Dr. Ing. Santiago A. Urquiza
Profesor Titular
Dpto Mecánica- Fac. de Ingeniería- UNMDP

Introducción a la Mecánica de Los Fluidos

¿Qué es un Fluido?

Puede considerarse como un fluido a toda porción de materia que no dejará de deformarse toda vez que sea sometida a esfuerzos no homogéneos, es decir, que no actúen con la misma intensidad en todas las direcciones. Un fluido sometido a esfuerzos de compresión pura, alcanzará una posición de equilibrio, oponiendo resistencia a todo incremento de la compresión subsecuente. En cambio cuando se somete un fluido a esfuerzos cortantes tales como los de la fig. 1, comenzará a deformarse indefinidamente, mientras la acción externa se mantenga.

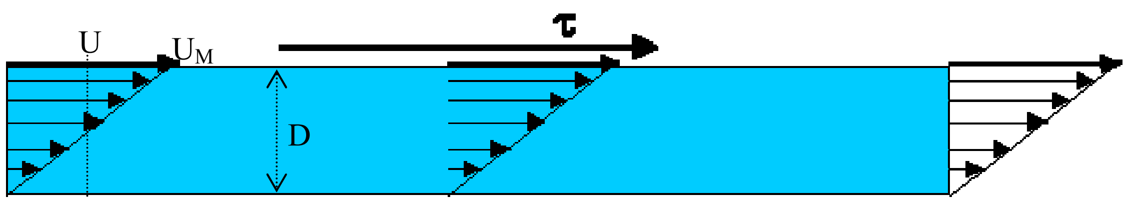


Figura 1

Ahora bien, todo es cuestión de puntos de vista. Los esfuerzos gravitatorios (que actúan sólo en la dirección vertical), harán escurrir permanentemente al agua, mientras no estemos en presencia de las paredes de un recipiente[1] o de efectos de segundo orden como la tensión superficial. Pero frente a estos mismos esfuerzos, la pasta dentífrica no escurrirá del envase, necesitaremos presionar para lograr que salga. Es decir, frente a los esfuerzos gravitatorios la pasta dentífrica se comportará como un sólido, mientras que frente a la presión del dedo pulgar se comportará como un líquido con una viscosidad peculiar. Esta idea puede llevarse al extremo cuando se piensa en el conformado de metales por extrusión o estampado: frente a los enormes esfuerzos de la prensa el metal escurrirá con un tipo de flujo similar al de los líquidos. Es decir, deberemos tener en cuenta la relación entre los esfuerzos externos aplicados y las fuerzas cohesivas internas para poder caracterizar el comportamiento fluídico de una determinada substancia.

Volviendo a los fluidos convencionales (líquidos y gases), es importante observar que éstos siempre estarán sometidos a compresión y bajo ninguna circunstancia a tracción. Esto surge naturalmente si pensamos en que todo gas a relativamente moderadas presiones puede concebirse como un conjunto de partículas (moléculas) desagregadas que no experimentan esfuerzos de cohesión –hipótesis de gas ideal- y que, todo líquido pasa a estado gaseoso a presiones suficientemente bajas pero positivas en términos absolutos. Es ésta la razón por la cual los líquidos no se pueden aspirar de un pozo cuya profundidad se aproxime a aquella para la cual la columna de líquido por sí sola ejercería en su base una presión igual a la atmosférica.

Retornando a lo ilustrado en la figura 1, el campo de velocidades puede escribirse como $u(\mathrm{y}) = U_M\, \mathrm{y}/D$. Tener en cuenta además que en ese caso el valor medio U de la velocidad estará relacionado con el valor máximo U_M por la ecuación $U = U_M/2$ ya que es un perfil que varía linealmente desde cero en la pared. El gradiente de u(y) será $du/dy = U_M/D$. Los fluidos considerados Newtonianos son aquellos en los que la tensión de corte τ puede ponerse como directamente proporcional al gradiente de velocidades:

[1] cuya función es distribuir uniformemente los esfuerzos hasta alcanzar un estado hidrostático

$$\tau \propto \frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

La constante de proporcionalidad se conoce como la viscosidad dinámica. Reiteramos, dicha relación enuncia entonces que los esfuerzos de corte en un fluido se desarrollan en presencia de un gradiente de velocidades, es decir, son esfuerzos de fricción producto de que dos capas del flujo se mueven con velocidad relativa entre ellas y friccionan debido al deslizamiento relativo de una con respecto a la otra. En la Figura 2 se ilustran las consideraciones anteriores.

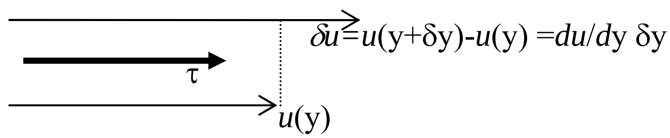


Figura 2

La tensión de corte resulta directamente proporcional a la velocidad relativa entre las capas δu e inversamente proporcional a la distancia entre las mismas δy.

