidad extensiva*** ϕ ***en su movimiento a través de la superficie del volumen.***

Expresión de Conservación de la Masa en la forma de Formulación Integral o Volúmenes de Control

Teniendo en cuenta que la masa de un Sistema de partículas no varía con el tiempo, puede escribirse

$$\frac{DM}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{V.C.}\rho \ \mathrm{dV}=\int_{V.C.}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{dV}+\int_{S.C.}\rho \ \boldsymbol{v.n}\,dA=0$$

y por lo tanto,

$$\int_{V.C.}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{dV}=-\int_{S.C.}\rho \ \boldsymbol{v.n}\,dA$$

que puede leerse como:

la tasa de acumulación de masa en un volumen fijo del espacio tiene que ser igual a la que entra por su superficie (flujo de masa), dado que en su interior la masa no se crea ni se destruye.

2. Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento.

Ecuación de equilibrio mecánico o Segunda ley de Newton.

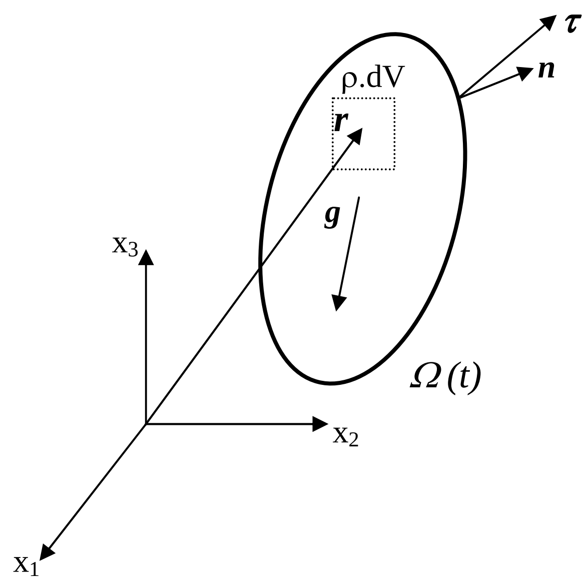


Figura 6.

En la figura 6 observamos un Sistema de partículas sometido a dos tipos fundamentales de esfuerzos ***externos***:

a. Esfuerzos externos por unidad de superficie $\boldsymbol{\tau}$, que actúan sobre la superficie del sistema y son producto de la interacción de las partículas del mismo con las partículas del medio que lo rodea inmediatamente –que están en contacto con él-.
b. Esfuerzos externos por unidad de masa $\boldsymbol{g}$, que actúan en el volumen del sistema y son el resultado de campos externos, como por ejemplo el Campo Gravitatorio (campo debido a la suma de acciones de las partículas de la Tierra).

Las fuerzas concentradas no se han considerado ya que pueden considerarse como un caso límete de las anteriores.
Sometido a estos esfuerzos externos el Sistema evolucionará de acuerdo a la Segunda Ley de Newton. Puntualicemos primero, que esta ley enuncia que: *la variación del impulso* ***P*** *para un sistema de partículas deberá ser igual a la suma de los esfuerzos externos aplicados sobre el mismo.* Resaltando que conceptualmente una integral es la suma para cada uno de los elementos diferenciales, es posible escribir:

$d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{v}.\ dm = \boldsymbol{v}\ .\ \rho\ dV$
$d\boldsymbol{F}^{Sup} = \boldsymbol{\tau}\, dA$
$d\boldsymbol{F}^{Vol} = \boldsymbol{g}\ dV$

$$\boldsymbol{P} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{v}\ \rho\ \mathrm{dV}$$

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{Sup}} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\tau}\ dA$$

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{Vol}} = \int_{\Omega(t)} \rho\, \boldsymbol{g}\ dV$$

Por lo tanto, la Segunda Ley de Newton puede escribirse como:

$$\frac{D\boldsymbol{P}}{Dt} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{Sup}} + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{Vol}}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{v}\ \rho\ \mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\tau}\ dA + \int_{\Omega(t)} \rho\ \boldsymbol{g}\ dV$$

Ahora bien, por el principio de acción y reacción, el esfuerzo externo $\boldsymbol{\tau}$ actuante sobre la superficie exterior del sistema, debe ser igual y de sentido contrario al esfuerzo interno $\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{n}}$ existente en una superficie interna inmediatamente por debajo de la superficie del mismo,

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{t}^{-\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$$

Como ya fue demostrado, el operador derivada material entra dentro del signo integral afectando sólo a $\boldsymbol{v}$, y reemplazando el resultado anterior dentro de la correspondiente integral,

$$\int_{\Omega(t)} \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,\rho\ \mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}\ dA + \int_{\Omega(t)} \rho\ \boldsymbol{g}\ dV = \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\ dV + \int_{\Omega(t)} \rho\ \boldsymbol{g}\ dV$$

En la ecuación anterior se ha aplicado el teorema de la divergencia, considerando a las filas de $\boldsymbol{\sigma}$ como vectores de 3 componentes (recordar que la ecuación anterior es una ecuación vectorial, es decir son 3 ecuaciones escalares para cada una de las componentes de los ejes cartesianos, adicionalmente, se tiene que $\left[\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma})\right]_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$).

