Método de Simpson 1/3 Adaptativo

Unidad 6: Integración

Sea la fórmula de Simpson 1/3 simple para calcular la integral definida de $f(x)$ entre a y b:

$$S(a,b) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

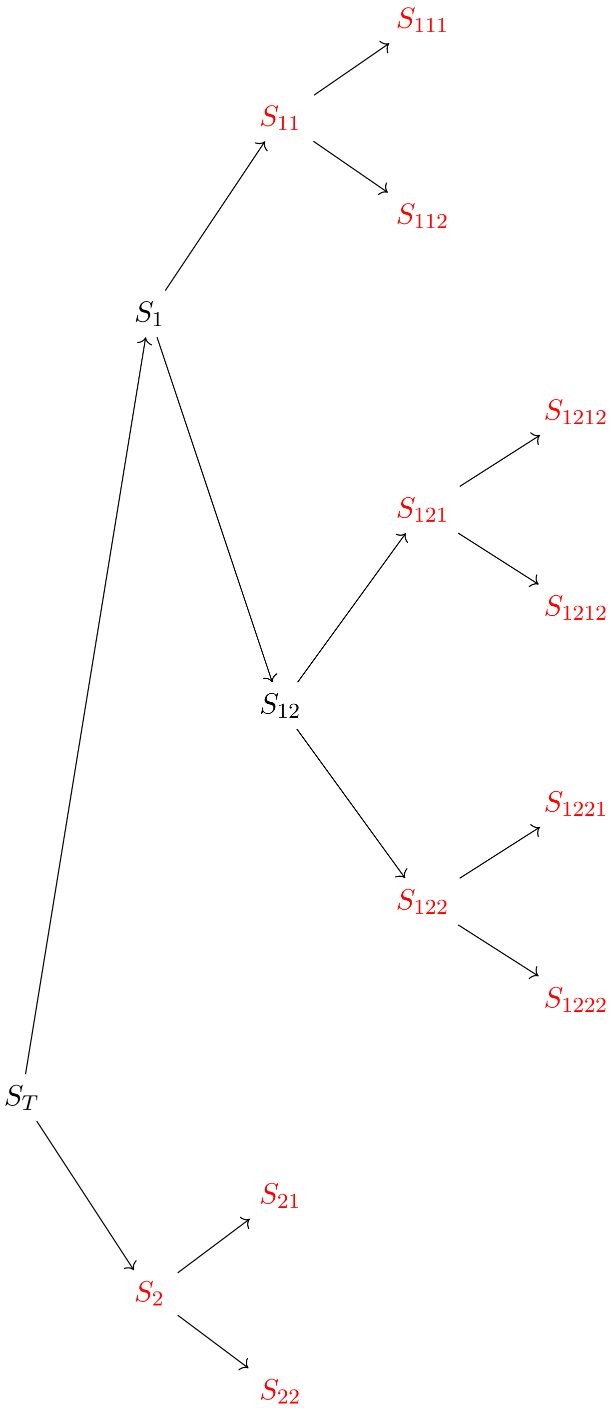
Si se dividiera el intervalo a la mitad en un punto c, se pueden calcular dos Simpson 1/3 simple: uno entre a y c y otro entre c y b, es decir, $S(a,c)$ y $S(c,b)$, cuya suma es una mejor aproximación de la integral definida buscada. Si se quisiera mejorar este resultado por Richardson, se obtendría:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{16(S(a,c) + S(c,b)) - S(a,b)}{15} \\ &\approx S(a,c) + S(c,b) + \frac{S(a,c) + S(c,b) - S(a,b)}{15} \end{aligned}$$

La fracción corresponde a un término de ajuste y a medida que la aproximación se acerque al valor real, ésta tiende a cero. Por lo tanto, puede utilizarse esa expresión como una medida del error. Para cierta tolerancia ϵ se verifica que:

$$\left|\frac{S(a,c) + S(c,b) - S(a,b)}{15}\right| < \epsilon$$

Finalmente, para cada subdivisión, se evalúa esta expresión y si resulta falsa, se continúa subdividiendo y de lo contrario, se detiene y devuelve el valor de la extrapolación de Richardson. Repitiendo este procedimiento recursivamente, comienza a ramificarse hasta que cada condición resulte verdadera y el resultado es la suma de todas las extrapolaciones realizadas. Graficamente puede observarse más sencillamente el procedimiento:



Esto se puede interpretar como la integral total de Simpson 1/3 (S_T) que se subdivide en dos integrales S_1 y S_2, de las cuales se calcula la tolerancia y no cumplen la condición. Luego se vuelve a subdividir cada uno y se repite hasta que se vayan cumpliendo las condiciones. Finalmente, se calcula Richardson al final de cada ramificación respecto a su nivel anterior y se van sumando según corresponda, resaltado en rojo.

