

# Notas introductorias a la Teoría de Flujos Compresibles

Santiago Adrián Urquiza – Pablo Javier Blanco

29 de noviembre de 2011

## Índice

<b>1. Expresiones para un gas ideal</b>	<b>2</b>
<b>2. Velocidad del sonido en un gas</b>	<b>3</b>
2.1. Número de Mach . . . . .	4
<b>3. Flujo compresible/incompresible</b>	<b>7</b>
<b>4. Propiedades de estancamiento</b>	<b>7</b>
4.1. Condiciones críticas . . . . .	8
<b>5. Flujo isoenergético e isoentrópico en conducto de área variable</b>	<b>9</b>
5.1. Conducto convergente-divergente: Tobera de Laval . . . . .	13
<b>6. Ondas de choque</b>	<b>16</b>
<b>7. Líneas de Fanno y de Rayleigh</b>	<b>19</b>
7.1. Flujo de Fanno . . . . .	20
7.2. Flujo de Rayleigh . . . . .	21
<b>8. Flujo isotérmico de un gas ideal en conductos largos</b>	<b>22</b>

## 1. Expresiones para un gas ideal

$$P = \rho RT \quad (1)$$

$$C_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v \quad (2a)$$

$$C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \quad (2b)$$

Para un gas ideal se tiene  $u = \hat{u}(T)$  y  $C_v$  es constante, y como

$$h = u + \frac{P}{\rho} = \hat{u}(T) + RT \quad (3)$$

entonces  $C_p$  es constante. Además

$$C_v = \frac{d\hat{u}}{dT} \quad C_p = \frac{dh}{dT} = C_v + R$$

Luego

$$C_p = C_v + R \quad \Rightarrow \quad k = \frac{C_p}{C_v} \geq 1 \quad (4)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2) se escribe

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= C_v(T_2 - T_1) \\ h_2 - h_1 &= C_p(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

y por la (3) sale

$$du = dq - Pd(1/\rho)$$

Para transformación reversible

$$dq = Tds$$

Por lo que

$$\begin{aligned} Tds &= du + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = C_v dT + P\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)d\rho \\ ds &= C_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \\ s_2 - s_1 &= C_v \ln \left[ \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} \right] = C_v \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] \end{aligned}$$

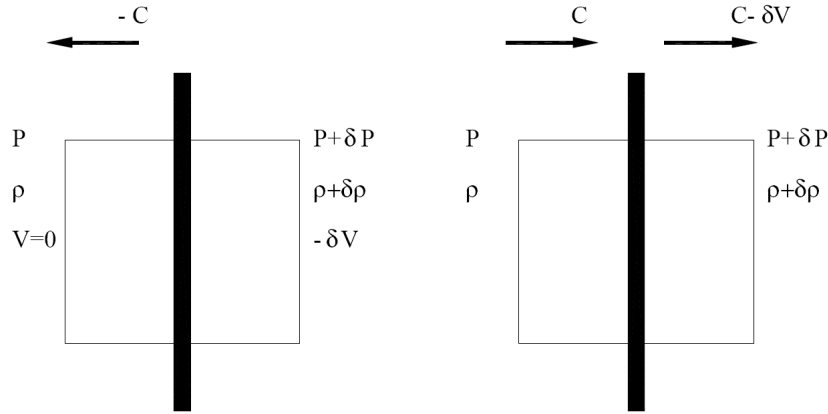


Figura 1: Onda Plana en un gas.

Para un proceso adiabático y reversible es  $s_2 = s_1$ , luego

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1}$$

y el cambio de entalpía para un proceso isoentrópico es

$$h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) = C_p T_1 \left( \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

## 2. Velocidad del sonido en un gas

Una onda plana puede representarse de acuerdo al esquema 1.

De acuerdo con el esquema 1 la ecuación de continuidad (conservación de la masa) se escribe de la siguiente forma

$$\rho A C = (\rho + \delta \rho) A (C - \delta V)$$

$$\rho C = \rho C - \rho \delta V + C \delta \rho - \delta \rho \delta V$$

$$\rho \delta V = C \delta \rho$$

Mientras que la ecuación de momento lineal (2<sup>da</sup> ley de Newton) resulta -luego de despreciar los términos de orden superior y teniendo en cuenta el resultado

arrojado por la ecuación de la continuidad- en lo siguiente

$$\begin{aligned} [(\rho + \delta\rho)(C - \delta V)^2 - \rho C^2] A &= PA - (P + \delta P)A \\ (\rho + \delta\rho)(C - \delta V)^2 - \rho C^2 &= -\delta P \\ (\rho C - \rho\delta V + C\delta\rho - \delta\rho\delta V)(C - \delta V) - \rho C^2 &= -\delta P \\ \rho C\delta V &= \delta P \end{aligned}$$

y usando nuevamente continuidad

$$\begin{aligned} C^2\delta\rho &= \delta P \\ C &= \sqrt{\frac{\delta P}{\delta\rho}} \end{aligned}$$

y puesto que

$$P = P_o \left( \frac{\rho}{\rho_o} \right)^k$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial\rho} &= k \frac{P_o}{\rho_o^k} \rho^{k-1} \\ &= k P_o \frac{\rho^k}{\rho_o^k} \frac{1}{\rho} \\ &= kRT \end{aligned}$$

resultando

$$C = \sqrt{kRT}$$

y definiendo el módulo de compresibilidad volumétrico se escribe

$$\begin{aligned} E_v &= \frac{\delta P}{\delta\rho/\rho} = \rho \frac{\partial P}{\partial\rho} \\ C &= \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \end{aligned}$$

## 2.1. Número de Mach

Se define el número de Mach como

$$M = \frac{V}{C}$$

en las siguientes figuras se muestran esquemáticamente los diferentes casos

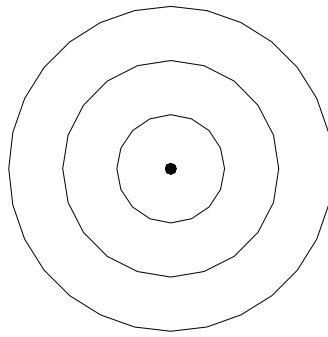


Figura 2:  $M = 0$  Fluido incompresible.

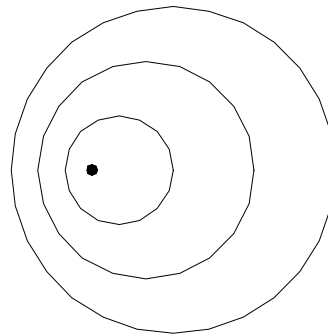


Figura 3:  $M > 0$  Subsónico.

