Ejemplo de Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales hiperbólicas

Ejercicio 15 de la guía 7, con $\Delta x = 0.25$, $\Delta y = 0.125$. Hallar hasta $t = 0.25$

Se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Se la convierte a ecuaciones en diferencias utilizando la diferencia de segundo orden:

$$\frac{Y_{i,j+1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j-1}}{h_t^2} = \frac{c^2}{h_x^2} \left(Y_{i+1,j} - YT_{i,j} + Y_{i-1,j} \right)$$

Despejando $Y_{i,j+1}$:

$$Y_{i,j+1} = r \left(Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j} \right) + 2(1-r)Y_{i,j} - Y_{i,j-1}$$

donde:

$$r = \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} = \frac{2 \times 0.125^2}{0.25^2} = 1$$

Se arma la tabla con los valores iniciales ($y(x, 0)$), condiciones de contorno ($y(0, t), y(1, t)$) y valores a hallar:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = 0$	0	1.7071	1	-0.2929	0
$y = 0.125$	0	$Y_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	0
$y = 0.25$	0	$Y_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

Se opera en forma diferente si se trata de la primera iteración ($j = 1$) o las siguientes ($j > 1$):
Para $j = 1$:

$$Y_{i,1} = r \left(Y_{i+1,0} + Y_{i-1,0} \right) + 2(1-r)Y_{i,0} - Y_{i,-1}$$

En esta ecuación no se conoce $Y_{i,-1}$ pero es posible calcularlo a partir de la pendiente inicial (que debe ser dato para este tipo de ecuaciones diferenciales), utilizando la diferencia finita centrada:

$$g_i = \frac{Y_{i,1} - Y_{i,-1}}{2h_t}$$

$$Y_{i,-1} = Y_{i,1} - 2h_t g_i$$

Introduciendo esto en la ecuación:

$$Y_{i,1} = r \left(Y_{i+1,0} + Y_{i-1,0} \right) + 2(1-r)Y_{i,0} - Y_{i,1} + 2h_t g_i$$

Se despeja nuevamente $Y_{i,1}$, quedando:

$$Y_{i,1} = \frac{r}{2} \left(Y_{i+1,0} + Y_{i-1,0} \right) + (1-r)Y_{i,0} + h_t g_i$$

Cada uno de los valores de la primera iteración se calcula a partir de valores anteriores y la pendiente. Por ejemplo, para el calcular $Y_{1,1}$:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = 0$	0	1.7071	1	-0.2929	0
$y = 0.125$	0	$Y_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$	0
$y = 0.25$	0	$Y_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

$$Y_{1,1} = \frac{r}{2}\left(Y_{2,0} + Y_{0,0}\right) + (1-r)Y_{1,0} + h_t g_1 = \frac{1}{2}\left(1+0\right) + 0 \times 1.7071 + 0.125 \times 0 = 0.5$$

Donde $g_1 = y'(0.25, 0) = 0$
De la misma forma se calculan el resto de los valores de la primera iteración a hallar:

$$Y_{2,1} = \frac{r}{2}\left(Y_{3,0} + Y_{1,0}\right) + (1-r)Y_{2,0} + h_t g_2 = \frac{1}{2}\left(-.2929 + 1.7071\right) + 0 \times 1 + 0.125 \times 0 = 0.7071$$
$$Y_{3,1} = \frac{r}{2}\left(Y_{4,0} + Y_{2,0}\right) + (1-r)Y_{3,0} + h_t g_3 = \frac{1}{2}\left(0+1\right) + 0 \times (-.2929) + 0.125 \times 0 = 0.5$$

donde $g_2 = y'(0.5, 0) = 0$ y $g_3 = y'(0.75, 0) = 0$
Con ésto, se puede escribir la tabla final de la iteración

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = 0$	0	1.7071	1	-0.2929	0
$y = 0.125$	0	0.5	0.7071	0.5	0
$y = 0.25$	0	$Y_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

Para $j > 1$ se calcula con la ecuación de diferencias finitas sin modificar:

$$Y_{i,j+1} = r\left(Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j}\right) + 2(1-r)Y_{i,j} - Y_{i,j-1}$$

Cada uno de los valores se calcula a partir de valores anteriores. Por ejemplo, para el calcular $Y_{1,2}$:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = 0$	0	1.7071	1	-0.2929	0
$y = 0.125$	0	0.5	0.7071	0.5	0
$y = 0.25$	0	$Y_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

$$Y_{1,2} = r\left(Y_{2,1} + Y_{0,1}\right) + 2(1-r)Y_{1,1} - Y_{1,0} = 1 \times (0.7071 + 0) + 0 \times 0.5 - 1.7071 = -1$$

De la misma forma se calculan el resto de los valores a hallar:

$$\begin{aligned} Y_{2,2} = r\left(Y_{3,1} + Y_{1,1}\right) + 2(1-r)Y_{2,1} - Y_{2,0} = 1 \times (0.5 + 0.5) + 0 \times 0.7071 - 1 = 0 \\ Y_{3,2} = r\left(Y_{4,1} + Y_{2,1}\right) + 2(1-r)Y_{3,1} - Y_{3,0} = 1 \times (0 + 0.7071) + 0 \times 0.5 - (-0.2929) = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Con lo que se puede escribir la tabla final

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = 0$	0	1.7071	1	-0.2929	0
$y = 0.125$	0	0.5	0.7071	0.5	0
$y = 0.25$	0	-1	0	1	0

y la respuesta es:

$$Y(0.25, 0.25) = -1$$
$$Y(0.5, 0.25) = 0$$
$$Y(0.75, 0.25) = 1$$