Ejemplo de Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales parabólicas

Ejercicio 14 de la guía 7, con $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 0.2$. Hallar hasta $t = 0.2$

Método explícito:
Se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Se la convierte a ecuaciones en diferencias utilizando la diferencia hacia adelante:

$$\frac{T_{i,j+1} - Ti,j}{h_t} = \frac{K}{h_x^2} \left(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} \right)$$

Despejando $T_{i,j+1}$:

$$T_{i,j+1} = a \left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} \right) + (1 - 2a) T_{i,j}$$

donde:

$$a = \frac{K h_t}{h_x^2} = \frac{0.1515 \times 0.2}{0.5^2} = 0.1212$$

Como $a < 0.5$ el método es estable.

Se arma la tabla con los valores iniciales (ecuaciones (1) y (2)), condiciones de contorno (ecuaciones (3) y (4)) y valores a hallar:

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 0$	0	50	100	50	0
$y = 0.2$	0	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

Cada uno de los valores se calcula a partir de valores anteriores. Por ejemplo, para el calcular $T_{1,2}$:

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 0$	0	50	100	50	0
$y = 0.2$	0	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

$$T_{1,2} = a \left(T_{2,1} + T_{0,1} \right) + (1 - 2a) T_{1,1} = 0.1212 \left(100 + 0 \right) + 0.7576 \times 50 = 50$$

De la misma forma se calculan el resto de los valores a hallar:

$$T_{2,2} = a(T_{3,1} + T_{1,1}) + (1 - 2a)T_{2,1} = 0.1212 \left(50 + 50 \right) + 0.7576 \times 100 = 87.88$$
$$T_{3,2} = a(T_{4,1} + T_{2,1}) + (1 - 2a)T_{3,1} = 0.1212 \left(0 + 100 \right) + 0.7576 \times 50 = 50$$

Con lo que se puede escribir la tabla final

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 0$	0	50	100	50	0
$y = 0.2$	0	50	87.88	50	0

y la respuesta es:

$$T(0.5, 0.2) = 50$$
$$T(1, 0.2) = 87.88$$
$$T(1.5, 0.2) = 50$$

Método implícito:

Se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Se la convierte a ecuaciones en diferencias utilizando la diferencia hacia atras:

$$\frac{T_{i,j} - Ti,j-1}{h_t} = \frac{K}{h_x^2}\left(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\right)$$

Despejando $T_{i,j-1}$:

$$T_{i,j-1} = -a\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right) + (1+2a)T_{i,j}$$

donde:

$$a = \frac{Kh_t}{h_x^2} = \frac{0.1515 \times 0.2}{0.5^2} = 0.1212$$

Se arma la tabla con los valores iniciales (ecuaciones (1) y (2)), condiciones de contorno (ecuaciones (3) y (4)) y valores a hallar:

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 0$	0	50	100	50	0
$y = 0.2$	0	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

A diferencia con el método explícito, los valores a hallar se calculan todos juntos mediante un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación que corresponde a $T_{1,2}$:

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = 0$	0	50	100	50	0
$y = 0.2$	0	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	$T_{3,2}$	0

$$T_{1,1} = -a\left(T_{2,2} + T_{0,2}\right) + (1+2a)T_{1,2}$$

De la misma forma se plantean las ecuaciones para el resto de los valores:

$$T_{2,1} = -a\left(T_{3,2} + T1,2\right) + (1+2a)T_{2,2}$$
$$T_{3,1} = -a\left(T_{4,2} + T2,2\right) + (1+2a)T_{3,2}$$

Reemplazando los valores conocidos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 2a+1 & -a & 0 \\ -a & 2a+1 & -a \\ 0 & -a & 2a+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores finales:

$$T_{1,2} = 49.030 = T(0.5, 0.2)$$
$$T_{2,2} = 90.055 = T(1, 0.2)$$
$$T_{3,2} = 49.030 = T(1.5, 0.2)$$