MECANICA DE LOS FLUIDOS Y MAQUINAS FLUIDODINAMICAS
Dr. Ing. Santiago A. Urquiza
Profesor Titular
Dpto Mecánica- Fac. de Ingeniería- UNMDP
Versión Preliminar - No Revisada-11/08/0904:50

Adimensionalización de ecuaciones: Algunas consideraciones interesantes

Asumimos como postulado que todo fenómeno físico es representable por ecuaciones matemáticas, en tanto los fenómenos físicos se corresponden con conceptos que es posible cuantificar. Por lo tanto, toda ecuación de contenido físico representará relaciones entre dichas cantidades. Por otra parte, se tiene que las ecuaciones físico-matemáticas pueden representarse de tal manera que respeten la homogeneidad dimensional, es decir, que todos sus términos tengan unidades compatibles. De las ecuaciones que cumplen con dicho requisito se dice que satisfacen el Principio de Homogeneidad Dimensional (PDH). Esto conlleva la importante ventaja que las ecuaciones dimensionalmente homogéneas son invariantes ante el cambio del sistema de unidades. Es así que se asume, a la manera de principio, que dado un fenómeno físico, responde a una ecuación o sistema de las mismas y que además, satisfacen el PDH.

Toda ecuación es de la forma de una sumatoria de productos de potencias de parámetros (variables y constantes) y funciones adimensionales cuyos argumentos pueden expresarse a su vez de la misma forma.
Además, es importante observar, que existirán algunas *unidades fundamentales,* en el sentido que no se derivan de ninguna otra, y que todas las demás podrán derivarse como productorias de potencias de las primeras.

Es interesante resaltar que medir es poner en correspondencia con cierta unidad, es decir, cuando decimos que la longitud de una vara es de 2 m., estamos diciendo que su longitud es 2 veces la de nuestra unidad o referencia de medida, es decir, que el cociente entre la longitud de la vara y la longitud del metro es 2. Ahora bien, los sistemas de medidas convencionales tienen la importante y definitiva ventaja de ser sistemas objetivos y universalmente aceptados. Pero adolecen de una desventaja, no son *naturales* para la mayoría de los problemas. Que queremos decir con esto, por ejemplo que a las circunferencias es *natural* medirlas en relación a su diámetro, siendo su medida en todos los casos en número π; que las longitudes de los caños también es *natural* medirla en relación al diámetro, es decir usar el cociente L/D para comparar el aspecto de los mismos. Observar que tal cociente es adimensional y que pone en correspondencia a todos los caños semejantes, es decir aquellos cuyo cociente arroje el mismo número serán semejantes geométricamente teniendo las mismas proporciones.

Consideremos, a la manera de ejemplo introductorio, una masa conectada a un resorte y sometida a una forzadora senoidal, la resultante de fuerzas F_r quedará expresada de la forma

$$F_r = - K\ x + A \text{ seno } (\omega\ t) \qquad [1]$$

Si con los corchetes denotamos las unidades de la cantidad encerrada, se tiene que en la ecuación [1]:

$[K] = FL^{-1}$
$[x\ ] = L$
$[A] = F$

[t] = T
[Seno()] = [1] (adimensional).
[ω] = T^{-1}
En las anteriores se tiene: F unidad de fuerza, L unidad de longitud, T unidad de tiempo, [1] cantidad adimensional.
Dentro del argumento del seno hay una constante dimensional ω –frecuencia angular-, cuando se tiene Seno(t) debe entenderse que existe una constante dimensional ω de valor unitario.

De esta manera, toda ecuación dimensionalmente homogénea puede expresarse de manera adimensional dividiendo por uno cualquiera de sus términos o por una constante dimensional que tenga las mismas unidades que uno cualquiera de sus términos.
Así, dividiendo la ecuación [1] por A, puede expresarse como sigue:

$$f_r = - x' + \text{seno}\ (t') \qquad [2]$$

con
$f_r = F_r / A$
$x' = x / \delta$ con $\delta = A / K$
$t' = t / T_o$
$T_o = 1 / \omega$

Observar que la ecuación resultante es una relación entre parámetros adimensionales que se obtienen por combinación de productos y divisiones -productos con exponente negativo- de los parámetros originales del problema.