Se deduce fácilmente que,

$$\int_{\Omega(t)} \left(\rho\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\ \boldsymbol{g}\right)\ \mathrm{dV} = 0$$

y con los mismos argumentos que para la ecuación de continuidad, arribamos a

$$\rho\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\ \boldsymbol{g} = 0$$

o de otra manera

$$\rho\ \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho\ \boldsymbol{g}\ \ ;\ \ \rho\ \boldsymbol{a} = \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho\ \boldsymbol{g}$$

que es la ***Expresión Diferencial, punto a punto del fluido, de la Segunda Ley de Newton,*** observemos que se trata de un balance por unidad de volumen. Se la denomina también Ecuación de Euler ***del movimiento de una partícula***. En el caso de un flujo ideal -es decir, en ausencia de fricción entre capas de fluido- se tiene que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} = -p\mathbf{I}$$

y entonces puede escribirse

$$\rho\boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho\ \boldsymbol{g}.$$

Cuando el campo de aceleraciones es conocido a priori, la ecuación anterior, se designa con el nombre de Ecuación General de la Hidrostática, y se nota usualmente de la siguiente manera,

$$\nabla p = \rho(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}).$$

Luego se torna evidente que, en un flujo ideal, el gradiente de presiones se orienta en la dirección de la resultante de fuerzas por unidad de masa -considerando a las aceleraciones como fuerzas de D'Alembert-.

Ecuación de Bernoulli (versión 1)

Como ejercicio de aplicación de lo anterior, obtengamos la celebrada ecuación de Bernoulli como una integral de la ecuación de Euler a lo largo de la Línea de Corriente. Para alcanzar este objetivo partimos entonces de:

$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} \right) = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}$$

y dividiendo por ρ,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g}$$

Dado que el campo gravitatorio es un campo conservativo –irrotacional-, ***g*** puede escribirse como:

$$\boldsymbol{g} = - \nabla \Psi$$

siendo por lo tanto Ψ el potencial gravitatorio.

Por otra parte el diferencial de arco de la línea de corriente es paralelo a la velocidad ***v***, es decir,

$d \vec{s} = \boldsymbol{v}\ d\lambda$, siendo λ el parámetro que define la línea de corriente (medido con las mismas unidades que *t* en ***v***).

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Psi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Psi = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

Recordando que el producto escalar entre un gradiente y un diferencial de arco, es el diferencial de variación de la función sobre la que opera el gradiente a lo largo de ese diferencial de arco, es decir,

$$df = \frac{d f}{d s} ds = \nabla f . \vec{ds}$$

y tomando el producto escalar entre (*) y $d \vec{s} = \boldsymbol{v}\ d\lambda$ resulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} . \vec{ds} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \vec{ds} + \frac{1}{\rho} \nabla p . \vec{ds} + \nabla \Psi . \vec{ds} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} . \vec{ds} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \vec{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{d p}{d s} ds + \frac{d \Psi}{d s} ds = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} . \vec{ds} + \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \vec{ds} + \frac{1}{\rho} d p + d \Psi = 0$$

El segundo término puede reescribirse como

$$\boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \vec{ds} = \boldsymbol{v} . \nabla \boldsymbol{v} . \boldsymbol{v}\, d\lambda = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i\, d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial (v_i . v_i)}{\partial x_j} v_j\, d\lambda = \frac{1}{2} \nabla (v^2) . \vec{ds} = \frac{1}{2} d (v^2)$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} . d\vec{s} + \frac{1}{2} d\,(v^2) + \frac{1}{\rho} d\ p + d\,\Psi = 0$$

que es la forma clásica de la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente, en su forma diferencial. Si se supone un fluido barotrópico donde ρ = ~~ρ~~ (p), por ejemplo los líquidos y los gases ideales evolucionando isotérmicamente o adiabáticamente, y si además suponemos régimen estacionario, entonces

$$\frac{1}{2} v_b^2 - \frac{1}{2} v_a^2 + \int_a^b \frac{1}{\rho} d\ p + \Psi_b - \Psi_a = 0$$

Si a esto le sumamos la hipótesis adicional de fluido incompresible -ρ constante- y en el caso en que Ψ= g.z, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{2}\rho v_b^2 - \frac{1}{2}\rho v_a^2 + p_b - p_a + \rho g z_b - \rho g z_a = 0$$

La ecuación de Bernoulli será obtenida mas adelante como resultado de la aplicación de la teoría de volúmenes de control en dos oportunidades más y adicionalmente presentaremos una cuarta versión de la misma, generalizando lo obtenido en la versión N°1. Remarquemos nuevamente, que esta forma de la ecuación de Bernoulli se ha obtenido como una integral de la Segunda Ley de Newton a lo largo de la línea de corriente.

Por último, a

$$P_o = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + p_b + \rho g z_b = \frac{1}{2}\rho v_a^2 + p_a + \rho g z_a$$

se la denomina ***Presión de Estancamiento***, dado que es la presión que alcanzará el fluido si su velocidad y altura disminuyen hasta anularse.

El Teorema de Arquímedes

El ***Empuje*** sobre un objeto sumergido, estará dado por la resultante de los esfuerzos de presión actuante sobre la superficie del mismo.
Por el principio de acción y reacción, el resultado de intercambiar dicho cuerpo por una masa de fluido de igual volumen y de la misma especie que el fluido circundante, hará que este ultimo no se entere de nuestra intervención, y de aquí resulta obvio que el empuje será igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo, ya que si este fuese sustituido por fluido idéntico al circundante, dicha masa fluidica estaría en equilibrio de fuerzas con el medio que la rodeara.
Ahora obtengamos este mismo resultado de una manera más formal.
Si pensamos en un volumen ideal Ω recortado en el seno de una masa de fluido de mayor tamaño, la resultante de las fuerzas de presión sobre dicho volumen estará dada por

$$\boldsymbol{E} = -\int_{\partial\Omega} p\,\boldsymbol{n}\ dA$$

en componentes resulta,

$$E_i = -\int_{\partial\Omega} p\, \mathrm{n}_i \;\; dA = -\int_{\partial\Omega} p\,(\mathbf{n}.e_i)\; dA = -\int_{\partial\Omega} (p\;e_i\,.\mathbf{n})\; dA = -\int_{\Omega} div\;(p\;e_i)\; dV = -\int_{\Omega} \frac{\partial\, p}{\partial\, x_i}\;\; dV$$

Para el paso a la divergencia, se ha supuesto que el gradiente de p está definido en el interior del cuerpo, es en este punto donde debe apelarse a que una masa de fluido que ocupase el volumen del cuerpo estaría en equilibrio con el líquido circundante, dándole continuidad al campo de presiones hacia el interior del cuerpo. Por lo tanto, hemos apelado a una extensión hacia el interior del cuerpo del campo de presiones, lo cual es totalmente válido a partir del principio de acción y reacción y la segunda ley de Newton aplicada a los fluidos en equilibrio.
En definitiva,

$$\boldsymbol{E} = -\int_{\Omega} \nabla p\;\; dV$$

Ahora, teniendo en cuenta la Ecuación de Euler, mas precisamente la Ecuación General de la Hidrostática, cuando las aceleraciones son nulas, y además si consideramos a $\rho\, \underline{\mathbf{g}}$ como una constante, entonces resulta,

$$\boldsymbol{E} = -\int_{\Omega} \nabla p\;\; dV = -\nabla p\,.\,V = -\rho\,\boldsymbol{g}\;V$$

Que nos dice que el empuje es igual y de sentido contrario al peso del volumen de líquido desalojado.

Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento. Volúmenes de Control.

En el apartado anterior estuvimos interesados en encontrar las ecuaciones de movimiento para una porción de fluido. En la presente sección nos interesara plantear las ecuaciones de movimiento en una zona fija del espacio. Dicha zona podrá encerrar fluido y sólido, e.g., una cañería y el fluido que contiene; un objeto sólido sumergido en una corriente de fluido, etc. Por eso aquí consideraremos la posibilidad de que el sistema en consideración este sometido también a esfuerzos externos concentrados. Tendremos por lo tanto que la expresión de la Segunda Ley de Newton resulta:

$$\frac{D\boldsymbol{P}}{Dt} = \boldsymbol{F}^{\,Sup} + \boldsymbol{F}^{\,Vol} + \boldsymbol{F}^{\,Con}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{v}\;\rho\;\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\tau}\;\; dA + \int_{\Omega(t)} \rho\;\boldsymbol{g}\;\; dV\; + \boldsymbol{F}^{\,Con}$$

En la formula anterior debe entenderse que $\boldsymbol{F}^{Con}$ representa la suma de todos los esfuerzos externos concentrados.

$$\frac{D\boldsymbol{P}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{v}\;\rho\;\mathrm{dV} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\;\;\boldsymbol{v})}{\partial t}\; dV\; + \int_{\partial\Omega(t)} \rho\;\boldsymbol{v}\;\;(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n})dA$$

Por lo tanto se tiene la expresión para volúmenes de control,

$$\int_{V.C.} \frac{\partial(\rho\ \boldsymbol{v})}{\partial t}\, dV + \int_{S.C.} \rho\ \boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{v.n}) dA = \boldsymbol{F}^{Sup} + \boldsymbol{F}^{Vol} + \boldsymbol{F}^{Con}$$

