Problemas de valor frontera
Unidad 7

Los problemas de valor frontera consisten en ecuaciones diferenciales de segundo orden cuyos datos conocidos son el valor inicial y el valor final. De esta forma, no se pueden aplicar los métodos vistos anteriormente (de valor inicial) de la forma convencional. Para resolverlos, se aplica el método del disparo que estima un valor inicial de la derivada (incógnita). Por otro lado, se puede aplicar el método de las diferencias finitas que convierte la ecuación diferencial en ecuación en diferencias de las cuales los puntos interiores son incógnita y deben despejarse de un sistema de ecuaciones.

1. Método del disparo

En una ecuación de segundo orden:

$$x'' = f(t, x, x')$$

Se tiene como dato el valor de x en los extremos:

$$y(a) = v$$
$$y(b) = w$$

Se toma un valor arbitrario para $y'(a) = d_1$ y se resuelve como un problema de valor inicial (utilizando Euler, Heun o Runge-Kutta) y se obtiene un valor final $y(b)^1$. Si este valor difiere del deseado, se toma un nuevo valor $y'(a) = d_2$ que sea:

- $d_2 > d_1$ si $y(b)^1 < w$
- $d_2 < d_1$ si $y(b)^1 > w$

Se resuelve nuevamente el problema con la nueva condición inicial. Si el valor nuevo difiere de la solución deseada ($y(b)^2 \neq w$), se calcula una nueva condición inicial:

$$d_3 = \frac{w - y(b)^2}{y(b)^1 - y(b)^2} \cdot d_1 + \frac{w - y(b)^1}{y(b)^2 - y(b)^1} \cdot d_2 \tag{1}$$

Con el nuevo valor inicial, se resuelve el problema.

1.1. Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$, se desea hallar y para $0 \leq x \leq 1$ con un tamaño de paso $h = 0{,}1$, sabiendo que $y(0) = 1$ e $y(1) = 3$.

En primer lugar, debe convertirse la ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para poder aplicar métodos de valor inicial. Si definimos una variable $u = y'$ y, por lo tanto, $u' = y''$, entonces despejando se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = -2u - y \end{cases}$$

Para aplicar un método de valor inicial se necesitan los valores iniciales de cada ecuación diferencial. Se elije arbitrariamente un valor inicial de la derivada $u(0) = d_1 = 5$. Con los valores iniciales definidos, se itera utilizando el método de Euler:

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}1 \\
y(1) &= y(0) + h \cdot u(0) \\
&= 1 + 0{,}1 \cdot 5 = 1{,}5 \\
u(1) &= u(0) + h \cdot (-2u(0) - y(0)) \\
&= 5 + 0{,}1 \cdot (-2 \cdot 5 - 1) = 3{,}9 \\
&\vdots \\
x &= 1 \\
y(1) &= 2{,}6732
\end{aligned}$$

De esta forma, se obtuvo el valor de $y(1)$ para un disparo $d_1 = 5$. Como el resultado dio menor que el valor final, se toma un disparo mayor $d_2 = 10$. Se repite el mismo procedimiento con el nuevo valor inicial:

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}1 \\
y(1) &= y(0) + h \cdot u(0) \\
&= 1 + 0{,}1 \cdot 10 = 2 \\
u(1) &= u(0) + h \cdot (-2u(0) - y(0)) \\
&= 10 + 0{,}1 \cdot (-2 \cdot 10 - 1) = 7{,}9 \\
&\vdots \\
x &= 1 \\
y(1) &= 4{,}6103
\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos, se recalcula el disparo teniendo en cuenta los siguientes datos: $d_1 = 5$ e $y(1)^1 = 2{,}6732$, $d_2 = 10$ e $y(1)^2 = 4{,}6103$ y el valor final $y(1) = 3$. Utilizando la ecuación (1):

$$d_3 = \frac{3 - 4{,}6103}{2{,}6732 - 4{,}6103} \cdot 5 + \frac{3 - 2{,}6732}{4{,}6103 - 2{,}6732} \cdot 10 = 5{,}8435$$

Tomando el valor inicial de la derivada $u(0) = 5{,}8435$, se itera nuevamente y se espera llegar al valor final dado como dato:

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}1 \\
y(1) &= y(0) + h \cdot u(0) \\
&= 1 + 0{,}1 \cdot 5{,}8435 = 1{,}5843 \\
u(1) &= u(0) + h \cdot (-2u(0) - y(0)) \\
&= 5{,}8435 + 0{,}1 \cdot (-2 \cdot 5{,}8435 - 1) = 4{,}5748 \\
&\vdots \\
x &= 1 \\
y(1) &= 2{,}9999 \approx 3
\end{aligned}$$

Finalmente, los valores de y obtenidos, es la estimación de la solución de la ecuación diferencial dada.

2. Diferencias finitas

Las diferencias finitas consisten en aproximaciones de las derivadas en diferencias donde el incremento en x no tiende a cero sino a un valor finito. Para la derivada primera y segunda se puede expresar como:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$$
$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$$

Luego se reemplaza la ecuación utilizando estas expresiones para diferentes valores de i. De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los valores de y.

2.1. Ejemplo

Siguiendo el mismo ejemplo que en disparo, se aplican las diferencias finitas:

$$\begin{aligned} y''(x_i) + 2y(x_i) + y &= 0 \\ \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + 2\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + y(x_i) &= 0 \\ 110y(x_{i+1}) - 199y(x_i) + 90y(x_{i-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en diferentes valores de i, se obtienen las ecuaciones necesarias para calcular los valores de y:

$$\begin{aligned} & i = 1 \\ & \qquad 90y(x_0) - 199y(x_1) + 110y(x_2) = 0 \\ & i = 2 \\ & \qquad 90y(x_1) - 199y(x_2) + 110y(x_3) = 0 \\ & \qquad \vdots \\ & i = 9 \\ & \qquad 90y(x_8) - 199y(x_9) + 110y(x_{10}) = 0 \end{aligned}$$

Con este planteo, se observa que hay 9 ecuaciones con 11 incógnitas. De momento, el sistema no puede resolverse pero si observamos los valores $y(x_0)$ e $y(x_{10})$, podemos darnos cuenta que en realidad son datos del problema. De esta forma, el sistema resulta ser de 9 ecuaciones con 9 incógnitas donde los valores conocidos pasan al miembro derecho de la primera y última ecuación respectivamente. Reescribiendo las ecuaciones de forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -199 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & -199 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & -199 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & -199 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -199 & 110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & -199 & 110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & -199 & 110 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & -199 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & -199 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 90 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \cdot 110 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la matriz, se obtiene la solución:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5538 \\ 1{,}9928 \\ 2{,}3338 \\ 2{,}5917 \\ 2{,}7791 \\ 2{,}9071 \\ 2{,}9855 \\ 3{,}0224 \\ 3{,}0252 \end{bmatrix}$$

No hay que perder de vista que la solución del problema también incluye al valor inicial y al valor final. Los calculados corresponden a los valores interiores.

3. Gráfico de los resultados

A modo comparativo se grafican las estimaciones obtenidas junto con la solución exacta $y(x) = e^{-x} + (3e-1)xe^{-x}$: