Método de la Secante

(Autor: Rodrigo Russo)

El método de la secante se puede pensar como una simplificación del método de Newton-Raphson. En lugar de tomar la derivada de la función cuya raíz se quiere encontrar, se aproxima por una recta secante (de ahí el nombre) a la curva, cuya pendiente es aproximadamente igual a la derivada en el punto inicial. La principal diferencia con el método anterior es conocer dos puntos del a función para poder generar dicha recta. Sean x_0 y x_1 pertenecientes a cierta $f(x)$ se puede definir:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Luego, reemplazando en el método de Newton-Raphson:

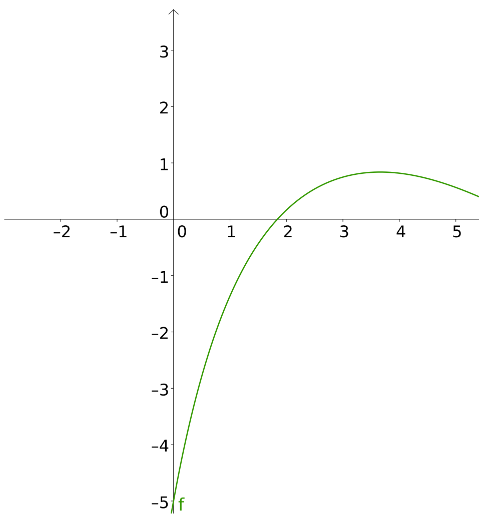
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}} \tag{1}$$

Ejemplo

Calcular usando el método de la secante la primera intersección entre las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ *y* $g(x) = 5e^{-x}$*. Graficar.*

Antes de aplicar el método, es necesario encontrar la función a la cual le debemos encontrar sus raíces. Si se está buscando la intersección entre ambas, entonces lo que se quiere obtener es $f(x) = g(x)$ o, lo que es lo mismo, $f(x) - g(x) = 0$. Según la fórmula (1), obtendremos iterativamente un x_{n+1} tal que satisfaga la ecuación anterior. A continuación, se muestra la representación gráfica de la función para poder ubicar las raíces.



Se puede ver que la primera intersección está ubicada entre 1,5 y 2.

Debido a que no podemos asegurar la convergencia tal como en el método de Newton-Raphson, hay que intentar con dos puntos de partida y analizar iteración a iteración el comportamiento de los resultados. También se pueden tener en cuenta ciertos criterios que utiliza el método para obtener la siguiente aproximación, por ejemplo, la pendiente de la recta secante no debe ser nula pues nunca intesectará con el eje x ni tendiendo a infinito (siempre y cuando la raíz se encuentre alejada a los puntos iniciales) ya que la convergencia puede llegar a ser lenta. De todas maneras, dependerá de la forma que tiene la función.

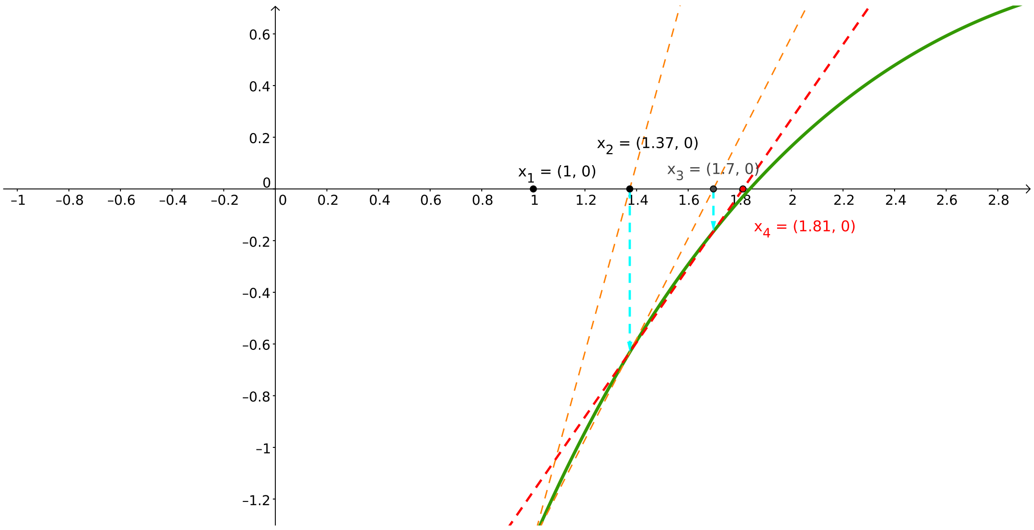
A partir del gráfico de la función cuyos ceros queremos encontrar, se tomarán como valores iniciales 0y 1. Nótese que ambos puntos se encuentran hacia la izquierda de la raíz, no necesariamente deben encerrarla. Se realizará detalladamente, en primer lugar, el cálculo de la primer aproximación para comprender la mecánica del método.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5e^{-x} \\
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= x_1 - F(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{F(x_1) - F(x_0)} \\
&= 1 - (-1{,}8393) \cdot \frac{1 - 0}{-1{,}8393 - (-5)} \\
&= 1{,}3736
\end{aligned}
$$

Siguiendo por cuatro iteraciones más, se verá que la aproximación comienza a estancarse en un valor:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1{,}6978 \\
x_4 &= 1{,}8122 \\
x_5 &= 1{,}8369 \\
x_6 &= 1{,}8386 \\
F(x_6) &\approx 10^{-5} \approx 0
\end{aligned}
$$

Donde x_6 es la aproximación que tomaremos como resultado. Sabemos que nunca vamos a poder obtener el resultado exacto de la ecuación pues se ve que es un número irracional. A continuación se resolverá nuevamente el método pero, esta vez, de forma gráfica para intentar comprender cómo aproxima. Las rectas punteadas corresponden a las que se generan por los primeros puntos, mientras que la rellena corresponde a la última iteración, es decir, la que genera a x_4. Por cuestiones de espacio, en el gráfico se pierde el valor de x_o.



Finalmente, se puede comprobar que las funciones son iguales para un punto aproximadamente igual a x_6. Especializando en $f(x)$ y en $g(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x_6) &= 0{,}7951 \\
g(x_6) &= 0{,}7951
\end{aligned}
$$