Teorema Pi

Es inmediato ver que si tenemos una ecuación expresada como una determinada relación funcional de un conjunto de parámetros independientes $\{x_i\}$,

$$F\ (x_i) = 0 \quad i = 1...n$$

podremos buscar combinaciones adimensionales independientes de dichos parámetros y reemplazar dicha expresión por otra de la forma:

$$F'(\pi_r) = 0 \quad r = 1...n-k$$

donde los π_r (parámetros o cantidades Pi) **serán el máximo número de parámetros adimensionales independientes** que es posible construir con combinaciones de los x_i a partir de productos de potencias del tipo:

$$\pi_r = \prod_i x_i^{\alpha_r^i} \qquad [3]$$

Observación:
i. los α_r^i deben cumplir dos requisitos:
a) hacer que los π_r sean independientes unos de otros, es decir, que ninguno se pueda expresar en función de una productoria Π de los demás,
b) hacer que los π_r sean adimensionales

ii. cada π_r no será función de todos los x_i de acuerdo a lo sugerido por la forma de la ecuación [3], ya que varios de los exponentes α^i_r serán nulos para cada r.
iii. tener en cuenta que los parámetros x_i son independientes en el sentido que ninguno de ellos puede ser expresado en función de los restantes.
iv. hablamos de parámetros y no de variables en el sentido que dichos valores pueden ser elegidos independientemente en las relaciones F o F´, aunque para un problema en particular, alguno de ellos pueda ser una constante.

La respuesta a lo anterior está dada por el **Teorema Pi**. Dicho teorema, permite la construcción del *máximo número* de parámetros *adimensionales independientes* que es posible obtener a partir de un dado conjunto de parámetros $\{x_i\}$, en general dimensionales.

El teorema Pi parte de asumir que existen cuatro *unidades fundamentales* y que todas las demás son derivadas de las anteriores, a partir de productos de potencias de las mismas. Existen alternativas para la elección del sistema de *unidades fundamentales* (UF), por ejemplo, puede considerarse el sistema M, L, T, θ (masa, longitud, tiempo, temperatura) o alternativamente, F, L, T, θ , el sistema donde la unidad de fuerza F se considera como unidad fundamental. A veces, es conveniente plantear un problema de adimensionalización en los dos sistemas, porque esto suele evidenciar la ausencia real de alguna unidad fundamental. Esto quedará ejemplificado más adelante.

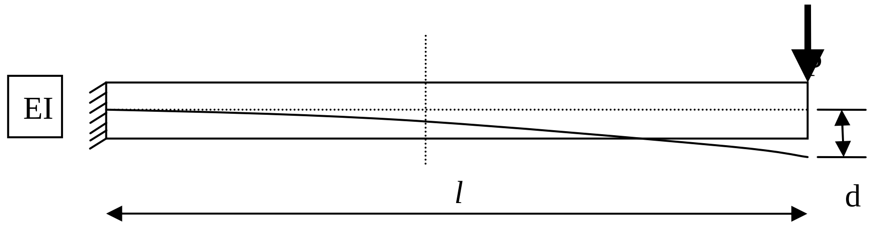
Cómo procede el teorema Pi en su faz operativa.
a) Dado un conjunto de n parámetros independientes x_i (i=1,n) se procede a observar el número k de unidades fundamentales presentes, de manera independiente, en las x_i. Observar que k será menor o igual a 4 en problemas termomecánicamente acoplados y menor o igual a 3 en problemas puramente mecánicos.
b) Se procede a la selección de un sistema “completo” con respecto a las UF de k parámetros dentro del conjunto $\{x_i\}$. Es decir, se seleccionan k parámetros en los que aparezcan k unidades fundamentales de manera independiente. Dicho de otra forma, las x_i’s seleccionadas no formarán una cantidad adimensional π por sí mismas, dado que en ellas las unidades fundamentales aparecen de manera independiente. El sistema se dice completo porque en él aparecen todas las unidades fundamentales presentes en el conjunto de las x_i, de manera independiente. Este conjunto de parámetros se denominan como *variables repetidas o repetitivas*, de acuerdo a la lógica del proceso que se describe a continuación.
c) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el conjunto de las variables repetitivas se corresponde con los k últimos índices del conjunto i. Cada parámetro adimensional se obtendrá buscando para cada r los exponentes que hacen adimensional la siguiente productoria,

$$\pi_r = \left[x_{n-k+1}^{\alpha_r^1} \; x_{n-k+2}^{\alpha_r^2} .... x_n^{\alpha_r^k} \right] . x_r \qquad \text{r =1, n-k}$$

Observar que cada productoria está compuesta de las k *variables repetitivas* con sólo una de las restantes x_i, que con el ordenamiento elegido son las n-k primeras x_i.

De esta manera es obvio que el número de parámetros adimensionales obtenidos será n-k, resultando en una importante reducción en la cantidad de parámetros involucrados en la relación considerada. Por otra parte, también es evidente que a partir de la independencia de los x_i, los π_r así obtenidos serán también independientes, en virtud de que en cada uno de ellos figura un único x_r que no es parte de ningún otro π. Por otro lado, es fácil demostrar que si el conjunto de variables repetitivas es completo, siempre será posible encontrar valores de los exponentes de las variables repetitivas que redunden en la adimensionalización del correspondiente parámetro π.