Ecuación de Bernoulli (versión 2)

Como ejercicio de volúmenes de control, aplicando el principio de conservación del Impulso, deduciremos la Ecuación de Bernoulli a lo largo de una Línea de Corriente.
El esquema de la figura 7, muestra un tubo de corriente (la superficie lateral del mismo esta compuesta por líneas de corriente), sobre el cual supondremos que actúan esfuerzos de presión (flujo ideal) y esfuerzos gravitatorios.
Si en la posición *s* de la Línea de Corriente el área es A(s) y el radio en r(s), en primera aproximación resulta que

$A(s+ds)=A(s)+(dA/ds)\ ds = A(s)+(dA/dr)(dr/ds)\ ds$
$A(s+ds)=2\ \pi\ r\ (dr/ds)\ ds = 2\ \pi\ r\ dr.$
$A_{lat}= 2\ \pi\ (r+dr/2)\ ds.$
$sen(\theta) = tg\ (\theta)=dr/ds$

Planteando la sumatoria de fuerzas en una dirección a lo largo de la línea de corriente, y considerando las fuerzas de superficie y las de volumen, se obtiene

$\boldsymbol{F}^{sup} = p(s)A(s) - p(s+ds)\ A(s+ds) + p(s+ds/2)\ A_{lat}\ sen(\theta)$
$\boldsymbol{F}^{sup} = p(s)A(s) - p(s+ds)\ A(s+ds) + p(s+ds/2)\ 2\ \pi\ (r+dr/2)\ dr$

Desarrollando los diferenciales en serie de Taylor a primer orden
$\boldsymbol{F}^{sup} = p(s)A(s) - (\ p(s)\ A(s) + (\ d(pA)/ds\ )\ ds\ ) + p(s)\ 2\ \pi\ r\ dr$
$\boldsymbol{F}^{sup} = -\ (\ d(pA)/ds\ )\ ds\ ) + p(s)\ dA = -\ d(pA) + p\ dA = -Adp$
$\boldsymbol{F}^{sup} = -Adp.$

Para las fuerzas por unidad de volumen se tiene que
$\boldsymbol{F}^{Vol} = -\rho\ \boldsymbol{g}\ dV\ sen\ \alpha = -\rho\ \boldsymbol{g}\ \ (A(s)\ ds)\ (dz/ds)$

Resultando,
$\boldsymbol{F}^{Vol} = -\rho\ \boldsymbol{g}\ A(s)dz.$

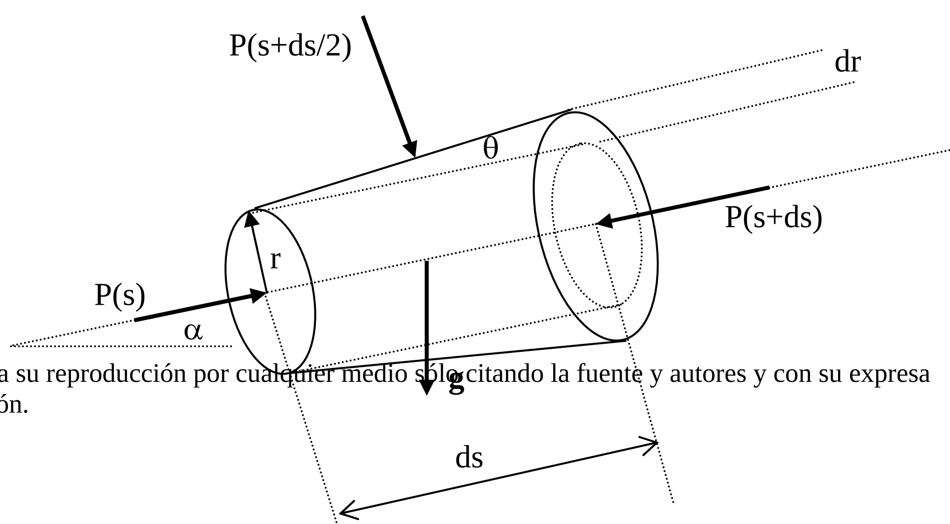


Figura 7.