Por otra parte una manera natural o intrínseca de medir las tensiones de corte es referirlas (ponerlas en proporción) a la cantidad de energía cinética por unidad de volumen asociada al flujo, es decir,

$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\mu \frac{U_M}{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\mu \frac{2U}{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 4\frac{\mu}{\rho U D} = \frac{4}{Re} \propto Re^{-1}$$

Con ρ : densidad del fluido [masa por unidad de volumen]. *Re* se conoce como el Número de Reynolds. Observar que *Re* es adimensional, es decir, no posee unidades, ya que es el conciente de dos cantidades dimensionalmente homogéneas, a saber, las tensiones de corte viscosas y la "presión dinámica" $\frac{1}{2}\rho\, U^2$. Por otra parte queda claro que el número de Reynolds mide las fuerzas asociadas a los efectos inerciales respecto de los esfuerzos viscosos. Este número juega un papel muy relevante en la mecánica de los fluidos ya que caracteriza el tipo de escurrimiento. Cuando $Re \to 0$ tenemos un escurrimiento donde las aceleraciones o cantidades de movimiento no participan en el balance de fuerzas (Segunda Ley de Newton). En el otro extremo, cuando $Re \to \infty$ la participación de las fuerzas viscosas en el balance de fuerzas es despreciable y las cantidades de movimiento se equilibrarán con las fuerzas de presión y gravitatorias. Asimismo caracterizará los valores para los cuales el flujo pasa de un comportamiento laminar, donde las trayectorias de las partículas son suaves, a turbulento para el cual las trayectorias son tortuosas y hay presencia de gran cantidad de torbellinos de muy pequeñas dimensiones.

Cinemática de los fluidos

Descripciones Lagrangeana y Euleriana

Deteniéndonos a reflexionar un momento sobre situaciones típicas en problemas de fluidos, como el caso del flujo aerodinámico alrededor del fuselaje de un avión o de un automóvil, o el flujo en una conducción cerrada (cañería), veremos que lo relevante para el diseño es poder disponer del campo de presiones que dicho flujo ejercerá sobre el objeto en consideración y, probablemente también será de interés, la distribución de velocidades en las inmediaciones del mismo. Esto nos lleva a focalizar la atención en la zona del espacio que rodea al objeto, tratando de obtener una descripción de los campos de velocidades y de presiones en la zona del espacio que rodea al objeto. Observaremos sin dificultad, que en un dado punto del espacio, la presión existente a medida que el tiempo transcurre será el resultado de la presencia de las distintas partículas que transcurren por dicha posición, y que no estamos interesados en identificar. Este tipo de descripción se conoce con el nombre de **Descripción Euleriana o Espacial**, y se basa en la determinación de ciertos parámetros (velocidad, presión, temperatura, densidad, etc) asociados a puntos del espacio y en función del tiempo. Hablaremos entonces de campos espaciales, como por ejemplo, el campo de velocidades (vectorial) $\vec{v}(\vec{x},t)$ o del campo escalar de densidades $\rho(\vec{x},t)$. Esta es la descripción característica de la mecánica de los fluidos. Los fluidos convencionales presentan la ventaja, que su estado tensional no depende de su historia previa, sino sólo de las circunstancias actuales del flujo.
En la mecánica del sólido el tipo de descripción utilizada regularmente, es la **Descripción Lagrangeana o Material**. En este tipo de formulación, el interés está puesto en el seguimiento de cada partícula "material" del cuerpo, en la medida que este se va deformando. Esto es debido, fundamentalmente, a que los esfuerzos internos en los sólidos, aparecen como resultado del cambio en la posición relativa entre las partículas. Esta observación nos lleva necesariamente a tener que comparar las distancias relativas de las partículas en una configuración de referencia (en general no deformada) con las distancias relativas en la configuración actual o deformada. El estado de un sólido depende siempre de su historia de deformaciones, es decir, de las configuraciones que fue ocupando a medida que el tiempo transcurría (en el caso puramente elástico, lo anterior se reduce a solamente dos configuraciones, la inicial y la final).
Esta descripción es traída a colación aquí porque será de utilidad para entender, por contraste, la Descripción Espacial y porque nos será de utilidad para poder definir el concepto de Línea de Humo más adelante.
La Descripción Lagrangeana o Material se apoya en el uso de las siguientes funciones:

$$\vec{x}=\vec{F}(\vec{X}_o,t_o,t)$$

estas funciones darán la posición actual (al tiempo t) $\vec{x}$, de la partícula que inicialmente (tiempo t_o) se encontraba en $\vec{X}_o$. Dicho de otra manera: $\vec{F}$ nos dice dónde se encuentra ahora la partícula que inicialmente estaba en $\vec{X}_o$.