Ejemplo:



Supongamos una familia de vigas empotradas sometidas a una carga P en su extremo, y que buscamos extrapolar los resultados obtenidos para una dada al resto de la familia. En esto vendrá en nuestro auxilio el análisis dimensional, tendremos entonces una relación funcional de la forma,

$$F(EI, P, d, l) = 0$$

siendo EI la rigidez de la viga, con E módulo elástico de Young e I el momento de inercia de la sección transversal, P la carga aplicada en el extremo libre, d la flecha y l la longitud de la viga.
Si usamos el sistema de unidades fundamentales M, L, T, por simple inspección, observaremos que no es posible encontrar más de 2 parámetros que sean independientes desde el punto de vista de las unidades involucradas aunque, aparentemente, se encuentran presentes las 3 UF. Por lo tanto, k=2. Dicho de otra manera, es imposible encontrar 3 parámetros que no formen un π entre ellos. Esto hubiese sido evidente si se hubiera elegido el sistema F, L, T, ya que el tiempo no hubiese estado presente como es lógico en un problema estático.
Es así que tendremos 2 variables repetitivas, que por conveniencia elegimos EI y l, obteniéndose por lo tanto n-k = 4-2 = 2 parámetros adimensionales.
Resulta entonces la siguiente relación funcional con parámetros adimensionales,

$$F'[\, P/(EI/l^2)\ ,\ d/l\,] = 0$$

de tal manera que,

$$d/l = f\,(P\,l^2/EI)$$

Ejercicio:

a) ¿Qué hipótesis es razonable hacer respecto de la f en el contexto de las pequeñas deformaciones?

b) Deducir los parámetros adimensionales a partir de la secuencia operativa del teorema Pi.

Observación: *Hemos hablado de parámetros independientes y no de variables, para alejarnos de la acepción usual de variable independiente en el contexto de las funciones como variable de control y para remarcar la idea que ciertas constantes en el contexto de un problema en particular, son en realidad variables en el sentido que la solución depende de dichas constantes. Es decir, para la ley del resorte, F = K x , la fuerza F depende tanto del desplazamiento x, como de la "constante" K del resorte, que es constante en tanto que se particulariza para representar un resorte singular.*

Ejemplo: en el caso del sistema masa resorte de la ecuación [1], teniendo en cuenta la 2º Ley de Newton, la ecuación diferencial resultante es,

$$m\, d^2x/dt^2 = - K\, x + A \text{ seno } (t /To)$$
$$dx/dt\,(0) = Vo \; ; \; x(0)= Xo$$

Tenemos distintas posibilidades de elección a la hora de la adimensionalización de esta ecuación diferencial. En principio, para el tiempo es bastante lógico utilizar como base de referencia To, relacionado con el período de la forzadora, aunque otra elección posible podría haber sido $(K/m)^{-½}$ relacionado con el período de las oscilaciones libres. Para el caso de la variable x se abren varias alternativas, por ejemplo, tomar como valor de referencia alguna de las siguientes,
Xr = Xo (desplazamiento inicial y máxima amplitud de las oscilaciones libres si Vo=0)
Xr = $(K/m)^{-½}$ Vo (máxima amplitud para el caso de oscilaciones libres con Xo=0)
Xr = A/K (máxima amplitud debida a la forzadora para el caso de condiciones iniciales nulas).
Para este último caso, la ecuación diferencial puede ser rescrita en su forma adimensional de la siguiente manera,

$$m/(K\, To^2)\, d^2x'/dt'^2 = - x' + \text{seno } (t')$$
$$dx'/dt'\,(0) = Vo\, K/A\, To \; ; \; x'(0)= Xo\, K/A$$

donde x'= K x / A y t' = t/To.
Vemos entonces que la solución de la ecuación diferencial dimensional llevará a una ecuación cuya expresión funcional será de la forma general,
x = f (t, m , K, A, To, Vo, Xo)
Recíprocamente, la forma adimensional conduce a,
x'= f'(t' , m/(K To^2) , Vo To K /A , Xo K / A)

Ejercicio:
1) Adimensionalice la ecuación diferencial usando las alternativas expuestas más arriba. Interprete los resultados ponderando el peso de cada uno de los términos a partir de los números adimensionales correspondientes, preste atención a los casos límite. Obtenga las expresiones correspondientes de la solución de la ecuación diferencial y discuta los casos límite.
2) Obtenga las expresiones f' correspondientes con el uso del teorema Pi, a partir de la selección de distintas variables repetitivas y/o por combinación de números adimensionales ya obtenidos.
3) incorpore en la ecuación diferencial un término correspondiente a una fuerza de fricción proporcional a la velocidad (– R dx/dt).