Método de Mínimos Cuadrados

Dados los siguientes puntos, obtener un polinomio de primer y segundo grado por mínimos cuadrados.

k	0	1	2	3
x	0	2	3	5
y	-1	0	2	1

Cuadro 1: Datos

Según los puntos dados, se puede observar que es posible formar un polinomio interpolante de grado 3. Sin embargo, se pide que debe hallarse un polinomio aproximante (calculado utilizando el método de mínimos cuadrados) de grado 1 y 2.

1. Polinomio de grado 1

La forma de este polinomio es la siguiente: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ donde a_0 y a_1 son incógnitas. Para hallarlas, se arma un sistema de ecuaciones, dos en este caso. Cada coeficiente de las incógnitas, se calcula como la suma de todos los valores de x elevados a alguna potencia. Al moverse una fila o columna hacia abajo o hacia la derecha respectivamente, la potencia aumenta en 1. Para el término independiente, se toma la suma de todos los valores de y multiplicados por una potencia de x siguiendo la misma regla anterior. De esta forma, se arma el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^0\right) a_o + \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^1\right) a_1 &= \sum_{k=0}^{3} y_k \cdot {x_k}^0 \\ \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^1\right) a_o + \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^2\right) a_1 &= \sum_{k=0}^{3} y_k \cdot {x_k}^1 \end{cases}$$

A continuación, se calculaŕáń todos los coeficientes utilizando los valores del cuadro 1.

k	${x_k}^0$	${x_k}^1$	${x_k}^2$	$y_k \cdot {x_k}^0$	$y_k \cdot {x_k}^1$
0	1	0	0	-1	0
1	1	2	4	0	0
2	1	3	9	2	6
3	1	5	25	1	5
$\sum$	4	10	38	2	11

Cuadro 2: Cálculo de coeficientes

Por último, se reescribe el sistema con las sumas obtenidas (es decir los coeficientes):

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 &= 2 \\ 10a_0 + 38a_1 &= 11 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene que $a_0 = -\frac{17}{26}$ y $a_1 = \frac{6}{13}$. Con estos valores se arma el polinomio resultante de grado uno:

$$P_1(x) = -\frac{17}{26} + \frac{6}{13}x \tag{1}$$

A continuación se verificará cuán próximos son los puntos a los valores dados:

$$P_1(x_0) = P_1(0) \approx -0,6538 \qquad \Rightarrow E = |P_1(x_0) - y_0| = 0,3461$$
$$P_1(x_1) = P_1(2) \approx 0,2692 \qquad \Rightarrow E = |P_1(x_1) - y_1| = 0,2692$$
$$P_1(x_2) = P_1(3) \approx 0,7307 \qquad \Rightarrow E = |P_1(x_2) - y_2| = 1,2692$$
$$P_1(x_3) = P_1(5) \approx 1,6538 \qquad \Rightarrow E = |P_1(x_3) - y_3| = 0,6538$$

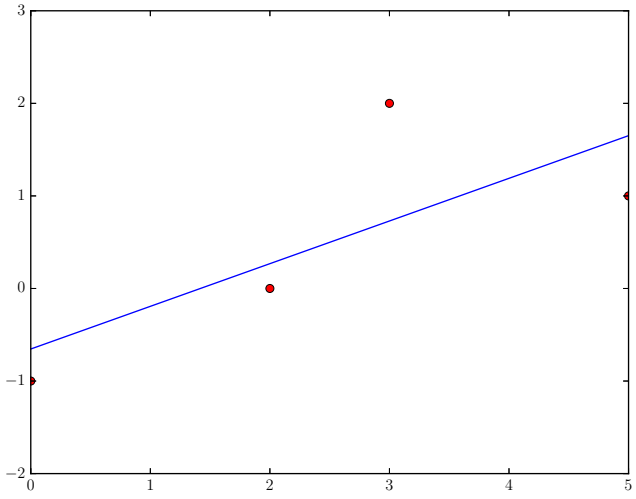

Figura 1: Polinomio de primer grado

2. Polinomio de grado 2

Nuevamente, se plantea el polinomio correspondiente $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Dado que en este caso hay una incógnita más, se debe agregar una ecuación más. Siguiendo el mismo procedimiento para calcular los coeficientes, se agrega una fila y una columna más. Los términos subrayados son los términos agregados. Cabe destacar que los coeficientes que no están subrayados siguen siendo iguales que en el caso anterior.