La variación de la cantidad de movimiento, en la dirección de la línea de corriente($v_s = v$) para el volumen considerado, viene dada por:

$$\int_{V.C.} \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV + \int_{S.C.} \rho v \, (\mathbf{v.n}) \, dA = \frac{\partial \rho v}{\partial t} A.ds + \int_{A(s)} \rho v \, (\mathbf{v.n}) \, dA + \int_{A(s+ds)} \rho v \, (\mathbf{v.n}) \, dA =$$

$$= \frac{\partial \rho v}{\partial t} A.ds - \int_{A(s)} \rho v^2 \, dA + \int_{A(s+ds)} \rho v^2 \, dA = \frac{\partial \rho v}{\partial t} A.ds + (\rho v^2 A)\big|_{s+ds} - (\rho v^2 A)\big|_{s} =$$

$$= \frac{\partial \rho v}{\partial t} A.ds + \frac{\partial (\rho v^2 A)}{\partial s} ds$$

Con lo cual la Segunda Ley de Newton para el tubo de corriente se expresa como:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} A.ds + \frac{\partial (\rho v^2 A)}{\partial s} ds = -A \frac{\partial p}{\partial s} ds - \rho \, g \, A \frac{\partial z}{\partial s} ds$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} A. + \frac{\partial (\rho v^2 A)}{\partial s} = -A \frac{\partial p}{\partial s} - \rho \, g \, A \frac{\partial z}{\partial s}$$

utilizando la ecuación de conservación de la masa para volúmenes de control, puede demostrarse que para el presente caso,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A. + \frac{\partial (\rho v A)}{\partial s} = 0$$

y reenplazando en la anterior, luego de cierto álgebra se llega a:

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial t} + \rho A \frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s} + A \frac{\partial p}{\partial s} + \rho A g \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

o de manera equivalente

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Multiplicando por *ds*, se cumple que a lo largo de una línea de corriente tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{1}{2} d\,(v^2) + \frac{1}{\rho} dp + g\, dz = 0$$

En el caso estacionario tendremos

$$\frac{1}{2} d\,(v^2) + \frac{1}{\rho} dp + g\, dz = 0$$

que es la forma clásica de la ecuación de Bernoulli.

3. Principio de Balance del Momento Angular

Aunque le hemos dado aquí entidad de principio es bien sabido que la expresión de balance en la cantidad de Momento Angular se deriva de la segunda ley de Newton para un sistema de partículas. En nuestro caso el sistema está formado por un continuo y en este contexto, se sabe que a nivel puntual este principio trae como consecuencia la simetría del tensor de tensiones. Por eso se darán las expresiones integrales o de volúmenes de control.

Expresión para Volúmenes de Control.

En este apartado daremos la expresión de la ley de conservación del Momento Angular en su formulación de volúmenes de control.
Para esto definiremos el momento angular de un sistema, como la suma de los momentos angulares de cada dm que conforma dicho sistema-fig.6-,

$$\boldsymbol{L} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{p} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r} \times dm\, \boldsymbol{v} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\ \rho\ dV$$

Entonces, podemos enunciar que:
La suma de momentos externos actuantes sobre el sistema será igual a la tasa de variación del momento angular de las partículas que conforman el mismo, en fórmulas:

$$\frac{D\boldsymbol{L}}{Dt} = \boldsymbol{M}^{Sup} + \boldsymbol{M}^{Vol} + \boldsymbol{M}^{Con}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\ \rho\ dV = \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{r}\times\boldsymbol{\tau}\ dA + \int_{\Omega(t)} \mathbf{r}\times\rho\ \boldsymbol{g}\ dV + \boldsymbol{M}^{Con}$$

En la fórmula anterior debe entenderse que $\boldsymbol{M}^{Con}$ representa la suma de todos los momentos debido a fuerzas externas concentradas y también a la existencia de cuplas concentradas externas actuantes sobre el sistema.
De acuerdo al Lema de Reynolds es posible escribir:

$$\frac{D\boldsymbol{L}}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho\ \boldsymbol{v})}{\partial t}\,dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho\ \ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n})dA$$

En cuanto a los esfuerzos actuantes en la superficie, la mayoría de las veces ocurrirá que es suficiente con considerar sólo los esfuerzos normales debido a la presión, es decir,

$$\boldsymbol{F}^{Sup} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\tau}\ \ dA \cong -\int_{\partial\Omega(t)} \mathrm{p}\,\boldsymbol{n}\ \ dA$$

$$\boldsymbol{M}^{Sup} = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\tau}\ \ dA \cong -\int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\mathrm{p}\,\boldsymbol{n}\ \ dA$$

Es fácil demostrar que para el cálculo de los esfuerzos netos externos debidos a la presión, es suficiente con considerar presiones relativas, ya que una presión constante no ejercerá acción neta sobre el sistema, no aportando ni a la resultante de fuerzas de superficie ni a los correspondientes momentos,

$$\boldsymbol{F}^{Sup} = -\int_{\partial\Omega(t)} p\,\mathbf{n}\ dA = -\int_{\partial\Omega(t)} (p_o + p_R)\mathbf{n}\ dA =$$

$$= -p_o\int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{n}\ dA - \int_{\partial\Omega(t)} p_R\mathbf{n}\ dA = -\int_{\partial\Omega(t)} p_R\mathbf{n}\ dA$$

Lo análogo para los momentos se deja como ejercicio para el lector.