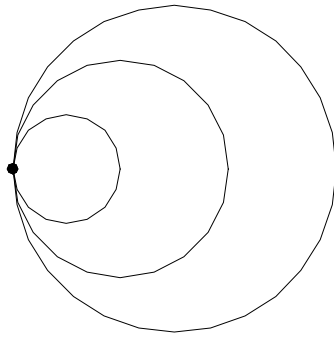


Figura 4:  $M = 1$  Sónico-Transónico.

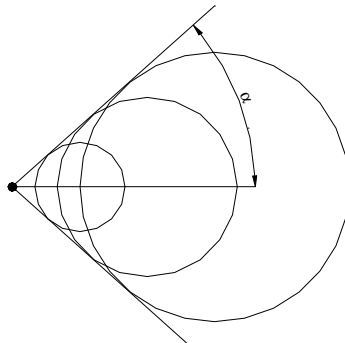


Figura 5:  $M > 1$  Supersónico-Hipersónico ( $\sin \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}$ ).

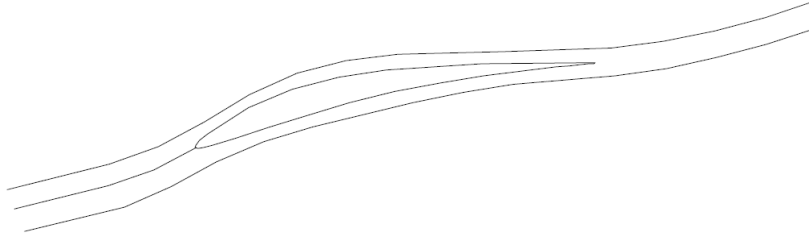


Figura 6: Flujo alrededor de un álabo

### 3. Flujo compresible/incompresible

A continuación se verá cuándo es factible o no considerar un flujo como incompresible en base al número de Mach y la correspondiente variación relativa de la densidad. De acuerdo con la Ecuación de Bernoulli a lo largo de un diferencial de línea de corriente (para el caso estacionario y de acuerdo con una situación similar a la ejemplificada en la fig. 6) se tiene que

$$\begin{aligned} V dV + \frac{dP}{\rho} &= 0 \\ V dV + \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \\ V^2 \frac{dV}{V} &= -C^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -M^2 \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

$$\text{Si } M < 0,3 \Rightarrow M^2 < 0,09 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} < 10 \%$$

### 4. Propiedades de estancamiento

Sea la ecuación de la energía (1<sup>er</sup> Principio de la Termodinámica) planteado para el caso estacionario sobre un tubo de corriente como el de la fig. 7

$$\begin{aligned} u_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}V_2^2 + g h_2 - \left( u_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}V_1^2 + g h_1 \right) &= w_S - q_L \\ \Delta H + \frac{1}{2}\Delta V^2 + g \Delta h &= w_S - q_L \end{aligned}$$

Si  $w_S = 0$ ,  $q_L = 0$  entonces

$$H_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + g h_2 = H_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + g h_1 = H_0$$

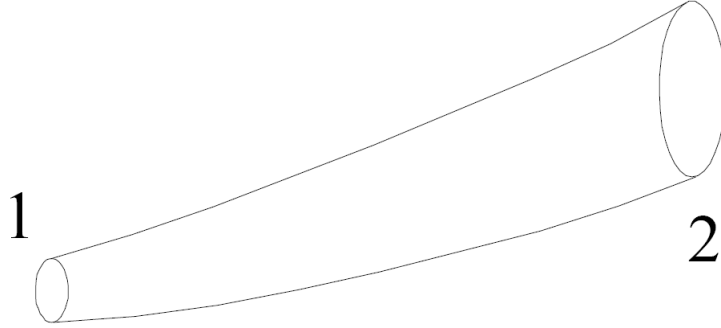


Figura 7: Tubo de Corriente

donde  $H_0$  es la llamada “entalpía de estancamiento” (o de remanso). Observar que es la entalpía real que alcanzaría una partícula si es llevada al estancamiento (velocidad nula a una altura nula) por un proceso adiabático y sin intercambiar trabajo que no sea el de la presión o de la gravedad.

#### 4.1. Condiciones críticas

En el análisis de flujo compresible, se trata la mayoría de las ocasiones con gases y por lo tanto pueden despreciarse las variaciones de altura, entonces resulta:

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv H + \frac{V^2}{2} \\ C_p T_0 &= C_p T + \frac{V^2}{2} \\ T_0 &= T + \frac{V^2}{2C_p} \end{aligned}$$

donde  $T_0$  es la temperatura de estancamiento.

Si por definición asumimos que el proceso de estancamiento es además isoentrópico, se tendrá

$$\begin{aligned} P_0 &= P \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{V^2}{2C_p T} \Rightarrow P_0 = P \left( 1 + \frac{V^2}{2C_p T} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \rho_0 &= \rho \left( 1 + \frac{V^2}{2C_p T} \right)^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}$$



pero  $\frac{V^2}{2C_p T} = \frac{k-1}{2} \frac{V^2}{c^2} = \frac{k-1}{2} M^2$ , en consecuencia

$$\begin{aligned} T_0 &= T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \\ P_0 &= P \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \rho_0 &= \rho \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}$$

Se han definido las condiciones de estancamiento como aquellas que son alcanzadas a través de una transformación virtual isoentrópica e isoenergética (adiabática). Observar que, de todas maneras, las relaciones de estancamiento serán válidas para las transformaciones reales en que dichas condiciones sean satisfechas. Es interesante puntualizar cómo se relacionan las variables en juego a través de las relaciones de estancamiento:

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \Rightarrow M \uparrow \rightarrow T \downarrow, C \downarrow$$

Luego, para el caso de  $M = 1$  es posible definir las denominadas “Condiciones Críticas”:

$$\begin{aligned} \frac{P^*}{P_0} &= \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

## 5. Flujo isoenergético e isoentrópico en conducto de área variable

Sea la situación del conducto convergente-divergente de la fig. 8 por la que circula un gas compresible que parte del reposo desde el recipiente de la izquierda y en la que el gas se encuentra a  $T_0, P_0, \rho_0$ . Es obvio que las condiciones de estancamiento del flujo a lo largo de la tobera y siempre que la evolución sea isoentrópica serán iguales a las condiciones prevalecientes en dicho recipiente. Escribamos la ecuación de continuidad,

$$\rho V A = G (cte.) \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (5)$$

la ecuación de la energía (1<sup>er</sup> principio) se expresa como

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 (cte.) \Rightarrow dh + V dV = 0 \quad (6)$$

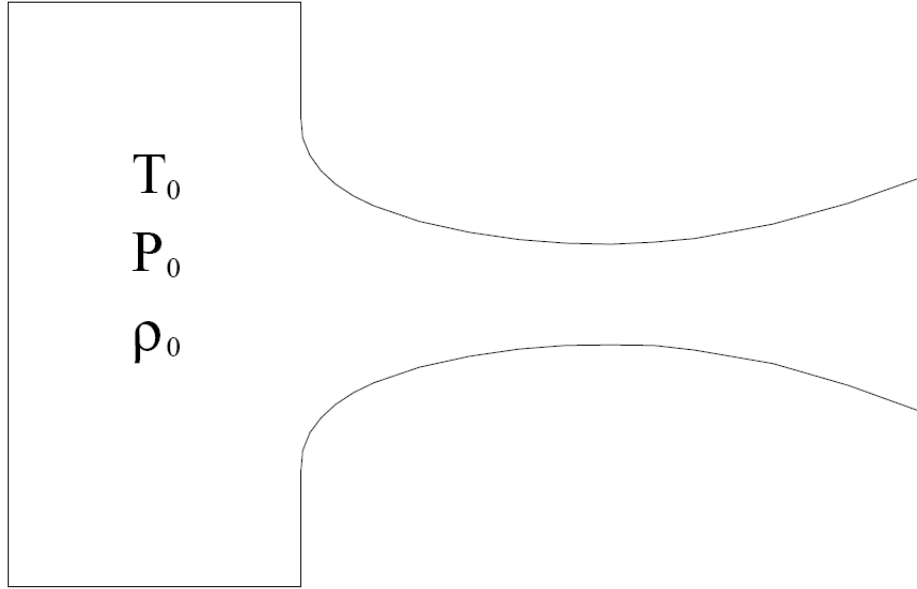


Figura 8: Conducto de área variable

La ecuación para flujo isentrópico (ecuación de Gibbs) impondrá la siguiente relación

$$Tds = dh - \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6) se llega a una expresión que resulta idéntica a la ecuación de la cantidad de movimiento de Bernoulli, de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{\rho} &= V dV \\ dP &= \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_s d\rho = C^2 d\rho \\ C^2 \frac{d\rho}{\rho} &= V dV \Rightarrow \frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

y usando la ecuación de continuidad (ec. 5) resulta que

$$\frac{dV}{V} = \left( \frac{1}{M^2 - 1} \right) \frac{dA}{A}$$

Llegando así a las situaciones observadas en la fig. 9 y en la fig. 10.

Además, si  $M \neq 1$  y  $dA = 0 \Rightarrow dV = 0$ , por lo que la  $V$  tiene un máximo o un mínimo.

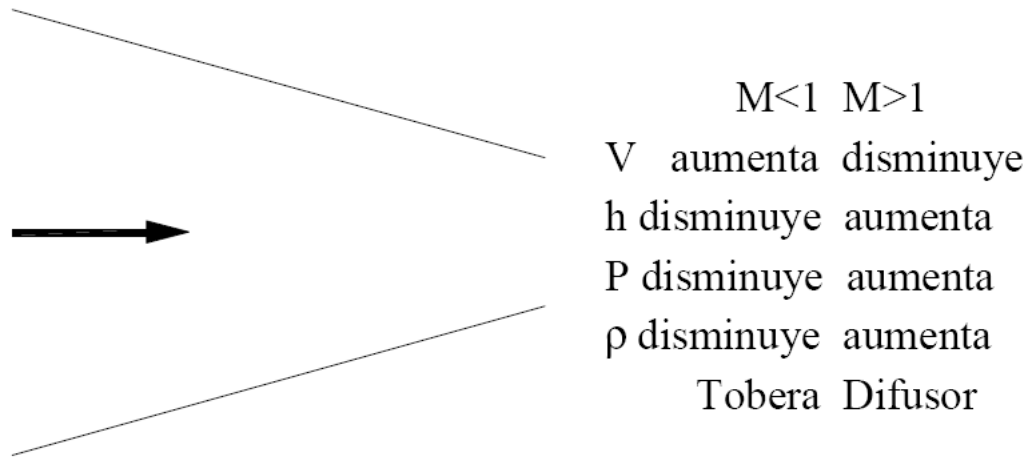


Figura 9: Relaciones para Conducto Convergente

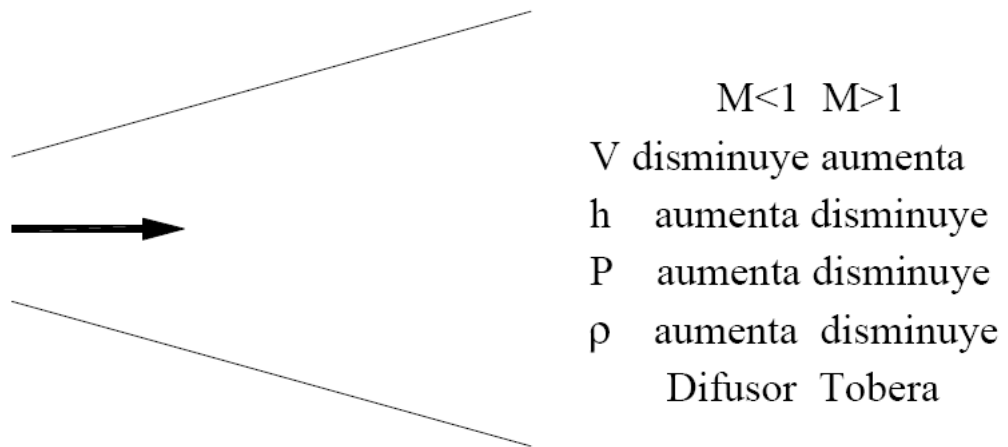


Figura 10: Relaciones para conducto Divergente

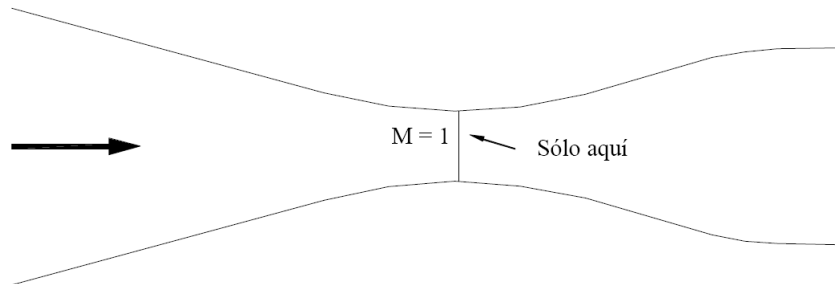


Figura 11: Área mínima o Garganta  $dA = 0$ .

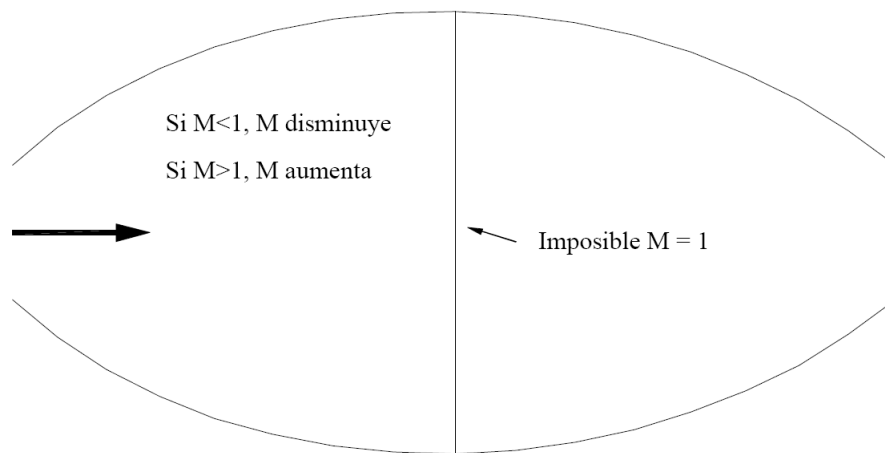


Figura 12: Área máxima  $dA = 0$ .

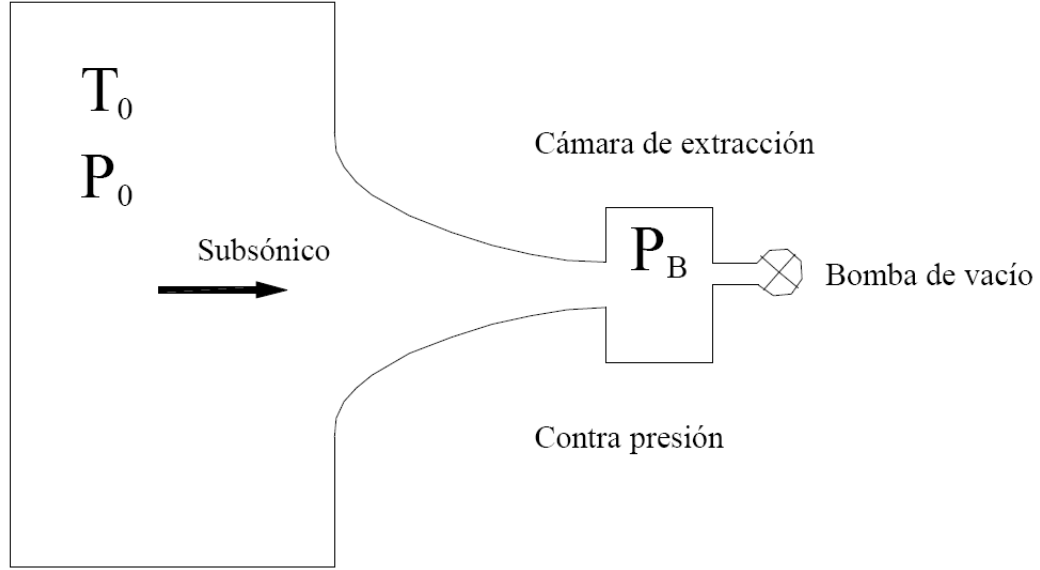


Figura 13: Situación de flujo bloqueado.

Y si  $M = 1$  y  $\frac{dV}{V}$  es finito  $\Rightarrow dA = 0$ . Luego las condiciones sónicas sólo pueden darse en la garganta, en el área mínima.

Para el caso de un Conducto Convergente como el de la fig. 13 sólo puede darse  $M = 1$  en la salida, donde es  $A = A^*$  ( $A^*$ : área mínima). En tal caso se tiene el caudal másico máximo  $G_{max} = \rho^* V^* A^*$  para las condiciones de estancamiento en el recipiente de la izquierda, y se dice que la tobera se encuentra *bloqueada*. Luego si  $\frac{P_B}{P_0} > \frac{P^*}{P_0}$  la tobera no está bloqueada, y si  $\frac{P_B}{P_0} \leq \frac{P^*}{P_0}$  el flujo está bloqueado. Obviamente, se dice que el flujo está bloqueado porque una disminución adicional de la  $P_B$  más allá de  $P^*$  no producirá un aumento del Gasto en el interior de la tobera.

### 5.1. Conducto convergente-divergente: Tobera de Laval

Una tobera convergente-divergente como la esquematizada en la figura 15 se denomina usualmente como Tobera de Laval. Una de sus aplicaciones principales es para lograr flujos supersónicos en cohetería y túneles de viento, llevándose el flujo a condiciones sónicas en la garganta y de ahí a condiciones supersónicas en la parte divergente.

Fijadas las condiciones de estancamiento el flujo en la tobera podrá variar entre varios regímenes de funcionamiento dependiendo de los valores de la contrapresión  $P_B$ . Si la presión  $P_B$  es apenas más baja que la presión de estancamiento entonces tendremos régimen subsónico e isentrópico en toda la tobera. En este régimen el fluido se acelerará en la parte convergente (disminuyendo

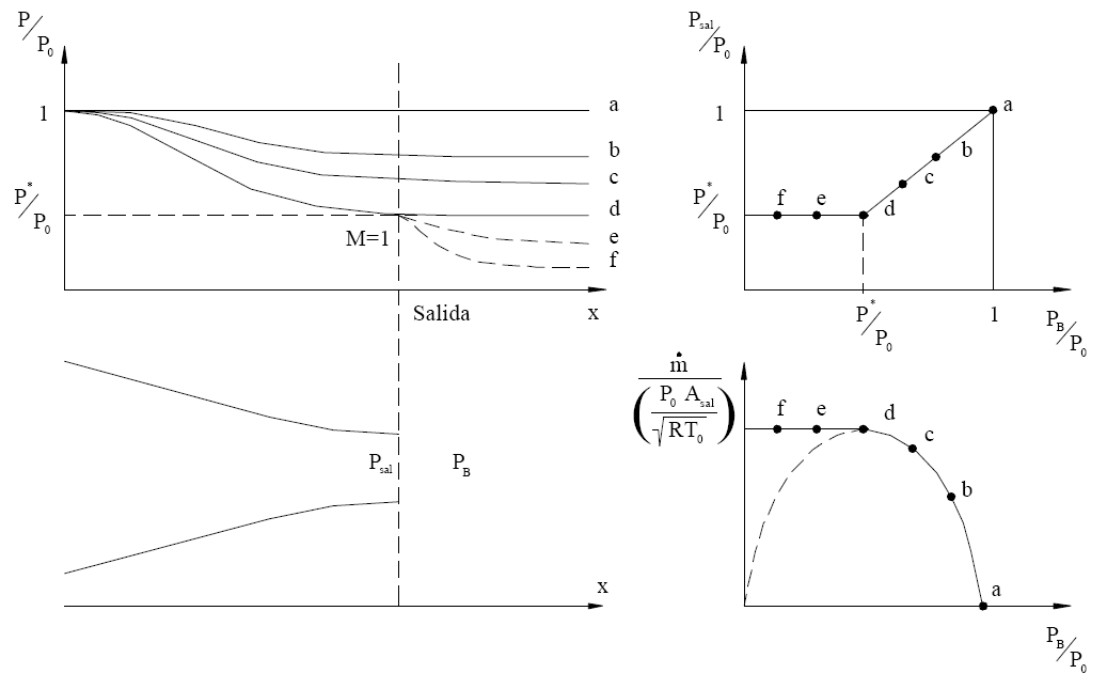


Figura 14: Presión y Gasto a lo largo de un conducto convergente

la presión) para luego desacelerarse en la parte divergente (aumentando la presión). En ese caso la presión del flujo a la salida será igual a la contrapresión  $P_B$ .