Observemos que si hemos identificado a cada una de las partículas a seguir con la posición que ocupaban en el tiempo t_O, estamos en presencia de un campo vectorial asociado a cada posición $\vec{X}_o$. Por otra parte, es obvio que la función $\vec{F}$ representa el conjunto de trayectorias de las partículas identificadas con $\vec{X}_o$.

Líneas de Corriente, Trayectorias y Líneas de Humo:

Dado que en general un determinado flujo es difícil de visualizar como campo vectorial, se utilizan medios descriptivos, como las Líneas de Corriente, Trayectorias y Líneas de Humo, que permiten una rápida comprensión visual de las particularidades del mismo, presentando la ventaja de ser realizables experimentalmente.

Trayectoria:

Es la curva espacial descripta por cada partícula en su movimiento. Es la línea tangente al la velocidad de cada partícula a medida que transcurre el tiempo.
Matemáticamente queda definida en la Descripción Euleriana como:

$$\frac{d\,\vec{x}}{d\,t} = \vec{v}\,(\,\vec{x}(t),t) \quad ; \quad \vec{x}(t_o) = \vec{X}_o$$

En la Descripción Lagrangeana la Trayectoria queda definida sencillamente especificando $\vec{X}_o$ y t_O y dejando t como parámetro:

$$\vec{x} = \vec{F}\,(\vec{X}_o, t_o, \lambda) \text{ o } \vec{x} = \vec{F}\,(\vec{X}_o, t_o, t) \text{ con } \vec{X}_o, t_O \text{ fijos.}$$

Línea de Humo o Filete:

Es el conjunto de puntos del espacio ocupados por las partículas que pasaron (o pasarán) por una determinada posición. La estela de humo de la chimenea de una fábrica marca a todas las partículas que una vez estuvieron sobre la misma y que luego fueron arrastradas por el viento. La expresión matemática del Filete es como sigue:

$$\vec{x} = \vec{F}\,(\vec{X}_o, \lambda, t) \text{ (descripción lagrangeana)}$$

$$\frac{d\,\vec{x}}{d\,t} = \vec{v}\,(\,\vec{x}(t),t) \quad ; \quad \vec{x}(\lambda) = \vec{X}_o \text{ (descripción euleriana)}$$

Con λ un parámetro que pertenece a un intervalo conveniente elegido de los reales. Observar que para ser estrictamente coherentes con la definición antes enunciada y para que queden comprendidas todas las partículas que pasaron o pasarán por un dado punto debería elegirse λ perteneciente al intervalo $(-\infty,\infty)$.

Línea de Corriente:

Es la envolvente del campo de velocidades, es decir, aquella línea que es paralela en todo punto al campo de velocidades en un instante dado del tiempo. Queda definida matemáticamente en la Descripción Euleriana por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{v}(\vec{x}(s), t)$$

o equivalentemente por

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

Observar que por conveniencia el vector tangente a la curva se elige igual a la velocidad, aunque hubiese bastado con elegirlo paralelo.
En la Descripción Lagrangeana resultan,

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{V}(\vec{F}^{-1}(\vec{x}(s), t_o, t), t_o, t)$$

Siendo $\vec{F}^{-1}$ la función inversa de $\vec{F}$, es decir, la función que nos dice dónde se encontraba en t_o la partícula que en t se encuentra en el punto $\vec{x}$. Además, $\vec{V}(\vec{X}_o, t_o, t) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$ es el campo de velocidades de las partículas dado en forma lagrangeana.

Observación:
Cuando los campos son estacionarios, es decir, que en la Descripción Euleriana no dependen de t (e.g. la velocidad es sólo función de las coordenadas espaciales $\vec{v}(\vec{x})$), las tres líneas se confunden en una, como es obvio de la simple observación de las ecuaciones de definición respectivas en su forma espacial euleriana.

En muchos casos se asume t_o fijo y en particular, igual a cero, desapareciendo como argumento explícito de las funciones *F*. De esta manera es usual expresar las funciones de descripción lagrangeanas del movimiento como $\vec{x} = \hat{x}(\vec{X}, t)$, que pueden interpretarse de la manera siguiente: dónde está al tiempo *t* la partícula que en el tiempo inicial -fijo- estaba en $\vec{X}$.

Derivada Material:

Habíamos dicho que en fluidos la Descripción más útil es la Euleriana o Espacial, asociada a los puntos del espacio y no a las partículas. Sin embargo, las leyes de la física, se refieren siempre a entes materiales, como por ejemplo la Segunda Ley de Newton, o sea, $\boldsymbol{f} = m\ \boldsymbol{a}$.
En este caso la aceleración $\boldsymbol{a}$ es la tasa de cambio en la velocidad de la partícula de masa *m*.