4. Principio de Balance de Energías: Primer Principio de la Termodinámica.

Deduciremos aquí el principio de conservación de la energía en su modalidad de volúmenes de control dado que será muy útil en la caracterización de las máquinas fluidodinámicas y en los balances ingenieriles de energía en casos prácticos.

Expresión del Primer Principio en la forma de Volúmenes de Control.

Para poder dar una expresión del primer principio de carácter práctico hay que definir los posibles intercambios de energía al que estarán sometidos los sistemas dentro del campo de de las posibles aplicaciones de interés. Supondremos aquí que las energías puestas en juego serán: la cinética, la potencial y la interna (como energía cinética promedio de las moléculas). Se descartan por lo tanto otras formas de la energía tales como la elástica, la química, nuclear, etc. (todas debidas a grados de libertad internos asociados a las partículas que constituyen el sistema) y otras como la electromagnética, que de ser necesario tenerlas en cuenta, muchas veces son tratadas como fuentes de calor adicionales. Al considerar la energía potencial debida a la gravedad, no consideraremos adicionalmente la acción de ninguna otra fuerza por unidad de masa actuante sobre el sistema.
Por otra parte, debido a que se busca una expresión del principio de conservación de la energía que resulte conveniente para el análisis de máquinas fluidodinámicas, será conveniente expresar por separado la potencia de las presiones actuando sobre la superficie externa y la potencia introducida por algún elemento accionador mecánico que por conveniencia se denominarán "ejes" -ya sean éstos elementos rotatorios –por ejemplo el eje del rodete de una bomba centrífuga o elementos translativos tipo biela-. De esta manera se tendrá,

$$\dot{\mathrm{E}} = \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{presion}} + \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{eje}} + \dot{\mathrm{Q}}$$

Es decir, la tasa de acumulación de energía en el sistema será igual a la suma de las potencias debidas a: las presiones ejercidas sobre el mismo en las superficies de intercambio de fluido (potencia de los flujos), la acción de elementos mecánicos (potencia de los ejes) y, al calor en él introducido.
Por definición tendremos que la Energía Total del sistema será la suma (integral) sobre cada una de las partículas del mismo,

$$E = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right) \rho\, dV$$

en la fórmula anterior se denotó la energía interna con la letra "*u*" . Además, para la potencia de las presiones tendremos,

$$\dot{W}_{presion} = -\int_{\partial\Omega} p\, \mathbf{n}.\mathbf{v}\, dA$$

Observar que, de nuevo, al considerar sólo la potencia de las presiones, es decir, de los esfuerzos normales, se ha despreciado la potencia de los esfuerzos de corte relacionadas con los flujos entrantes o salientes. Esta situación es muy realista en la inmensa mayoría de las aplicaciones de máquinas fluidodinámicas.

De acuerdo al Lema de Reynolds resulta que,

$$\dot{E} = \frac{D}{Dt} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right) \rho\, dV = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left[\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right] \right) dV + \int_{\partial\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right) \mathbf{v}.\mathbf{n} dA$$

De forma que nuestra versión del Primer Principio de la Termodinámica toma la forma,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left[\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right] \right) dV + \int_{\partial\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right) \mathbf{v}.\mathbf{n} dA = -\int_{\partial\Omega} p\, \mathbf{n}.\mathbf{v}\, dA + \dot{W}_{eje} + \dot{Q}$$

La anterior puede reescribirse de la siguiente forma,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left[\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u \right] \right) dV + \int_{\partial\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u + p/\rho \right) \mathbf{v}.\mathbf{n} dA = \dot{W}_{eje} + \dot{Q}$$

Si definimos la Entalpía Total como:

$$h = u + p/\rho + \frac{1}{2} v^2 + g\,z$$

vemos que la segunda integral puede leerse como el flujo de Entalpía Total en la superficie del sistema.

Analicemos un caso de particular interés, como es el de un sistema que tiene una única entrada y una única salida; consideremos además régimen estacionario conjuntamente con propiedades y perfil de velocidades uniformes en ambas superficies, entonces será que

$$\rho VA \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u + p/\rho \right) \Bigg|_{Salida} - \rho VA \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u + p/\rho \right) \Bigg|_{entrada} = \dot{W}_{eje} + \dot{Q}$$

Haciendo uso de la ecuación de conservación de la masa, es posible escribir:

$$\rho\, AV \big|_{Salida} = \rho\, AV \big|_{entrada} = \dot{M}$$

resultando la anterior en,

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u + p/\rho \right) \Bigg|_{Salida} - \left(\frac{1}{2} v^2 + g\,z + u + p/\rho \right) \Bigg|_{Entrada} = \dot{W}_{eje} / \dot{M} + \dot{Q} / \dot{M}$$

Es decir que la variación de la Entalpía Total entre la entrada y la salida será igual a la suma de las potencias suministradas por unidad de caudal másico, debidas al trabajo ejercido por unidades rotativas y al calor aportado al sistema.