Ahora bien, si  $P_B$  disminuye aún más, se alcanzará en algún momento flujo sónico ( $M = 1$ ) en la garganta. A partir de ese momento, si la contrapresión sigue reduciéndose el flujo másico ya no se incrementará, alcanzándose la situación de bloqueo, para la cual toda disminución ulterior de la  $P_B$  no provocará cambios adicionales en el Gasto. Consecuentemente, en una Tobera de Laval se tendrá que el Gasto máximo está dado por la siguiente expresión:

$$\dot{m}_{max} \equiv G_{max} = \rho^* V^* A^* = \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (8)$$

Observar que es Gasto Máximo se da en situación de flujo sónico ( $M = 1$ ) en la garganta, donde el área  $A^*$  es conocida.

En la situación en que el valor de  $P_B$  hace que se alcance  $M = 1$  en la garganta se tendrá que la presión de salida del flujo  $P_{sal}^+$  coincidirá con el valor  $P_B$ , teniéndose además flujo isentrópico en toda la tobera. Un valor de  $P_B$  algo inferior provocará condiciones incompatibles con flujo isentrópico en la sección divergente ya que el diferencial de presión será insuficiente para expandir supersónicamente el flujo a lo largo de todo el desarrollo de dicha parte del conducto, generándose ondas de choque en el interior. En esta situación, luego de pasar por  $M = 1$  en la garganta, el flujo continua expándose alcanzando velocidades supersónicas en la primera parte del conducto divergente, para luego producir una (o varias) onda de choque de compresión. Al atravesar la onda de choque el flujo pasa de régimen supersónico a subsónico con disipación de entropía, aumentando su presión y disminuyendo la velocidad. De ahí a la salida se da un flujo subsónico para el cual, debido a que el área va en aumento, la presión aumenta y la velocidad disminuye. Se da en esta situación que la presión de salida coincide con la contrapresión. Si se sigue disminuyendo la contrapresión  $P_B$  llega un momento en que la onda de choque sale de la tobera. En ese momento, la tobera vuelve a estar en régimen isentrópico nuevamente en todo su desarrollo. En este régimen, en la parte divergente el flujo se irá expandiendo y aumentando la velocidad y el *Mach*. A la salida se alcanzará otro valor de presión  $P_{sal}^*$  compatible con régimen isentrópico en todo el interior. En dicha condición el flujo estará desacoplado en presión del valor de la  $P_B$  que será mayor que  $P_{sal}^*$ . Esta condición se denomina régimen sobreexpandido, ya que el flujo a la salida tiene menor presión y por lo tanto menor densidad que las condiciones en el receptor. Si se sigue disminuyendo la  $P_B$  las condiciones en el interior de la tobera no serán afectadas y en algún momento la presión será  $P_B \leq P_{sal}^*$ , alcanzándose el régimen subexpandido, para el cual la presión y densidad del flujo a la salida son mayores que en el receptor.

La expresión del gasto en función de las variables de salida queda dada por:

$$\dot{m} \equiv G = \rho_{sal} V_{sal} A_{sal}$$

Se tendrán entonces tres situaciones de flujo isentrópico posibles: a) flujo subsónico en toda la tobera con  $P_{sal} = P_B$  b)  $M = 1$  en la garganta y recuperación

subsónica en la sección divergente y c)  $M = 1$  en la garganta y expansión supersónica en la sección divergente.

Teniendo en cuenta que  $P_{sal}$  es la presión del flujo en la sección inmediatamente antes de la salida, si la condición del flujo es alguna de las 3 mencionadas anteriormente serán válidas las siguientes relaciones de flujo isoentrópico:

$$\begin{aligned}\frac{P_0}{P_{sal}} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{sal}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow M_{sal} \\ \frac{\rho_0}{\rho_{sal}} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M_{sal}^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \rightarrow \rho_{sal} \\ \frac{T_0}{T_{sal}} &= 1 + \frac{k-1}{2} M_{sal}^2 \rightarrow T_{sal} \\ C_{sal} &= \sqrt{kRT_{sal}} \rightarrow V_{sal} = M_{sal} C_{sal}\end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores queremos significar que a partir de las relaciones de estancamiento es posible expresar todas las demás variables en función de  $P_{sal}$  (presión en la sección de salida un infinitésimo hacia el interior de la tobera) y las condiciones de estancamiento.

Así podemos evaluar en Gasto  $G$  como

$$G = \rho_{sal} V_{sal} A_{sal} = \sqrt{2P_0 \rho_0 \frac{k}{k-1} \left(\frac{P_{sal}}{P_0}\right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{P_{sal}}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} A_{sal} \quad (9)$$

Observar que la expresión (9) puede usarse para evaluar  $G$  en régimen subsónico -situación a)- considerando que para este caso  $P_{sal} = P_B$ .

La pregunta que sigue es: ¿qué valores de  $P_{sal}$  hacen posible que se de  $G_{max}$  con  $M = 1$  en la garganta, manteniendo flujo isoentrópico en la parte divergente de la tobera? Es decir, cuáles son las presiones de salida que hacen posible los casos isoentrópicos b) y c). Observar que en esta situación ya no necesariamente se tiene que  $P_{sal} = P_B$ , por estar la tobera bloqueada. Para averiguar la respuesta a la pregunta planteada se puede igualar  $G$  en función de la  $P_{sal}$  dado por la expresión 9 (válida para evolución isoentrópica en todo el interior de la tobera) con la expresión de Gasto Máximo dado por la 8. De esta manera resulta que:

$$\left(\frac{P_{sal}}{P_0}\right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{P_{sal}}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = \frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{A^*}{A_{sal}}\right)^2 \quad (10)$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones tal que  $0 < \frac{P_{sal}}{P_0} < 1$  que serán  $P_{sal}^*$  y  $P_{sal}^+$ . Como ya dijimos, si  $P_B < P_{sal}^+$  se dará el caso de tener onda de choque dentro o fuera del conducto.

