1. Ejemplo de Ecuaciones Diferenciales

Para un sistema cuyo comportamiento obedece la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} - y = 20x$$

1. Calcule manualmente $y(0{,}6)$ utilizando el método de Euler con un paso de $h = 0{,}2$, con condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.
2. Repita el cálculo para $y(0,6)$ usando esta vez un paso de $h = 0{,}05$, usando el método de Euler Mejorado
3. Resuelva la ecuación diferencial usando diferencias finitas con $h = 1$, $y(0) = 0$ e $y(5) = 10$

2. Solución

1) La ecuación diferencial presentada es de segundo orden por lo que se debe emplear, para utilizar el método de Euler, un sistema de ecuaciones diferenciales. Definiendo $y'(x) = u(x)$, se obtiene:

$$\begin{cases} f_1(x, y, u) = u' = 20x - 5xu + y \\ f_2(x, y, u) = y' = u \end{cases}$$

Deben determinarse las condiciones iniciales para ambas ecuaciones. Por el enunciado, se conoce que $y(0) = 0$ y que $y'(0) = 2$, es decir, $u(0) = 2$, por lo tanto, puede plantearse el método.

$$\begin{cases} y(x_k + h) = y(x_k) + hf_2(x_k, y_k, u_k) \\ u(x_k + h) = u(x_k) + hf_1(x_k, y_k, u_k) \end{cases}$$

En cada iteración se calculará el valor siguiente de u y de y. Una vez calculados éstos, se prosigue a la siguiente iteración. Para $h = 0{,}2$ se obtiene:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0 \qquad u_0 = 2$$

$$k = 1 \begin{cases} y(0{,}2) = y(0) + 0{,}2 \cdot f_2(0, 0, 0) = 0 + 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \\ u(0{,}2) = u(0) + 0{,}2 \cdot f_1(0, 0, 0) = 2 + 0{,}2 \cdot 0 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 0{,}2 \qquad y_1 = 0{,}4 \qquad u_1 = 2$$

$$k = 2 \begin{cases} y(0{,}4) = y(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f_2(0{,}2, 0{,}4, 2) = 0{,}8 \\ u(0{,}4) = u(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f_1(0{,}2, 0{,}4, 2) = 2{,}48 \end{cases}$$

$$x_2 = 0{,}4 \qquad y_2 = 0{,}8 \qquad u_3 = 2{,}48$$

$$k = 3 \begin{cases} y(0{,}6) = y(0{,}4) + 0{,}2 \cdot f_2(0{,}4, 0{,}8, 2{,}48) = 1{,}296 \\ u(0{,}6) = u(0{,}4) + 0{,}2 \cdot f_1(0{,}2, 0{,}8, 2{,}48) = 3{,}248 \end{cases}$$

Con los resultados anteriores, se obtiene que $y(0{,}6) = 1{,}296$ utilizando un paso $h = 0{,}2$.

2) Para este caso, disminuyendo el paso a $h = 0{,}05$, se repite la misma metodología pero utilizando el método de Euler mejorado.

$$\begin{cases} \dot{y}_{k+1} = y(x_k) + hf_2(x_k, y_k, u_k) \\ \dot{u}_{k+1} = u(x_k) + hf_1(x_k, y_k, u_k) \\ y(x_k + h) = y(x_k) + \frac{h}{2}[f_2(x_k, y_k, u_k) + f_2(x_{k+1}, \dot{y}_{k+1}, \dot{u}_{k+1})] \\ u(x_k + h) = u(x_k) + \frac{h}{2}[f_1(x_k, y_k, u_k) + f_1(x_{k+1}, \dot{y}_{k+1}, \dot{u}_{k+1})] \end{cases}$$

Aplicando las cuentas anteriores a cada iteración, se puede llegar al resultado. Sin embargo, dado que se pide $y(0{,}6)$ y $h = 0{,}05$, hay que realizar 12 iteraciones. Para simplificar el trabajo, puede emplearse un programa en MATLAB y obtener el resultado.

```
f1 = inline('20*x - 5*x*u + y', 'x', 'y', 'u');
f2 = inline('u', 'x', 'y', 'u');
h = 0.05;
x = 0;
y = 0;
u = 2;

iteraciones = round(0.6/h);

for i = 1:iteraciones
   x(i+1) = x(i) + h;
   y_euler = y(i) + h*f2(x(i),y(i),u(i));
   u_euler = u(i) + h*f1(x(i),y(i),u(i));
   y(i+1) = y(i) + h/2 * (f2(x(i),y(i),u(i)) + f2(x(i+1), y_euler, u_euler));
   u(i+1) = u(i) + h/2 * (f1(x(i),y(i),u(i)) + f1(x(i+1), y_euler, u_euler));
end
```

Corriendo el programa anterior se obtienen los siguientes resultados:

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
y	0	0,1	0,2015	0,3059	0,4146	0,5288	0,6495

x	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
y	0,7751	0,9134	1,0575	1,2102	1,3712	1,5405

3) Para este inciso, se resolverá el problema utilizando diferencias finitas. El paso a utilizar es $h = 1$. Los valores que son datos ahora son el valor inicial y el valor final de $y(x)$, es decir, $y(0) = 0$ e $y(5) = 10$. El planteo de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas en diferencias de separación h que no tiende a cero.

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$
$$y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y para diferentes valores de i, se puede llegar a un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los puntos en y a determinar. Génericamente, para un punto i cualquiera:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} - y &= 20x \\
\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 5x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i &= 20x_i \\
y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{5}{2}x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) - y_i &= 20x_i \\
\left(1 + \frac{5}{2}x_i\right) y_{i+1} - 3y_i + \left(1 - \frac{5}{2}x_i\right) y_{i-1} &= 20x_i
\end{aligned}$$

Una vez agrupadas convenientemente las incógnitas, se observa que es posible armar un sistema para distintos valores de i ya que $x_i = x_0 + i \cdot h$. Dado que interesa conocer hasta $x = 5$ y los valores extremos de y son dato, se deben armar cuatro ecuaciones.

Para $i = 1$:

$$\left(1 + \frac{5}{2}x_1\right) y_2 - 3y_1 + \left(1 - \frac{5}{2}x_1\right) y_0 = 20x_1$$
$$3,5y_2 - 3y_1 = 20$$

Para $i = 2$:

$$\left(1 + \frac{5}{2}x_2\right) y_3 - 3y_2 + \left(1 - \frac{5}{2}x_2\right) y_1 = 20x_2$$
$$6y_3 - 3y_2 - 4y_1 = 40$$

Para $i = 3$:

$$\left(1 + \frac{5}{2}x_3\right) y_4 - 3y_3 + \left(1 - \frac{5}{2}x_3\right) y_2 = 20x_3$$
$$8{,}5y_4 - 3y_3 - 6{,}5y_2 = 60$$

Para $i = 4$:

$$\left(1 + \frac{5}{2}x_4\right) y_5 - 3y_4 + \left(1 - \frac{5}{2}x_4\right) y_3 = 20x_4$$
$$110 - 3y_4 - 9y_3 = 80$$
$$-3y_4 - 9y_3 = -30$$

Finalmente, se puede armar el sistema de ecuaciones para ser resuelto utilizando MATLAB o algún método visto anteriormente.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -6{,}5 & -3 & 8{,}5 \\ 0 & 0 & -9 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ -30 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}7087 \\ -0{,}8932 \\ 1{,}0809 \\ 6{,}7572 \end{bmatrix}$$