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^0\right) a_o + \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^1\right) a_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^2\right) a_2 & = \sum_{k=0}^{3} y_k \cdot {x_k}^0 \\ \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^1\right) a_o + \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^2\right) a_1 + \underline{\left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^3\right) a_2} & = \sum_{k=0}^{3} y_k \cdot {x_k}^1 \\ \left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^2\right) a_o + \underline{\left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^3\right) a_1} + \underline{\left(\sum_{k=0}^{3} {x_k}^4\right) a_2} & = \underline{\sum_{k=0}^{3} y_k \cdot {x_k}^2} \end{cases}$$

Repitiendo el mismo procedimiento que para el caso anterior, se elabora un cuadro para calcular los coeficientes pero, esta vez, incluyendo potencias mayores:

k	${x_k}^0$	${x_k}^1$	${x_k}^2$	${x_k}^3$	${x_k}^4$	$y_k \cdot {x_k}^0$	$y_k \cdot {x_k}^1$	$y_k \cdot {x_k}^2$
0	1	0	0	0	0	-1	0	0
1	1	2	4	8	16	0	0	0
2	1	3	9	27	81	2	6	18
3	1	5	25	125	625	1	5	25
$\sum$	4	10	38	160	722	2	11	43

Cuadro 3: Cálculo de coeficientes

Ubicando los coeficientes en el sistema, resulta:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 + 38a_2 & = 2 \\ 10a_0 + 38a_1 + 160a_2 & = 11 \\ 38a_0 + 160a_1 + 722a_2 & = 43 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtienen las soluciones $a_0 = -\frac{15}{13}$, $a_1 = \frac{101}{78}$ y $a_2 = -\frac{1}{6}$ con los que se puede armar el polinomio de grado 2:

$$P_2(x) = -\frac{15}{13} + \frac{101}{78}x - \frac{1}{6}x^2 \tag{2}$$

A continuación se verificará cuán próximos son los puntos a los valores dados:

$$\begin{aligned} P_1(x_0) = P_1(0) \approx -1,1538 \quad &\Rightarrow E = |P_1(x_0) - y_0| = 0,1538 \\ P_1(x_1) = P_1(2) \approx 0,7692 \quad &\Rightarrow E = |P_1(x_1) - y_1| = 0,7692 \\ P_1(x_2) = P_1(3) \approx 1,2307 \quad &\Rightarrow E = |P_1(x_2) - y_2| = 0,7692 \\ P_1(x_3) = P_1(5) \approx 1,1538 \quad &\Rightarrow E = |P_1(x_3) - y_3| = 0,1538 \end{aligned}$$

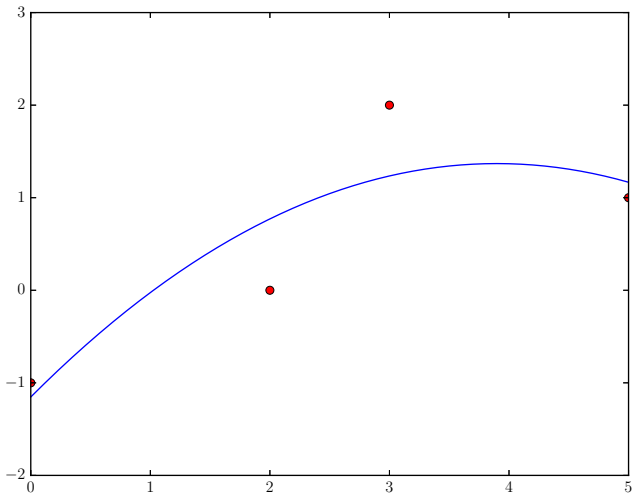

Figura 2: Polinomio de segundo grado

3. Análisis de varianza

A continuación se calculará cuál tiene menor varianza. Recordando, la varianza se define como la esperanza del cuadrado de una variable aleatoria y sirve como una medida de dispersión de los datos frente a los valores reales. Para nuestro problema, la varianza puede calcularse de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (P(x_k) - y_k)^2}{N - m - 1} \tag{3}$$

De la ecuación anterior, el numerador corresponde al error cuadrático medio, N a la cantidad de puntos y m al grado del polinomio. A continuación se calcularán los errores cuadráticos medios de cada polinomio y su varianza. En las secciones anteriores, se calcularon los errores absolutos, por lo tanto, se elevarán al cuadrado y se sumarán para obtener el error cuadrático medio.

$$E_1 = \sum_{k=0}^{3} (P_1(x_k) - y_k)^3 = (0,3461)^2 + (0,2692)^2 + (1,2692)^2 + (0,6538)^2 = 2,2305$$
$$E_2 = \sum_{k=0}^{3} (P_2(x_k) - y_k)^3 = (0,1538)^2 + (0,7692)^2 + (0,7692)^2 + (0,1538)^2 = 1,2306$$

$${\sigma_1}^2 = \frac{E_1}{4-1-1} = 1,1152$$
$${\sigma_2}^2 = \frac{E_2}{4-2-1} = 1,2306$$

De aquí se puede ver que el caso de menor error produce mayor varianza y viceversa. Por lo tanto, son dos medidas a tomar en cuenta según el interés a la hora de buscar el polinomio.