## 6. Ondas de choque

En la situación en que no es posible flujo isoentrópico para el caso de la tobera de Laval vimos que parecen ondas de choque. Se denominan ondas de choque



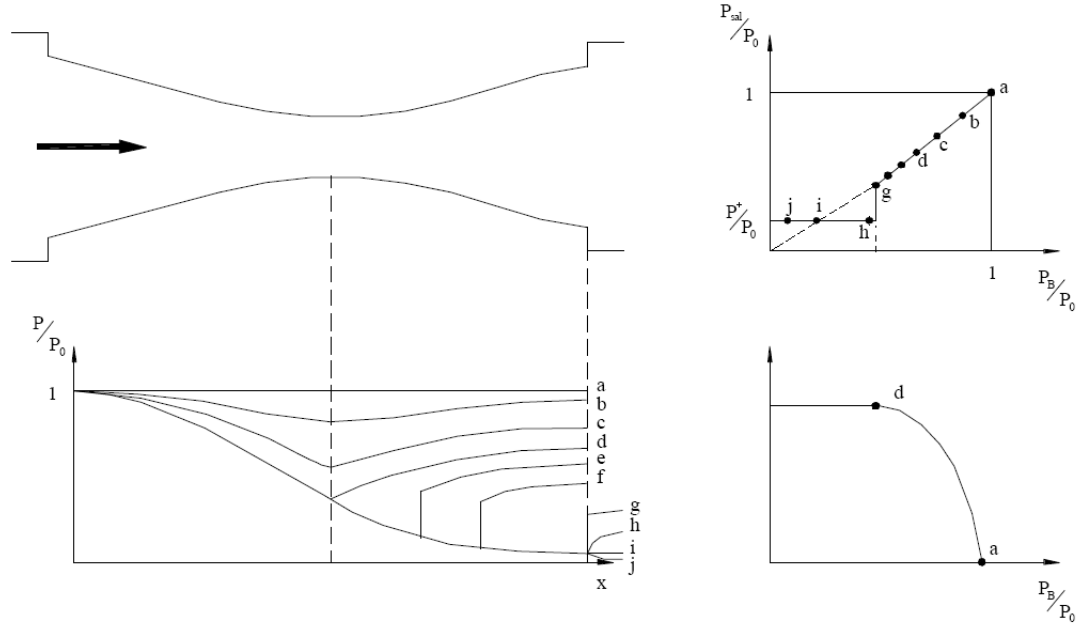


Figura 15: Presión y Gasto en una Tobera de Laval

a aquellas que producen disipación de entropía. Las condiciones que vinculan el estado del fluido a ambos lados de la onda de choque se denominan condiciones de Rankine-Hugoniot. De ellas nos encargaremos en lo sucesivo, teniendo en cuenta el esquema de la figura .

Volvemos a escribir las ecuaciones de continuidad, de energía y de cantidad de movimiento:

$$G = \dot{m} = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (\text{Continuidad})$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = h_0 \quad (\text{Energía})$$

recordando que  $h = u + \frac{P}{\rho} = C_p T$  y que para gases ideales se cumple que  $\frac{P}{\rho} = RT$ .

$$(P_1 - P_2)A = \rho_2 A V_2^2 - \rho_1 A V_1^2$$

$$P_1 + \rho V_1^2 = P_2 + \rho V_2^2 \quad (\text{Cantidad de movimiento})$$

Trabajando un poco las expresiones de arriba resulta

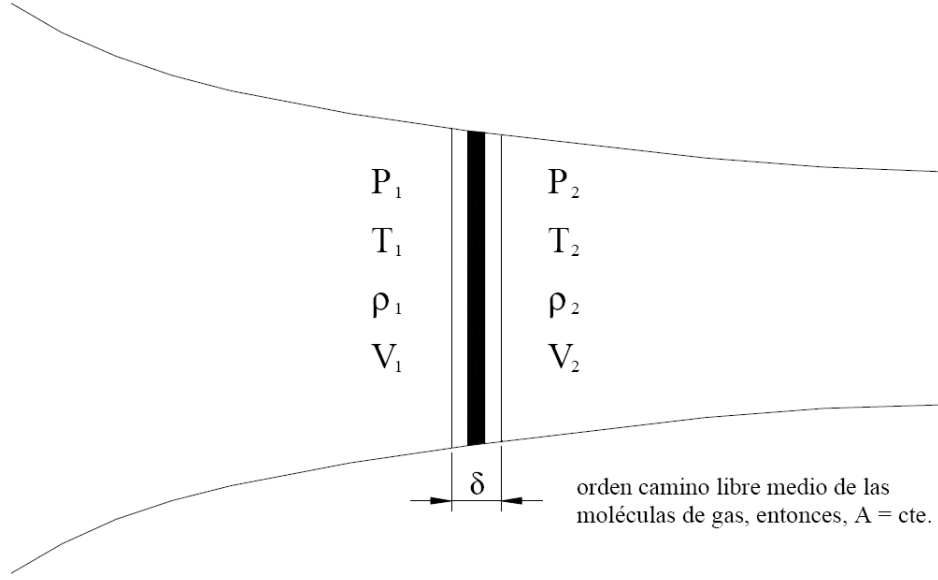


Figura 16: Volumen de control alrededor de la onda de choque

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\left[ \frac{(k+1)}{(k-1)} \right] - 1}{(\rho_2 - \rho_1)}}{\left[ \frac{(k+1)}{(k-1)} \right] - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \left[ \frac{(k+1)}{(k-1)} \right] \frac{P_2}{P_1}}{\left[ \frac{(k+1)}{(k-1)} \right] \frac{P_2}{P_1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2(k+1)}{2 + M_1^2(k-1)}$$

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \left\{ \frac{2kM_1^2 - k + 1}{k+1} \left[ \frac{2 + M_1^2(k-1)}{M_1^2(k+1)} \right] \right\}$$

$$s_2 - s_1 > 0 \Rightarrow M_1 > 1; \frac{P_2}{P_1} > 1$$

Si  $M_1 > 1 \Rightarrow M_2 < 1$ ;  $\frac{P_2}{P_1} > 1$ ;  $\frac{T_2}{T_1} > 1$ ;  $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$ ;  $\frac{P_{02}}{P_{01}} < 1$  y  $s_2 - s_1 > 0$ .

Si  $M_1 < 1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} < 1$  y  $s_2 - s_1 < 0$ , por lo que *no existen ondas de choque por rarefacción*.

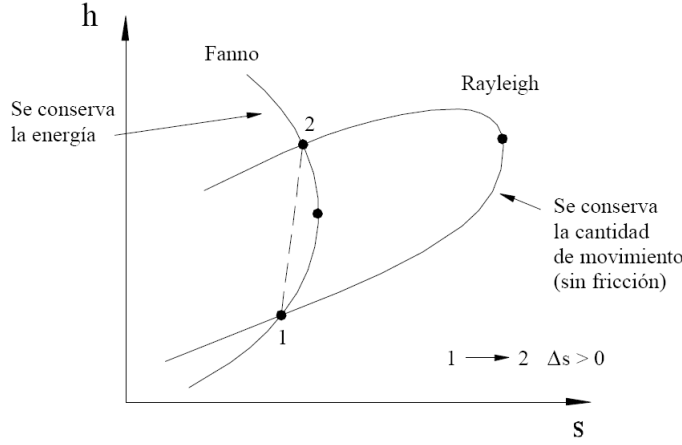


Figura 17: Líneas de Fanno y de Rayleigh.