Si en la Descripción Espacial el campo de velocidades viene dado por $\bar{v}(\bar{x},t)$ la aceleración **no será** $\frac{\partial \bar{v}(\bar{x},t)}{\partial t}$, ya que esta derivada indicaría sólo el cambio de velocidad que se observa en el punto fijo ***x*** del espacio y no el cambio de velocidad que está experimentando la partícula que se encuentra en ese instante en dicho punto. Por el hecho de que la partícula se mueve dentro del campo, y dado que es probable que existan variaciones espaciales (gradientes) del mismo, la partícula experimentará un cambio de velocidad debido a lo que el campo está cambiando en la posición que ella ocupa (cambio local), más un cambio adicional debido a la variación espacial del campo, que ella experimenta como variación temporal debido a su movimiento (cambio convectivo). En fórmulas :

$$\bar{a}\ (\bar{x},t) = \frac{D\ \bar{v}\ (\bar{x},t)}{Dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lim}\ \frac{\bar{v}\ (\bar{x}+\bar{v}.\Delta t\ ,\ t+\Delta t) - \bar{v}\ (\bar{x},t)}{\Delta t}$$

Es fácil demostrar que :

$$\bar{a}\ (\bar{x},t) = \frac{D\ \bar{v}\ (\bar{x},t)}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}\ (\bar{x},t)}{\partial t} + \ \bar{v}\,.\overline{\nabla}\,\bar{v}$$

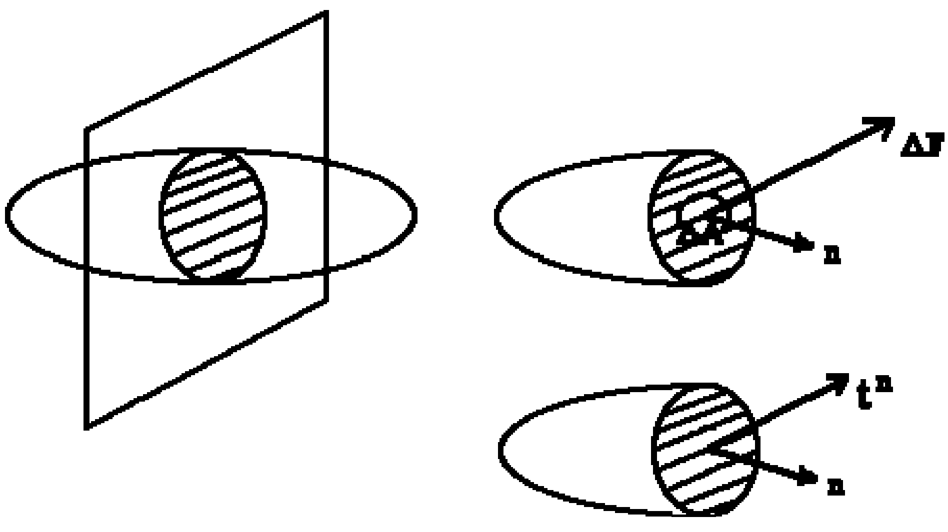
Es decir, la aceleración es el cambio de velocidad en el campo sobre la trayectoria de la partícula, lo que es lo mismo que decir, que es el *cambio de velocidad para la partícula* que se encuentra en ese punto del espacio donde evaluamos el campo.

A modo de ejemplo, pensemos en un campo térmico tal como el atmosférico. En un día calmo, podemos suponer que la temperatura *T* es sólo función de la altura *h* pero no del tiempo. Imaginemos que nos encontramos con los ojos vendados en un globo aerostático que comienza a descender rápidamente sin que nosotros nos percatemos de dicha situación, si el campo térmico disminuye al aumentar la altura, y dado que ahora estamos descendiendo, observaremos una tasa temporal positiva de variación de la temperatura, que será $\frac{DT}{Dt} = \frac{dT}{dh}\ \frac{dh}{dt} = \frac{dT}{dh}\ v$, siendo v la velocidad de descenso del globo. Como este es un caso estacionario, la variación de temperatura que experimentamos es sólo el término convectivo debido a nuestro movimiento dentro del campo térmico, si adicionalmente el campo tuviese una variación temporal por sí mismo, resultaría que la variación de temperatura que experimentaríamos estaría dada por $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dT}{dh}\ v$. En el caso general tridimensional, para el campo térmico tendríamos $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \ \bar{v}\,.\overline{\nabla}\,T$.