$$h\big|_{Salida} - h\big|_{Entrada} = \Delta h\big|_{S-E} = \dot{W}_{eje} / \dot{M} + \dot{Q} / \dot{M} = w_{eje} + q$$

Es inmediato escribir *h* como la suma de la energía de Bernoulli más la Energía Interna, de la siguiente forma:

$$B = \frac{1}{2} v^2 + g\,z \ + p/\rho \ ; \ h = B + u$$

Por lo tanto tendremos,

$$\Delta h\big|_{S-E} = \Delta B\big|_{S-E} + \Delta u\big|_{S-E} = w_{eje} + q$$

Podemos decir entonces que las potencias suministradas al sistema tendrán como fin elevar la Energía Mecánica “de Bernoulli” y la Energía Interna.
Si la variación de temperatura entre la entrada y la salida es despreciable, como ocurre en la mayoría de las bombas centrífugas y turbinas hidráulicas, sólo habrá cambios apreciables en la Energía de Bernoulli, en este caso diremos que estamos en presencia de una Máquina Hidráulica. Si por el contrario, las variaciones de Energía Interna son tan relevantes como las de Bernoulli, diremos que se trata de una Máquina Térmica o Termohidráulica.
Es fácil observar que si no damos calor al sistema, *q* será negativo en el caso de una bomba o un compresor, ya que toda elevación de temperatura del sistema producirá un gradiente entre el mismo y el medio circundante, que redundará en una perdida neta de calor hacia el medio, que por conveniencia notaremos con la cantidad positiva q_L. Si definimos el rendimiento como: la potencia que se lleva el fluido versus la suministrada en el eje, tendremos, para una Compresor (Máquina Térmica, ya que aprovecha incrementos de *u*)

$$\eta = \frac{\Delta B\big|_{S-E}}{w_{eje}} + \frac{\Delta u\big|_{S-E}}{w_{eje}} = 1 - \frac{q_L}{w_{eje}} < 1$$

Consecuentemente, para una Bomba Centrífuga, que no tiene manera de aprovechar las elevaciones de *u*, estas deberán ser contabilizadas también como perdidas, resultando el rendimiento en:

$$\eta = \frac{\Delta B\big|_{S-E}}{w_{eje}} = 1 - \frac{q_L + \Delta u\big|_{S-E}}{w_{eje}} < 1$$

Diremos que en la Energía de Bernoulli B sólo intervienen energías mecánicas (cinética, potencial y las debidas al trabajo de las presiones). Todas, asociadas a cantidades consideradas usualmente como mecánicas, es decir, en relación con fuerzas y movimientos de carácter macroscópico, o de otra manera, en relación con trabajos debidos a desplazamientos observables.

Tercera versión de la Ecuación de Bernoulli.

Por último, vemos que para el tipo de sistemas tratado en el apartado anterior, se tiene que cuando las variaciones de Energía Interna sean despreciables, al igual que los intercambios de calor y trabajo, la Energía de Bernoulli –Energía Mecánica- se conservará, es decir,

$$\Delta B\Big|_{S-E} = 0 \ ; \ B\Big|_S = B\Big|_E$$

Cuarta versión de la Ecuación de Bernoulli.

Partiendo de la ecuación de Euler, podemos escribir

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Psi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \Psi = \mathbf{0}$$

El término convectivo de la aceleración puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{v}^2\right) - \boldsymbol{v}\times w \ ; \ w = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v})$$

Lo cual puede comprobarse directamente, desarrollando el segundo término de la igualdad. En la formula anterior ***w, se*** denomina vorticidad, cantidad asociada a la rotacionalidad del campo de velocidades, por otra parte v^2 debe entenderse como el módulo de la velocidad al cuadrado.

De esta manera podemos escribir,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{v}^2\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \Psi = -\boldsymbol{v}\times w$$

Nuevamente, tomando el producto escalar con el diferencial de arco $\vec{ds}$ de una dada curva, tendremos

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\,.\,\vec{ds} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\,.\,\vec{ds} + \frac{1}{\rho}\nabla p\,.\,\vec{ds} + \nabla \Psi\,.\,\vec{ds} = -\boldsymbol{v}\times w\,.\,\vec{ds}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\,.\,\vec{ds} + d\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{v}^2\right) + \frac{1}{\rho}d\,p + d\,\Psi = -\boldsymbol{v}\times w\,.\,\vec{ds}$$

Observando que el segundo miembro es un triple producto mixto, surgen tres casos donde éste se anula:

a) $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, vorticidad nula-flujo irrotacional. El segundo miembro es nulo siempre y podemos integrar la ecuación a lo largo de cualquier curva, es decir, $\overrightarrow{ds}$ es arbitrario.

b) A lo largo de la línea de corriente, es decir, $\overrightarrow{ds}$ es paralelo a la velocidad ***v*.**

c) A lo largo de la línea de vorticidad, es decir, $\overrightarrow{ds}$ es paralelo a ***w***.