## 7. Líneas de Fanno y de Rayleigh

Fijadas las condiciones corriente arriba (esto es  $\rho_1, P_1, V_1, T_1$ ) es posible escribir

$$\rho_1 V_1 = \frac{G}{A} = \rho V \quad (11)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_o = h + \frac{1}{2} V^2 \quad (12)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P + \rho V^2 \quad (13)$$

Además es

$$h = C_p T = \frac{C_p}{R} \frac{P}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = \frac{C^2}{k-1} = \frac{V^2}{M^2(k-1)} \quad (14)$$

y por lo tanto

$$s = s_1 + C_v \ln \left[ \frac{P}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^k \right] \quad (15)$$

La validez de las ecuaciones (11) a (13) se aprecia en la figura 17.

Las curvas de Fanno y Rayleigh se usan además para analizar flujos en conductos de área constante en cualquiera de los casos mostrados en las figuras 18 y 19.

Nótese que en ambos casos  $M = 1 \rightarrow$  Máxima Entropía.

Si  $q > 0$  en el caso de Rayleigh  $M < 1 \Rightarrow M \uparrow$  y si  $M > 1 \Rightarrow M \downarrow$

Las situaciones son  $M = 1$  en la salida y estrangulamiento.

$M < 1 \rightarrow$  posible estrangulamiento.

$M > 1 \rightarrow$  posible choque y estrangulamiento.

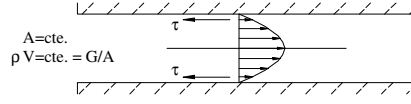


Figura 18: Situación para el análisis de flujo de Fanno (adiabático con fricción).

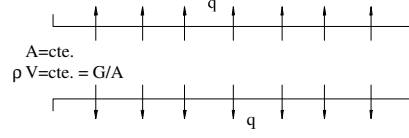


Figura 19: Situación para el análisis de flujo de Rayleigh (con intercambio de calor sin fricción).

### 7.1. Flujo de Fanno

En este caso (11) y (12)  $\rightarrow$  (15)  $\rightarrow$  línea de Fanno. De esta forma escribimos

$$h + \frac{V^2}{2} = h_o = cte. \quad (16)$$

$$\rho V = \frac{G}{A} = cte. \quad (17)$$

entonces

$$h + \frac{(G/A)^2}{2\rho^2} = h_o \Rightarrow dh = -\frac{(G/A)^2}{\rho^3} d\rho = 0 \Rightarrow dh = u^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \rho} \right|_F = \frac{u^2}{\rho} \quad (19)$$

En el punto de máxima entropía de la relación de Gibbs se tiene que

$$Tds = dh - \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (20)$$

Para este punto

$$\left. \frac{\partial P}{\partial h} \right|_{F=\frac{\partial s}{\partial h}=0} = \left. \frac{\partial P}{\partial h} \right|_s = \rho \quad (21)$$

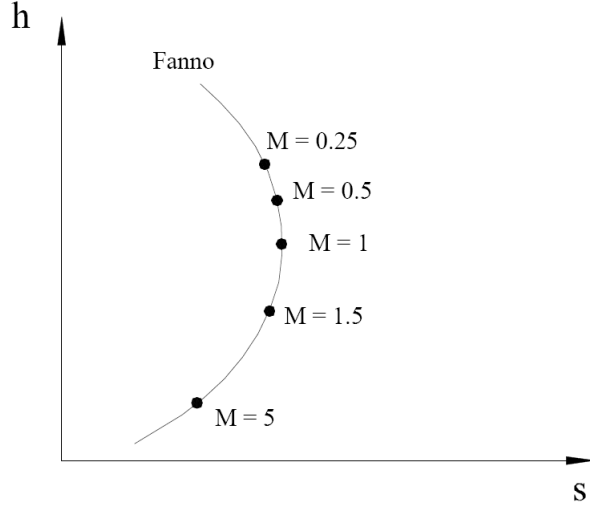
$$u^2 = \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{\partial P}{\partial h} = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = C^2 \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial h} \right|_F = 0 \Rightarrow M = 1 \quad (23)$$

En la figura 20 se observa la ubicación de los diferentes estados de acuerdo al  $M$ .

Halleemos la expresión para la entropía.

$$h = C_p T = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = \frac{C^2}{k-1} = \frac{V^2}{M^2(k-1)} \quad (24)$$


 Figura 20: Plano  $h$ - $s$ . Línea de Fanno.

$$h = \frac{h_o}{1 + \frac{k+1}{2}M^2} \quad (25)$$

$$s - s_1 = C_v \ln \left[ \frac{h}{h_1} (h - h_o)^{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{\sqrt{2}\rho_1}{G/A} \right)^{k-1} \right] \quad (26)$$

## 7.2. Flujo de Rayleigh

En este caso (11) y (13)  $\rightarrow$  (15)  $\rightarrow$  línea de Rayleigh. De esta forma escribimos

$$P + \rho V^2 = cte. = B \quad (27)$$

$$\rho V = \frac{G}{A} = cte. \quad (28)$$

entonces

$$P + \frac{(G/A)^2}{\rho} = B \Rightarrow dP = -\frac{(G/A)^2}{\rho^2} d\rho = 0 \Rightarrow dP = V^2 d\rho \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_R = u^2 \quad (30)$$

y en el punto de máxima entropía, análogamente a lo realizado para el caso de Fanno se tiene que

$$\left. \frac{\partial s}{\partial h} \right|_R = 0 \Rightarrow s = cte. \quad (31)$$

$$u^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{R=\frac{\partial s}{\partial h} \Big|_R=0} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_s = C^2 \quad (32)$$

$$\frac{\partial s}{\partial h} \Big|_R = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 1 \quad (33)$$

En la figura 21 se observa la ubicación de los diferentes estados de acuerdo al  $M$ .

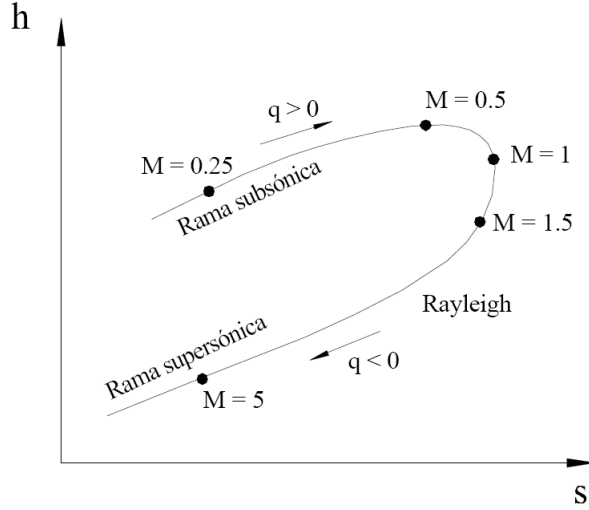


Figura 21: Plano  $h$ - $s$ . Línea de Rayleigh.