EL TENSOR DE TENSIONES

El problema que nos proponemos elucidar en esta sección, es el de la caracterización del Estado Tensional de un punto de un cuerpo. Si tomamos como concepto fundamental y punto de partida que existen distribuciones de fuerza por unidad de área sobre cada superficie con que se seccione a un cuerpo en un punto dado, inmediatamente surge la dificultad siguiente: por un punto de un cuerpo pasan infinitas superficies. De esta manera, caracterizar el Estado Tensional de un punto del cuerpo conlleva conocer las fuerzas por unidad de área para cada una de las infinitas superficies que pasan por dicho punto. El problema comienza a simplificarse, relativamente, cuando nos percatamos que todas las superficies materiales tangentes en un punto están bien representadas por un único plano, que a su vez queda definido por el punto en cuestión y su normal **n** (ver fig. 1 y 2).

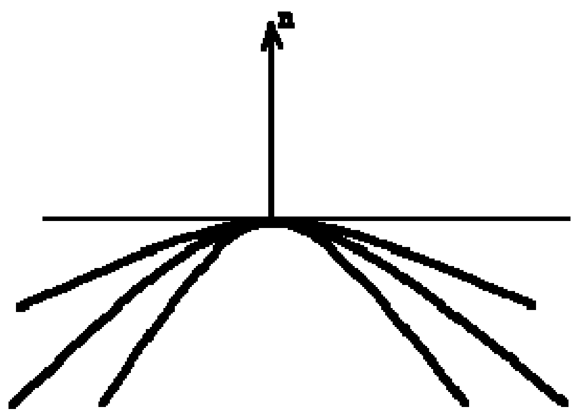
Figura 1.



Se denomina a $\mathbf{t}^n$ como el *vector tensión* actuante sobre el plano de normal **n**. Es la fuerza por unidad de área que se ejerce sobre el plano en el punto considerado, y se deriva del siguiente límite,

$$\mathbf{t}^n = \lim \Delta\mathbf{F}/\Delta A \quad \text{con } \Delta A \to 0$$

Figura 2.

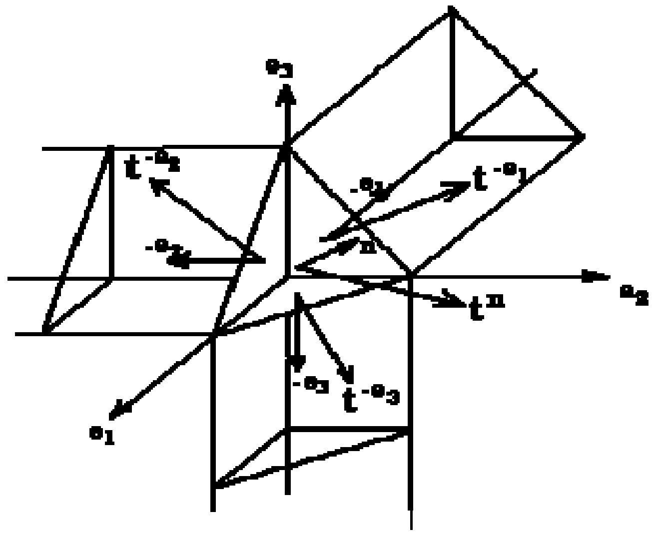


De acuerdo a la fig 1, y teniendo en cuenta el Principio de Acción y Reacción, se llega a

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = -\mathbf{t}^{-\mathbf{n}}$$

Es decir la fuerza que una mitad del cuerpo le ejerce a la otra, es igual y de sentido contraria a la que la segunda ejerce sobre la primera. Observar que al elegir **n** como la normal del plano, $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ representa la fuerza que la mitad del cuerpo que queda por delante del vector ejerce sobre la mitad que queda por detrás del mismo.
Pero persiste aun la dificultad antes referida, en relación a que por un punto pasan infinitos planos, y deberíamos por lo tanto conocer los infinitos $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ asociados a cada uno de dichos planos. Un problema que aparece todavía como complicado de resolver. Pero vamos a demostrar que no es necesario conocer todos los $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ sino que bastará con conocer tres de dichos vectores. Demostraremos que cualquier $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ es una combinación lineal -CL- de los vectores tensión asociados a los planos perpendiculares a los ejes coordenados.
Consideremos el esquema de un tetraedro elemental presentado en la fig 3.

Figura 3.



Antes de comenzar, aclaremos que en el límite el cociente ΔV/ΔA del volumen del tetraedro respecto del área de la cara oblicua tenderá a cero cuando ΔA tienda a cero, siendo esta proposición muy sencilla de demostrar.
Ahora bien si planteamos la Segunda Ley de Newton para el tetraedro resulta

$$\mathbf{t}^{-ej}\,\Delta A_j\,.\,\mathbf{e}_i + \mathbf{t}^{\mathbf{n}}\,\Delta A\,.\,\mathbf{e}_i + \rho\, f_i\,\Delta V = \rho\,\Delta V\, a_i$$

con ΔA_j la proyección de ΔA en el plano normal al eje j , $\Delta A_j = \Delta A\ \mathbf{n}.\mathbf{e}_j = \Delta A\ n_j$, siendo a_i las aceleraciones y f_i las fuerzas por unidad de masa en la dirección i.
Por lo tanto