Luego, en todos estos casos rescatamos una ecuación similar a la primera versión de la Ecuación de Bernoulli, salvo que en este caso, no sólo estaremos integrando a lo largo de la línea de corriente, sino que tendremos a disposición otras posibilidades, de acuerdo a lo resaltado en el párrafo anterior, por lo tanto, esta última deducción reviste un carácter más general que la Versión 1. Debemos destacar, que tanto ésta como la primera, son integrales a lo largo de un dado camino, más precisamente, circulaciones de una cantidad vectorial a lo largo de una cierta curva, deducidas a partir de la Segunda Ley de Newton en su forma de ecuación de Euler.

Ecuación de Euler en coordenadas naturales sobre la Línea de Corriente

Si expresamos la Segunda Ley de Newton –Ecuación de Euler- en coordenadas naturales referidas a la Línea de Corriente, obtendremos:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}.\hat{\boldsymbol{e}}_t \big|_{(x+\boldsymbol{v}.\Delta t,\, t+\Delta t)} - \mathrm{v}.\hat{\boldsymbol{e}}_t \big|_{(x,t)}}{\Delta t} \quad ;$$

En la ecuación anterior ha sido utilizada la siguiente nomenclatura: v = módulo de la velocidad, ***v*** = vector velocidad. Haciendo un desarrollo en serie de Taylor y usando las siguientes relaciones:

$$\nabla f.\hat{\boldsymbol{e}}_t = \frac{\partial f}{\partial s}\ ;\ \hat{\boldsymbol{e}}_t = \boldsymbol{v}/\mathrm{v}\ ,$$

siendo s la longitud de arco de la Línea de Corriente, resulta,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial(\mathrm{v}.\hat{\boldsymbol{e}}_t)}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \mathrm{v}^2\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_t}{\partial s} = \frac{\partial(\mathrm{v}.\hat{\boldsymbol{e}}_t)}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{\mathrm{v}^2}{R}.\hat{\boldsymbol{e}}_n$$

en la anterior vemos que la aceleración está dada por: un cambio temporal local en el vector velocidad, una componente tangencial a lo largo de la Línea de Corriente y una componente normal orientada hacia el centro instantáneo de rotación que suele denominarse como aceleración centrípeta. Además, como es obvio, se ha denotado con *R* al radio de curvatura de la Línea de Corriente.

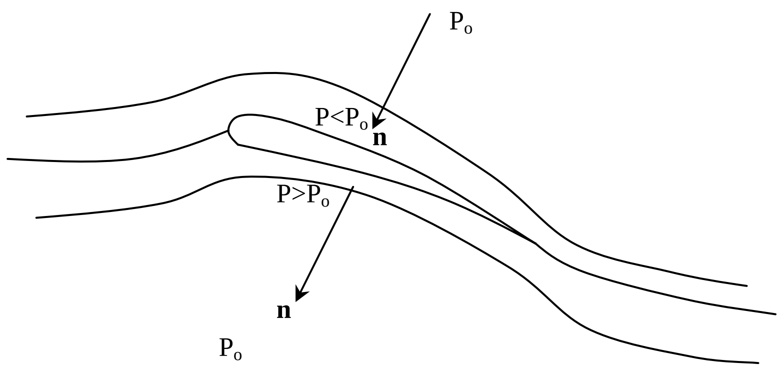
Por lo tanto, para el caso estacionario es posible escribir,

$$\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s$$

$$\frac{\mathrm{v}^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n$$

La primera es la ya conocida Ecuación de Bernoulli a lo largo de la Línea de Corriente. La segunda nos da el equilibrio de fuerzas y aceleraciones en la dirección normal. Pueden extraerse algunas conclusiones interesantes del análisis de esta última. Por ejemplo, *en el caso de que la Línea de Corriente sea una recta, es decir,* $R = \infty$*, debe cumplirse que las variaciones de presión en la dirección normal sean de carácter hidrostático, más aún, si se desprecia la gravedad deberán anularse.*

Observando la curvatura de las Líneas de Corriente es posible comprender rápidamente el efecto de sustentación en un perfil alar trabajando aerodinámicamente (se dice que un perfil trabaja aerodinámicamente, si las líneas de corriente acompañan la forma del mismo).



Tener en cuenta que siendo v^2/R *siempre una cantidad positiva, la presión aumentará en la dirección contraria a la normal, o de otra manera, la presión aumentará en la dirección en que nos alejamos del centro instantáneo de rotación. La consecuencia lógica es que aparece una fuerza neta por diferencia de presiones entre ambas caras del perfil, orientada en dirección contraria a la normal de la curvatura del perfil.*

Ing. Santiago A. Urquiza
Profesor Asociado
Dpto Mecánica- Fac. de Ingeniería- UNMDP

Ecuación de equilibrio mecánico. Segunda ley de Newton.