

Método de Simpson 1/3

Este método consiste en la aproximación del cálculo del área plana bajo una curva utilizando trapecios curvilíneos a partir una interpolación con una función cuadrática:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (1)$$

Esta aproximación es denominada “simple” debido a que utiliza tan sólo un polinomio. Requiere el conocimiento de tres puntos equiespaciados: los extremos y un punto central. Aplicando esta expresión utilizando mayor cantidad de puntos intermedios (es decir, realizando más de un Simpson 1/3 dentro del intervalo) puede definirse la variante “compuesta” del método para el cual se utilizan N puntos que corresponden a $n = N - 1$ subintervalos. Este caso requiere que la cantidad de subintervalos sean pares (el caso simple utiliza dos, por lo tanto éste debe ser un múltiplo). Por lo tanto, se define un valor h que corresponde a el ancho del subintervalo o el paso que hay entre puntos. Se calcula como $h = \frac{b-a}{n}$. Finalmente, la aproximación del área se puede calcular como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k}) \right] \quad (2)$$

A modo de interpretación, las sumatorias corresponden a los valores de la función en los puntos impares y pares respectivamente sin contar los extremos. Esto es debido a que, en los puntos impares, se encuentra el factor de 4 que introduce la fórmula de Simpson 1/3 simple para los puntos intermedios y, en los puntos pares, el factor de 2 se debe a que ese punto es compartido por los trapecios curvilíneos adyacentes.

Ejemplo

Calcular el área de $f(x) = e^{-x^2}$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

Para calcular el área debe calcularse su integral y, por lo tanto, la primitiva de la función. En este caso, no es posible hallarla en términos de funciones elementales; por lo tanto, se realizará una aproximación. En primer lugar, se realizará la aproximación simple utilizando la fórmula (1):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1 - (-1)}{6} \left[f(-1) + 4f\left(\frac{1-1}{2}\right) + f(1) \right] \\ &\approx \frac{1}{3} [0,3678 + 4 \cdot 1 + 0,3678] \approx 1,5786 \end{aligned}$$

Se espera que a medida que aumente la cantidad de puntos, la separación entre ellos disminuye y debe acercarse al valor de la integral definida. Por lo tanto, se plantea para el caso compuesto utilizando la fórmula (2) con cuatro puntos:

$$n = 4 \Rightarrow h = \frac{1 - (-1)}{4} = 0,5$$

Luego se realiza una tabla para identificar qué valores es necesario calcular y en qué parte de la ecuación se utiliza. En este caso, se construye utilizando los valores de x espaciados por h . Si el valor de h es calculado correctamente, la tabla debería partir del valor inicial y llegar al valor final. Posteriormente, se calculan los valores correspondientes de y y se observan los puntos pares e impares. En este caso, los rojos son los impares y los azules pares. Éstos son ubicados correspondientemente en la fórmula (2).

i	x	$f(x)$
0	-1	0.3678
1	-0.5	0.7788
2	0	1
3	0.5	0.7788
4	1	0.3678

Cuadro 1: Tabla de valores de $f(x)$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{0,5}{3} [f(-1) + f(1) + 4(f(-0,5) + f(0,5)) + 2f(0)] \\ &\approx \frac{0,5}{3} [0,3678 + 0,3678 + 4(0,7788 + 0,7788) + 2 \cdot 1] \approx 1,4943\end{aligned}$$

A modo de verificación, se calculará por software, el valor del área para $n = 100$, un valor mucho más elevado al que se utilizó anteriormente. Si lo calculado previamente es correcto, se esperaría que sea próximo al valor presentado a continuación para ser una buena aproximación.

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 1,4936$$