Hallemos la expresión para la entropía.

$$h = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{1}{\rho} \left( B - \frac{(G/A)^2}{\rho} \right) \quad (34)$$

$$s - s_1 = C_v \ln \left[ \frac{\rho_1^k}{P_1} \frac{B - \frac{(G/A)^2}{\rho}}{\rho k} \right] \quad (35)$$

Obsérvese que por aporte de calor  $q > 0 \rightarrow M = 1$ . Luego se bloquea  $G \downarrow \Rightarrow$  dado  $G \exists q_{max}$ .

## 8. Flujo isotérmico de un gas ideal en conductos largos

En estos casos no es posible aplicar ninguna de las teorías desarrolladas en las dos secciones anteriores, ya que el flujo de Fanno se aplica a casos de flujo adiabático y el flujo de Rayleigh a casos sin fricción, y este caso no cumple con

ninguna de esas hipótesis. Las ecuaciones a aplicar son, por orden de aparición, la ecuación de cantidad de movimiento con pérdida de carga, la ecuación para flujo isotérmico, la ecuación de continuidad y finalmente la correspondiente a la velocidad del sonido de un gas ideal.

$$\frac{dP}{P} + \frac{f}{2D} \frac{\rho V^2}{P} dx + \frac{\rho V dV}{P} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{P}{\rho} = \text{cte.} \quad ; \quad \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (37)$$

$$\rho V = \text{cte.} = \frac{G}{A} \quad ; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (38)$$

$$C'^2 = kRT = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad V = C' M \quad (39)$$

El último término de la (36) se trabaja un poco

$$\begin{aligned} \frac{\rho V dV}{P} &= \frac{V dV}{RT} = \frac{V^2}{RT} \frac{dV}{V} = k \frac{V^2}{C'^2} \frac{dM}{M} = k M dM \\ \frac{\rho V^2}{P} &= \frac{C'^2 M^2}{RT} = k M^2 \end{aligned} \quad (40)$$

pero además, de la (37) y de la (38) se ve lo siguiente (puesto que  $\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} = \frac{dM^2}{2M^2}$ )

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dM}{M} \quad (41)$$

y combinando la (36) con la (41) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= -\frac{f}{2D} k M^2 dx - k M dM = -\frac{dM}{M} \\ \frac{dM}{M} (1 - k M^2) &= \frac{f}{2D} M^2 dx \end{aligned} \quad (42)$$

y luego

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{k M^2}{1 - k M^2} \frac{f dx}{2D} \quad (43)$$

y como  $dx > 0$  corriente abajo, las propiedades cambian de comportamiento para un valor de  $M$  dado por

$$M = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{V}{C'} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{kRT}}{\sqrt{k}} = \sqrt{RT} = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{T=\text{cte.}}} \quad (44)$$

es decir a flujo sónico se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} C^2 &= \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{T=\text{cte.}} = RT \\ M < \frac{1}{\sqrt{k}} & \quad P \downarrow \rho \downarrow V \uparrow M \uparrow T_o \uparrow \therefore M \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \\ M > \frac{1}{\sqrt{k}} & \quad P \uparrow \rho \uparrow V \downarrow M \downarrow T_o \downarrow \therefore M \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned} \quad (45)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_o &= T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \\ \frac{dT_o}{T_o} &= \frac{k-1}{2 + (k-1)M^2} dM^2 \\ \frac{dT_o}{T_o} &= \frac{k(k-1)M^4}{(1-kM^2)[2 + (k-1)M^2]} \frac{f dx}{D} \end{aligned} \quad (46)$$

y

$$\begin{aligned} P_o &= P \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \frac{dP_o}{P_o} &= \frac{2 - (k+1)M^2}{2 + (k+1)M^2} \frac{kM^2}{kM^2 - 1} \frac{f dx}{2D} \end{aligned} \quad (47)$$

Integremos la (43)

$$\frac{f}{D} \int_0^{L_{max}} dx = \frac{1}{k} \int_M^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{1 - kM^2}{M^4} dM \quad (48)$$

donde la solución es la siguiente

$$f \frac{L_{max}}{D} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \quad (49)$$

y para la presión valdrá

$$\int_P^{P^*} \frac{dP}{P} = -\frac{1}{2} \int_M^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dM^2}{M^2} \quad (50)$$

cuyo resultado es

$$\frac{P^*}{P} = \sqrt{k} M \quad \Rightarrow \quad P^* \leftrightarrow M = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (51)$$

Para el caso de la figura 22 se tiene que

$$\frac{f}{D} (L_M^1 - L_M^2) = \frac{1 - kM_1^2}{kM_1^2} + \ln(kM_1^2) - \left[ \frac{1 - kM_2^2}{kM_2^2} + \ln(kM_2^2) \right] \quad (52)$$

Obsérvese que relaciones similares pueden obtenerse para flujo adiabático con fricción (flujo de Fanno). En ese caso la ecuación equivalente a la (49) se encuentra tabulada

$$f \frac{L_{max}}{D} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) + \frac{k+1}{2k} \ln \left( \frac{M^2(k+1)}{(k-1)M^2 + 2} \right) \quad (53)$$



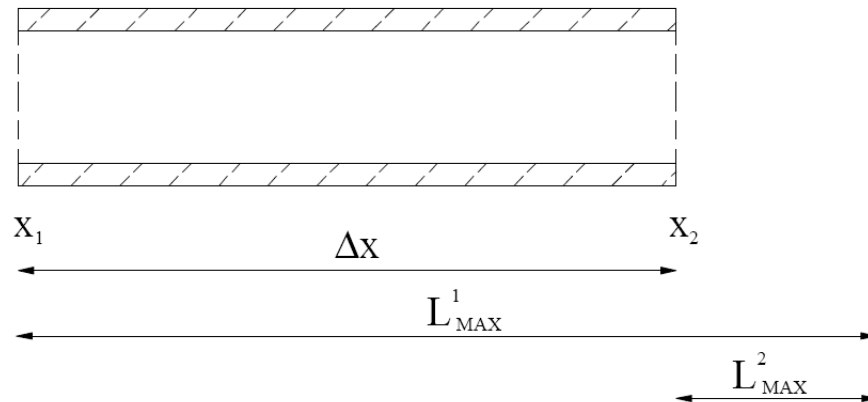


Figura 22: Situación para el análisis de la longitud de estrangulamiento en tuberías largas.