$$\mathbf{t}^{-ej}\,\Delta A\, n_j\,.\,\mathbf{e}_i + \mathbf{t}^{\mathbf{n}}\,\Delta A\,.\,\mathbf{e}_i + \rho\, f_i\,\Delta V = \rho\,\Delta V\, a_i$$

y reagrupando,

$$\mathbf{t}^{-ej}\, n_j\,.\,\mathbf{e}_i + \mathbf{t}^{\mathbf{n}}\,.\,\mathbf{e}_i = \Delta V/\,\Delta A\ \rho\,(\,a_i - f_i\,)$$

tomando el límite, el segundo miembro se anula y, por lo tanto,
$\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\,.\,\mathbf{e}_i = -\,\mathbf{t}^{-ej}\, n_j\,.\,\mathbf{e}_i$ lo cual implica a su vez que $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = -\mathbf{t}^{-ej}\, n_j$.
De tal manera que hemos probado nuestra afirmación de que el vector tensión que existe sobre un plano de normal arbitraria **n** puede escribirse como CL de los vectores tensión correspondientes a los 3 planos perpendiculares a los ejes coordenados. Se ha reducido entonces el problema de caracterizar el Estado Tensional de un punto del cuerpo a la especificación de tres vectores o lo que es lo mismo de sus nueve componentes.
Como vimos la componente i de $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ es:

$(\mathbf{t^n})_i = \mathbf{t^n} \cdot \mathbf{e}_i = -\,\mathbf{t}^{-ej}\, n_j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{t}^{ej}\, n_j \cdot \mathbf{e}_i$, la última igualdad se deriva del Principio de Acción y Reacción. Entonces es lícito escribir

$$(\mathbf{t^n})_i = (\mathbf{t}^{ej} \cdot \mathbf{e}_i)\, n_j$$

definiendo la matriz $\sigma_{ji} = (\mathbf{t}^{ej} \cdot \mathbf{e}_i)$ que a la postre será el **Tensor de Tensiones**, se entiende que σ_{ji} es la fuerza por unidad de área actuante en la dirección i que existe sobre el plano normal el eje j . Es inmediato que $(\mathbf{t^n})_i = \sigma_{ji}\, n_j$ o expresado matricialmente,

$$\boldsymbol{t}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n}$$

Por lo tanto conociendo $\boldsymbol{\sigma}$ queda completamente caracterizado el Estado Tensional del punto. La tensorialidad de la matriz $\boldsymbol{\sigma}$ se deduce inmediatamente del hecho que, su definición es un producto escalar entre dos vectores que transformará con la regla usual de los tensores. Puede argumentarse a favor del carácter bilineal de la forma asociada, $\mathbf{t^n} \cdot \mathbf{d} = (\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{d} = \sigma(\mathbf{n}, \mathbf{d})$, es decir, $\sigma(\,.\,,\,.\,)$ es el tensor (forma bilineal), que a cada par de vectores le hace corresponder un número real que es la fuerza por unidad de área actuante en la dirección **d** sobre un plano de normal **n**. Es importante observar que hemos usado el producto escalar para obtener la forma asociada, y como su resultado es una fuerza, será invariante frente a rotaciones, lo que pone en evidencia la tensorialidad de $\boldsymbol{\sigma}$.
De la ecuación de momento se deduce rápidamente que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico cuando en el medio no existen cuplas distribuidas (por unidad de volumen), lo cual es correcto para la mayoría de los fluidos. Resultando entonces,

$$\boldsymbol{t}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

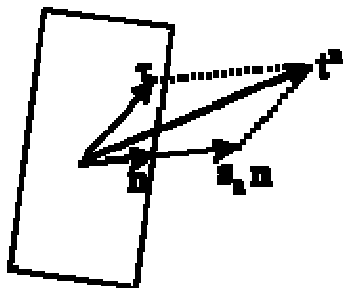
teniendo $\boldsymbol{\sigma}$ sólo 6 componentes independientes.

Se define la **Componente Hidrostática** de $\boldsymbol{\sigma}$ como $\mathbf{H} = 1/3\ \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{I}$ siendo **I** la matriz identidad. **H** tiene entonces sólo componentes diagonales e iguales entre sí, cuyo valor representa al valor medio de las tracciones existentes en los tres planos perpendiculares a los ejes coordenados. Si definimos la presión mecánica como
$p_m = -\ 1/3\ \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$, dado que las presiones serán positivas cuando los esfuerzos sean de compresión (orientados según la dirección contraria a las normales de los planos correspondientes), puede escribirse $\mathbf{H} = -p_m \mathbf{I}$.
Será tema de debate futuro la cuestión de cuando la presión mecánica coincide con la termodinámica.
Al considerar a **H** como actuando aisladamente, vemos que representa un **Estado Hidrostático** de tensiones, dado que para cualquier plano los esfuerzos serán siempre normales. Es decir, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = -p_m \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = -p_m \mathbf{n}$. Tenemos entonces que la partícula de fluido se encuentra sometida a un **Estado Hidrostático** de tensiones cuando $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}$.
Adicionalmente definiremos el tensor **Desviador de Tensiones** como $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{H}$. Así como **H** está asociado a los cambios de volúmen pero no de forma en cuerpos isótropos (en todas las direcciones se ejerce la misma fuerza), **S** se asocia normalmente a los cambios de forma isocóricos (distorsiones), fundamentalmente debido a que su traza es nula ($\mathrm{tr}\,\mathbf{S} = 0$).

Dado un plano de normal **n** (fig.4) se define como componente normal de la tensión $s_n = \mathbf{t}^n \cdot \mathbf{n}$, proyección del vector tensión en la dirección de la normal.
El vector tensión puede descomponerse en su componente normal al plano y su componente tangencial o de corte (componente coplanar que actúa contenida en el plano),

$$\mathbf{t}^n = s_n\,\mathbf{n} + \tau \text{ con } \tau = \mathbf{t}^n - s_n\,\mathbf{n}$$

Figura 4.



Repaso de Vectores. Cambios de Base. Formas Bi-lineales o Tensores de 2 rango.

Dada la base E={$\mathbf{e}_i$}, i=1..3 (con negrilla denotamos la vectorialidad de un elemento dado) , cualquier vector **x** es una combinación lineal de los vectores de la base,
tenemos entonces para el vector **x** la expresión siguiente:
$\mathbf{x} = x_i\,\mathbf{e}_i$ suma en i=1..3 (de aquí en más damos por supuesto la variación de los índices desde 1 hasta 3, y la suma sobre índices repetidos).
Se dice entonces que x_i son las componentes de **x** en la base E.

Dada otra base cualquiera E'={$\mathbf{e'}_j$}, es posible expresar a cada uno de los e'j como *combinación lineal* (CL) de los vectores de la base E:

$$\mathbf{e'}_j = Q_{ji}\,\mathbf{e}_i ,$$

observar que cada $\mathbf{e'}_j$, con j fijo, es una combinación lineal de los $\mathbf{e}_i$.

Usualmente, $\mathbf{Q} = [Q_{ji}]$ se designa como la "matriz de cambio de base", que expresa la base E' en función (como CL) de la base E. Pero si los vectores de la base transforman con **Q**, ¿con qué matriz transformarán las componentes de un vector?.

Dado $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_j \mathbf{e}'_j = x'_j Q_{ji} \mathbf{e}_i \Rightarrow (x_i - x'_j Q_{ji}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \Rightarrow x_i - x'_j Q_{ji} = 0$

Es decir,

$$x_i = x'_j Q_{ji} ,$$

o matricialmente

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{Q}^t \boldsymbol{x}'$$

de lo cual inmediatamente se deriva que:

$$\boldsymbol{x}' = [\mathbf{Q}^t]^{-1} \boldsymbol{x}$$

(Con letra italica y negrilla se ha notado a la matriz de componentes del vector, matriz de 3x1 para el espacio usual.)

Por lo tanto, mientras los vectores de la base transforman con **Q**, las componentes transforman con la inversa de su traspuesta. Como conclusión, podemos afirmar que cuando ambas bases sean ortonormales, tanto sus versores como las componentes, transformarán con **Q**, ya que en ese caso traspuesta e inversa coinciden. En resumen,

$$\mathbf{e}'_j = \mathbf{Q}\, \mathbf{e}_i \;\text{ y }\; \boldsymbol{x}' = \mathbf{Q}\, \boldsymbol{x}$$

sólo para *bases ortonormales* -BON- (si y sólo si E y E' están compuestas respectivamente, de vectores de módulo unitario y mutuamente perpendiculares).

En el caso de BON, resulta

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i \;,$$

la componente i del vector **x** es su proyección (producto escalar) sobre el versor $\mathbf{e}_i$, dado que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = x_j \cdot \delta_{ij} = x_i$. Es fácil deducir entonces que,

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j .$$

Formas bilineales

Del análisis de varias variables reales estamos familiarizados con funciones del tipo f (x,y) = z , $f : RxR \rightarrow R$, es decir f es una función del producto cartesiano de los números reales consigo mismo en los reales. En otras palabras f es una función que a cada par de números reales (x,y) le asigna otro número real z .

