# Método de Romberg y Richardson

El método de Romberg permite calcular la integral definida utilizando trapecios reduciendo el paso a la mitad por cada iteración y utilizando el resultado anterior. Llamando $h_i$ al paso con:

$$h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}}, \text{ con } 2^{i-1} \text{ subintervalos}$$

Se calculan aproximaciones a la integral $R_{i,1}$ de la siguiente manera:

$$R_{1,1} = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)], \text{ 1 subintervalo, trapecio simple}$$
$$R_{i,1} = \frac{1}{2}\left[R_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f\left(a + \frac{2k-1}{2}h_{i-1}\right)\right]$$

Donde $h_{i-1}$ corresponde al paso de la iteración anterior y el argumento de $f(\cdot)$ corresponde a los puntos nuevos que surgen al dividir el intervalo anterior a la mitad.

Para poder aplicar este método, se necesita una cantidad de puntos $n = 2^{k-1} - 1$ , pudiéndose calcular hasta $R_{k,1}$.

Luego, una vez calculadas una serie de iteraciones de Romberg, se puede mejorar la aproximación utilizando la extrapolación de Richardson. Ésta consiste en utilizar dos resultados previos en los que el tamaño del subintervalo es la mitad de uno respecto al otro. Generalizando para los resultados de Romberg se obtiene la siguiente expresión:

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$$

Donde $j = 1$ corresponde a trapecios, es decir, Romberg.

## Ejemplo

Calcular $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$ hasta obtener $R_{3,3}$ por el método de Romberg. Compare los resultados intermedios con el resultado real.

Aplicando la fórmula de trapecios para obtener el $R_{1,1}$ resulta:

$$R_{1,1} = \frac{1-(-1)}{2}[f(1)+f(-1)] = 2$$

Para obtener un resultado de la columna siguiente, se requiere el valor de $R_{2,1}$. Continuando el análisis, se observa que se requiere hasta $R_{3,3}$ de la primera columna. A continuación, se presenta un esquema que representa la forma en la que se adquieren los resultados:

$$\begin{tikzcd}
R_{1,1} \arrow[dr] & & \\
R_{2,1} \arrow[r] \arrow[dr] & R_{2,2} \arrow[dr] & \\
R_{3,1} \arrow[r] & R_{3,2} \arrow[r] & R_{3,3}
\end{tikzcd}$$

Cada resultado se obtiene a partir de los resultados anteriores que indica cada flecha. Por lo tanto, calculando $R_{2,1}$ se puede obtener $R_{2,2}$:

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[R_{1,1} + h_1 \cdot f(0)] =$$
$$= \frac{1}{2}[2 + 1 \cdot 0] = 1$$
$$R_{2,2} = \frac{4 \cdot R_{2,1} - R_{1,1}}{4-1} = \frac{2}{3}$$

Repitiendo el mismo procedimiento se obtiene $R_{3,1} = \frac{9}{16}$ y $R_{3,2} = \frac{5}{12}$. Por último, se calcula la iteración pedida:

$$R_{3,3} = \frac{4^2 R_{3,2} - R_{2,2}}{4^2 - 1} = \frac{2}{5}$$

Si se resolviera la integral planteada, se puede observar que se obtiene exactamente el mismo resultado que $R_{3,3}$. Esto es algo particular y es posible debido a las extrapolaciones de Richardson: cada columna representa un resultado equivalente a un método, siendo éstos trapecios, Simpson 1/3 y Boole. Éste último, correspondiente a la tercera columna, realiza una aproximación interpolando un polinomio de grado 4. Dado que la función cuya integral se quiere calcular es exactamente un polinomio de cuarto grado, la integral de la aproximación es exactamente igual que ésta.