Autores: Dr. Ing. Santiago A. Urquiza , Profesor Titular. Dr. Ing. Hernán J. Desimone , ex alumno.
Dpto Mecánica- Fac. de Ingeniería- UNMDP
Versión Preliminar - No Revisada-11/04/1204:19

Mecánica de los fluidos y máquinas fluidodinámicas

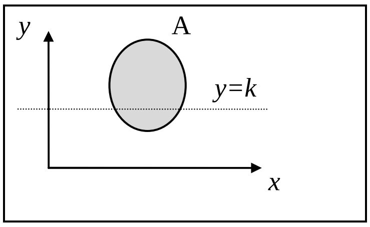
Apunte:

Fuerzas sobre superficies sumergidas

1) Conceptos preliminares:

a) Momento estático de una sección. Centroide.

Se define el momento estático de una sección *A* con respecto al eje *x* como:



$$S_x = \int_A y.dA \qquad (1)$$

Si ahora se toma el momento respecto de un eje paralelo al eje *x*, definido por *y*=*k*, resulta:

$$S_x^{'} = \int_A (y-k).dA = \int_A y.dA - kA \qquad (2)$$

y se observa que es posible elegir un eje a una distancia $k = \bar{y}$ que cumple:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_A y.dA \qquad (3)$$

Análogamente obtenemos un eje paralelo al eje *y*, a una distancia $\bar{x}$ del mismo, que cumple:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x.dA \qquad (4)$$

El punto determinado por el par $(\overline{x},\overline{y})$ se denomina centroide de la sección. En lo que sigue, no se hará distinción entre el centroide de la sección, el centro de masas de la sección (x_M ,y_M) y el centro de gravedad de la misma (x_G ,y_G)

Pregunta: Cual es la diferencia entre el centroide, el centro de masas y el centro de gravedad de una sección?

---

b) Momentos de segundo orden de una sección

Se define el momento de segundo orden de una sección con respecto al eje *x* como:

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA \tag{5}$$

Si se considera el momento de segundo orden con respecto a un eje paralelo al eje x y que pase por el centroide de la sección se obtiene:

$$\overline{I}_{xx} = I_{xx} - \overline{y}^2 .A \tag{6}$$

Donde llamamos $\overline{I}_{xx}$ al momento respecto de un eje paralelo al eje *x* y que pasa por el centroide. Análogamente se define:

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA \tag{7}$$

y puede deducirse que:

$$\overline{I}_{yy} = I_{yy} - \overline{x}^2 .A \tag{8}$$

Siendo $\overline{I}_{yy}$ el momento de segundo orden respecto de un eje paralelo al eje *y* que pasa por el centroide de la sección. Tanto I_{xx} como I_{yy} son siempre positivos.

Se define adicionalmente el momento cruzado de segundo orden con respecto a los ejes x e y como:

$$I_{xy} = \int_A x.y.dA \tag{9}$$

y además se demuestra:

$$\overline{I}_{xy} = I_{xy} - \overline{x}.\,\overline{y}.A \tag{10}$$

Manteniendo la nomenclatura, es decir, $\overline{I}_{xy}$ es el momento cruzado de inercia con respecto a dos ejes, uno paralelo al eje *x*, otro paralelo al eje *y*, que pasan por el centroide de la sección.

El momento cruzado de segundo orden, $\boldsymbol{I}_{xy}$, puede ser tanto positivo como negativo. Si la sección tiene un eje de simetría, el momento cruzado es nulo.

Ejercicios:

1) Demuestre las ecuaciones (6) y (10)

2) Demuestre que en toda sección que tenga un eje de simetría I_{xy} es nulo.

2) Fuerzas sobre superficies curvas sumergidas

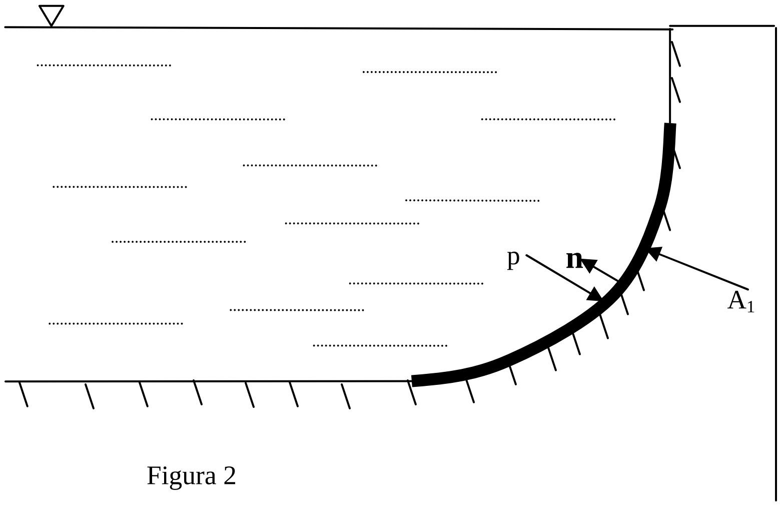


Figura 2

Supongamos que necesitamos averiguar la resultante de los esfuerzos de presión sobre una superficie curva sumergida A_1 cualquiera, tal cual se muestra en la figura 2. Lo primero que haremos será identificar nuestro sistema de análisis construyendo un diagrama del cuerpo libre. Además por cuestiones prácticas trabajaremos con presiones relativas, el lector podrá introducir las correcciones necesarias para trabajar con presiones absolutas. El la figura 3 observamos dicho sistema, en el cual se han identificado las fuerzas externas al mismo. Observar que ahora que la normal sobre A_1 se ha invertido, ya que en estas circunstancias nos estamos planteando los esfuerzos actuantes sobre nuestro sistema. De todas maneras, esto no presenta ninguna dificultad ya que la resultante sobre A_1 que la pared le hace al fluido será igual y de sentido contrario a la que el fluido le hace a la pared, y esto debido al principio de Acción y Reacción. Trabajaremos aquí con presiones relativas, que es lo más conveniente en la mayoría de los casos, debido a que si trabajamos con presiones absolutas necesitaríamos incluir seguramente en el balance de fuerzas de la represa la acción constante de la presión atmosférica en el contorno seco de la misma. Observar que la inclusión de la presión atmosférica no presenta mayores inconvenientes, ya que es un valor constante.

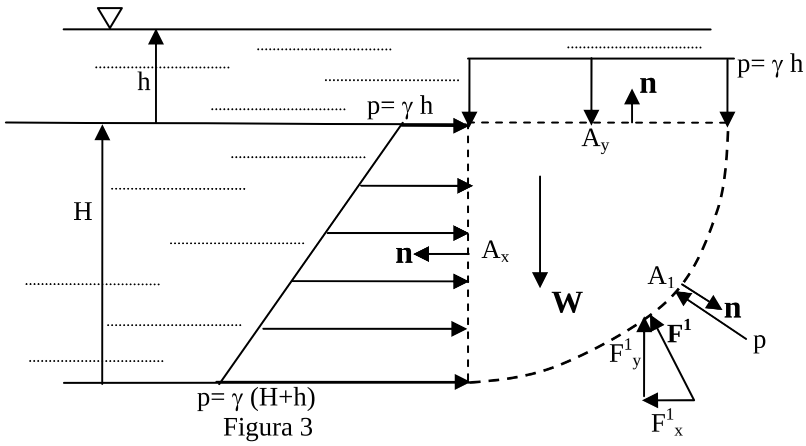


Figura 3

A las proyecciones de A_1 sobre planos normales a los ejes X e Y las hemos denominado con A_x y A_y respectivamente.
Si llamamos F^p_x a la resultante de presiones que actúa sobre A_x y F^p_y a la resultante de presiones que actúa sobre A_y, puede escribirse:

$$F^p_x - F^1_x = 0 \; ; \; F^1_x = F^p_x$$
$$F^p_y + W - F^1_y = 0 \; ; \; F^1_x = F^p_x + W$$

Es inmediato reconocer que la resultante de los esfuerzos de presión sobre A_1 en la dirección horizontal es igual a la correspondiente sobre la superficie proyectada A_x. Para la componente vertical de la fuerza sobre A_1 se tiene que será igual a la integral de la presión sobre A_y más el peso W del agua contenida en el volumen señalado, lo que da como resultado que la componente vertical sobre A_1 es igual al peso de toda el agua que está por encima de ella (más el valor de Po. A_y en el caso que trabajemos con presiones absolutas, es más, podríamos haber dicho "la componente vertical sobre A_1 es igual al peso de todo el *fluido* que está por encima de ella", ya que la presión atmosférica representa a todo el aire que está por sobre la superficie libre). En la figura 4 se observa otro volumen que permite arribar a las mismas conclusiones.

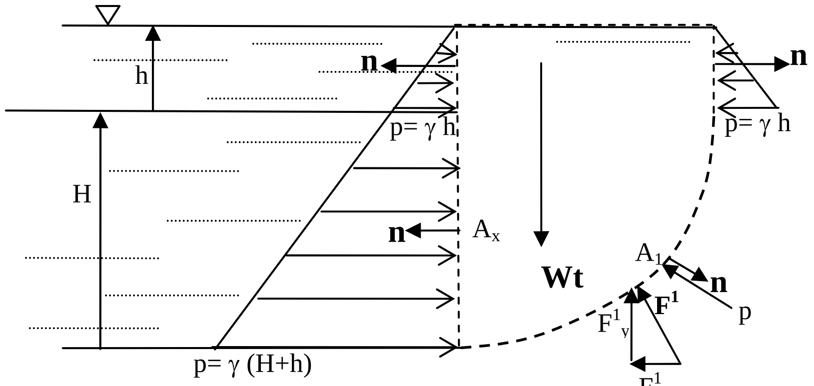


Figura 4

3) Fuerzas sobre superficies planas sumergidas

En el caso que muestra la figura, aguas arriba se encuentra un líquido de peso específico conocido. La placa, con un ángulo de inclinación θ esta sometida a la acción de la presión del líquido por un lado y del otro lado a la presión atmosférica p_o..

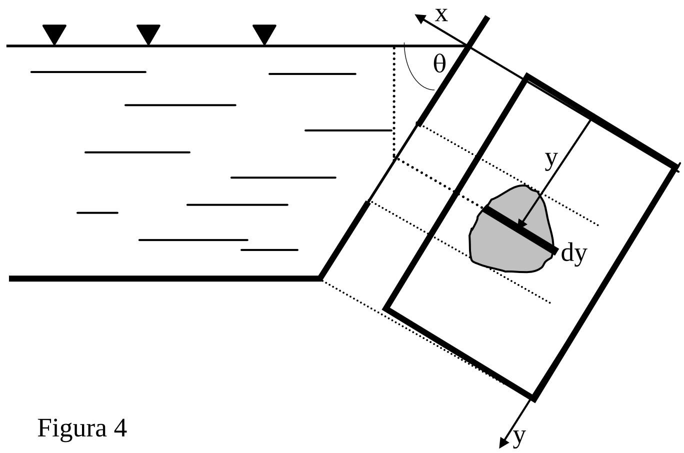


Figura 4

Se debe encontrar:

a) La fuerza que ejerce la presión sobre el área considerada.
b) El punto de aplicación de dicha fuerza.

Observación:

Se considera únicamente las presiones relativas puesto que la presión atmosférica, p_o actúa a ambos lados de la placa y por lo tanto el efecto total sobre la misma es nulo.

a) Fuerza sobre la placa.

Sobre cada elemento diferencial de área (dA) actúa un diferencial de fuerza de modulo:

$$d\overline{F} = p.\overline{n}.dA \qquad (11)$$

Siendo p la presión relativa y $\overline{n}$ el vector normal en la dirección de acción de la presión. Como se puede observar, todos los diferenciales de fuerza tienen la misma dirección y sentido, por lo cual para obtener el módulo de la fuerza total basta con considerarla como un escalar. Integrando resulta,

$$\overline{E} = \int_A p.\overline{n}.dA \qquad (12)$$

La ecuación (12) es siempre válida independientemente del sistema de ejes que se utilice. Si en particular se usa el sistema de ejes que se observa en la figura 4 se puede expresar:

$$E = \int_A \gamma.h.dA = \int_A \gamma.y.sen\theta.dA = \gamma.sen\theta \int_A y.dA = \gamma.sen\theta.\overline{y}.A \qquad (13)$$

Siendo γ el peso específico del fluido considerado. Es posible reducir aún más la (13) y escribir:

$$E = p_G.A \qquad (14)$$

Donde p_G es la presión en el centroide de la sección.

a) Recta de acción de la Fuerza (E) sobre la placa

Una vez hallada la fuerza sobre la placa, se necesita saber su recta de acción. Al tener todas las contribuciones sobre los elementos diferenciales de área la misma dirección y sentido, la resultante tiene también, evidentemente, esa dirección y sentido. Se desea entonces saber por qué punto sobre la placa pasa dicha fuerza resultante.

Para ello se considera en primer término el momento que con respecto al eje x (ver figura) realizan las contribuciones elementales de las fuerzas en los dA y se iguala dicho momento al que produce la fuerza total. Matemáticamente:

$$y_p.E = \int_A y.dE \tag{15}$$

Siendo y_p la distancia desde el eje x al punto de aplicación de la fuerza resultante. Despejando:

$$y_p = \frac{1}{E}\int_A y.dE \tag{16}$$

Análogamente, tomando momentos con respecto al eje y se obtiene x_p:

$$x_p = \frac{1}{E}\int_A xdE \tag{17}$$

Las ecuaciones (16) y (17) son siempre válidas más allá de los ejes coordenados que se elijan. En particular, con los ejes coordenados que muestra la figura (básicamente el origen del eje y coincidente con la superficie libre) se obtiene:

$$y_p = \frac{1}{\gamma.\operatorname{sen}\theta.\bar{y}.A}.\int_A \gamma.\operatorname{sen}\theta.y^2.dA = \frac{I_{xx}}{A.\bar{y}} \tag{18}$$

Es conveniente referirse al momento de segundo orden con respecto al centroide, *ie*, utilizar la (6) y expresar:

$$y_p = \frac{\bar{I}_{xx}}{A.\bar{y}} + \bar{y} \tag{19}$$

Y en forma similar se deduce:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{yy}}{A.\bar{x}} + \bar{x} \tag{20}$$

Esta últimas dos ecuaciones son de gran utilidad y ahorran gran cantidad de esfuerzo si se conocen los momentos de inercia respecto del centroide de la sección considerada.

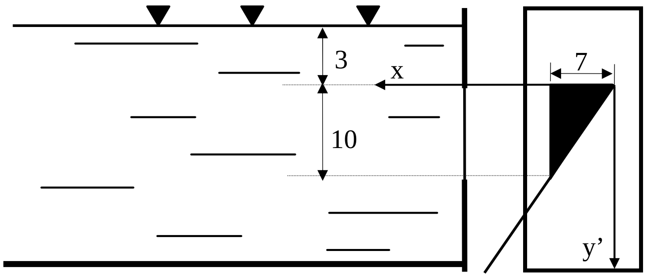
Observación: La (16) y la (17) son siempre válidas más allá del punto tomado para contabilizar los momentos (es decir, la ubicación de los ejes x e y) ***En cambio, la (19) y la (20) son válidas en tanto que se considere el eje y con origen en la superficie libre.***

Ejercicios:

Demuestre la ecuación (20)

Ejemplo de aplicación:

1) Calcular el empuje sobre la placa de la figura. El fluido tiene peso específico conocido (γ). Las dimensiones están expresadas en metros:



a) Primero se realiza el ejercicio por integración directa:

Se toma un eje *y'* que comienza en el borde de la placa. La ecuación (12) puede expresarse:

$$E = \int_0^{10} \int_{\frac{7}{10}y'}^{7} \gamma.(3+y')dxdy' = \int_0^{10} \gamma.(3+y')(7-\frac{7}{10}y')dy'$$

$$E = \gamma \int_0^{10} (21 - \frac{21}{10}y' + 7y' - \frac{7}{10}y'^2)dy'$$

$$E = \gamma \left[21y' - \frac{21}{10}y'^2 + \frac{7}{2}y'^2 - \frac{7}{30}y'^3 \right]_0^{10}$$

$$E = 221,\widehat{6}\gamma$$

Se han hecho todos los pasos para comparar con el otro método.
Para encontrar el punto de aplicación utilizamos ahora la (19) y la (20).

$$y'_p = \frac{1}{\gamma.221,\widehat{6}} \int_0^{10} \int_{\frac{7}{10}y'}^{7} y'.\gamma.(3+y')dx.dy'$$

La cual luego de resolver lleva a:

$$y'_p = 4,2105.....$$

En tanto que para x_p se tiene:

$$x_p = \frac{1}{\gamma.221.\widehat{6}} \int_0^{10} \int_{\frac{7}{10}y'}^{7} x.\gamma.(3+y')dxdy'$$

Que resuelta da:

$$x_p = 4{,}9736......$$

b) Se utilizan ahora las formulas (14), (19) y (20). Se utiliza un eje y con origen en la superficie libre. De tablas se extrae:

$$\bar{x} = \frac{2}{3}.7 = 4{,}\widehat{6} \qquad \bar{y} = 3 + \frac{1}{3}.10 = 6{,}\widehat{3}$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{7\ .\ 10^3}{36} = 194{,}\widehat{4} \qquad \bar{I}_{xy} = \frac{7^2\ .\ 10^2}{72} = 68{,}0\widehat{5}$$

Y ahora se aplican directamente las fórmulas:

$$E = p_G.A = 6{,}\widehat{3}\gamma.35 = 221{,}\widehat{6}.\gamma$$

$$y_p = \frac{\bar{I}_{xx}}{A.\bar{y}} + \bar{y} = \frac{194{,}\widehat{4}}{35.\,6{,}\widehat{3}} + 6{,}\widehat{3} = 7{,}2105 \qquad x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{A.\bar{y}} + \bar{x} = \frac{68{,}0\widehat{5}}{35.\,6{,}\widehat{3}} + 4.\widehat{6} = 4{,}9736....$$