Nos preguntamos ahora, qué condiciones debe cumplir f para ser bilineal. Diremos que f es bilineal si es lineal en cada uno de sus argumentos, i.e.,

$$f(\alpha x + \beta w , y) = \alpha f(x,y) + \beta f(w,y)$$

y además,

$$f(x, \alpha y + \beta w) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,w).$$

Definición,

Tensor de 2º rango : un tensor de segundo rango es una forma bilineal definida sobre el producto cartesiano de un espacio vectorial V. Es decir, un tensor es una función (forma porque su rango es R) que a cada par de vectores les asigna un número real, siendo además lineal en cada uno de sus argumentos.

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = z,\ T: V\mathrm{x}V \rightarrow R$$

y además,

$$T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \alpha\, T(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \beta\, T(\mathbf{w},\mathbf{y})\ ;\ T(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{w}) = \alpha\, T(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \beta\, T(\mathbf{x},\mathbf{w}).$$

Observación: la función f del párrafo anterior es un tensor de segundo rango, que está definido sobre un espacio vectorial de dimensión 1(el conjunto R).

Siendo un tensor una forma bilineal, tenemos:

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T(x_i\,\mathbf{e}_i, y_j\,\mathbf{e}_j) = x_i\, y_j\, T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = x_i\, y_j\, T_{ij}$$

Definimos $T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ las componentes del tensor T en la base E. Observemos que dichas componentes son los números reales que resultan de aplicar el tensor a los vectores de la base. En caso de un espacio tridimensional tendremos 9 componentes, que podrán disponerse en forma matricial tomando el índice i para las filas y j para las columnas. Denotaremos por **T** a la matriz de componentes T_{ij} , $\mathbf{T} = [T_{ij}]$. Con la regla usual de producto de matrices y representando a **x** como una matriz ***x*** de 3(filas)x1(columna) para vectores en R^3, se tiene que:

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{x}^t\, \mathbf{T}\, \boldsymbol{y}\,.$$

Cambio de base.

Se denominan tensores cartesianos a las representaciones (componentes) de tensores para bases BON. En adelante nos restringiremos a bases BON, dado que es lo justo y necesario para comprender los conceptos fundamentales de la Mecánica de los Fluidos.

Denotaremos por ***x*** a la representación matricial de las componentes del vector **x** en la base E y, por ***x'*** a la representación matricial de **x** en la base E' y con **Q** la matriz de cambio de base, se deduce que:

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{x}^t\, \mathbf{T}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'^{\,t}\ \mathbf{T}'\ \boldsymbol{y}'\,,$$

dado que:

$$\mathbf{T} = [T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)] = [T_{ij}]$$

y análogamente,

$$\mathbf{T}' = [T(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)] = [T'_{ij}].$$

Si $\boldsymbol{x}' = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}' = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{y}$ resulta que,

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{x}^t\, \mathbf{T}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'^{\,t}\ \mathbf{T}'\ \boldsymbol{y}' = (\mathbf{Q}\,\boldsymbol{x})^t\, \mathbf{T}'\, \mathbf{Q}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t\, \mathbf{Q}^t\, \mathbf{T}'\, \mathbf{Q}\ \boldsymbol{y}\,,$$

por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^t\, \mathbf{T}'\, \mathbf{Q}$$

y también

$$\mathbf{T'} = \mathbf{Q\ T\ Q}^t.$$

Otra manera de arribar al mismo resultado, pero tal vez más elegante, es la siguiente:

$$T'_{ij} = T(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e'}_j) = T(Q_{ir}\,\mathbf{e}_r, Q_{js}\,\mathbf{e}_s) = Q_{ir}\,T(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s)\,Q_{js} = Q_{ir}\,T_{rs}\,Q_{js}$$

y por lo tanto tenemos nuevamente que $\mathbf{T'} = \mathbf{Q\ T\ Q}^t$. En la anterior se ha usado la bilinealidad de T para sacar los coeficientes Q_{ij} fuera del operador.

Ahora bien esta propiedad de transformación de los tensores puede usarse como su definición, es decir, será un tensor todo objeto matricial (n x n) que transforme en la manera enunciada en el párrafo anterior, para el caso de cambio de base entre BON.

Algunas definiciones adicionales:

Se define como **la traza del tensor T**, a la suma de las componentes diagonales:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{T} = T_{ii}\,.$$

Es fácil demostrar que la traza es un invariante frente a un cambio de coordenadas.

Se define como **producto contraído de dos tensores** (equivalente tensorial del producto escalar de vectores) al número real que resulta de la suma de los productos de componentes homólogas,

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = T_{ij}\,S_{ij}\,.$$

El producto contraído es también invariante frente al cambio de coordenadas.

Por otra parte, dada la matriz del tensor podemos asociarle una transformación lineal T: V → V de la manera usual,

$$y_i = T_{ij}\,x_j \quad \text{o} \; \boldsymbol{y} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{x}.$$

A su vez puede recuperarse la forma bilineal a través del producto escalar

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{T}\,\mathbf{z}) \,.\, \boldsymbol{x}\,.$$