1. Ejemplo

Aproximar la siguiente integral con una tolerancia de $\epsilon = 10^{-3}$.

$$\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$$

Primero, se calcula Simpson 1/3 para el intervalo total y luego dividiéndola en un punto intermedio:

$$S(0,4) = 0{,}7155$$
$$S(0,2) = 0{,}82994$$
$$S(2,4) = 0{,}00626$$

Luego se calcula el ajuste obtenido a partir de Richardson como:

$$\frac{|S(0,2) + S(2,4) - S(0,4)|}{15} = 0{,}008 > \epsilon$$

Dado que supera la tolerancia, se divide cada subintervalo:

- Dividiendo el intervalo $[0,2]$:

$$S(0,1) = 0{,}74718$$
$$S(1,2) = 0{,}13463$$

  Calculando el ajuste:

$$\frac{|S(0,1) + S(1,2) - S(0,2)|}{15} = 0{,}003 > \epsilon$$

  Nuevamente debe dividirse a la mitad:

  - Dividiendo el intervalo $[0,1]$:

$$S(0;0,5) = 0{,}46137$$
$$S(0,5;1) = 0{,}28548$$

    Calculando el ajuste:

$$\frac{|S(0;0,5) + S(0,5;1) - S(0,1)|}{15} = 2 \cdot 10^{-5} < \epsilon$$

    Como es menor que la tolerancia, no se divide.

  - Dividiendo el intervalo $[1,2]$:

$$S(1;1,5) = 0{,}10931$$
$$S(1,5;2) = 0{,}02589$$

    Calculando el ajuste:

$$\frac{|S(1;1,5) + S(1,5;2) - S(1,2)|}{15} = 3 \cdot 10^{-5} < \epsilon$$

    Como es menor que la tolerancia, no se divide.

- Dividiendo el intervalo $[2,4]$:

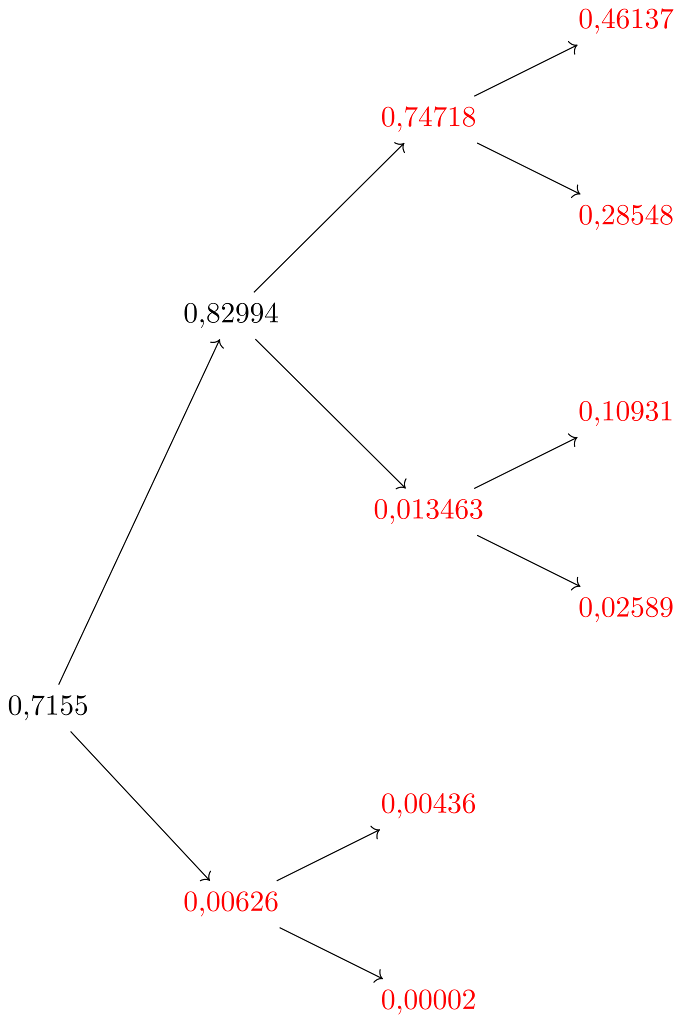
$$S(2,3) = 0{,}00436$$
$$S(3,4) = 0{,}00002$$

  Calculando el ajuste:

$$\frac{|S(2,3) + S(3,4) - S(2,4)|}{15} = 1 \cdot 10^{-4} < \epsilon$$

  Como es menor que la tolerancia, no se divide.

En resumen, los resultados obtenidos son:



Gráficamente, las divisiones hechas son:

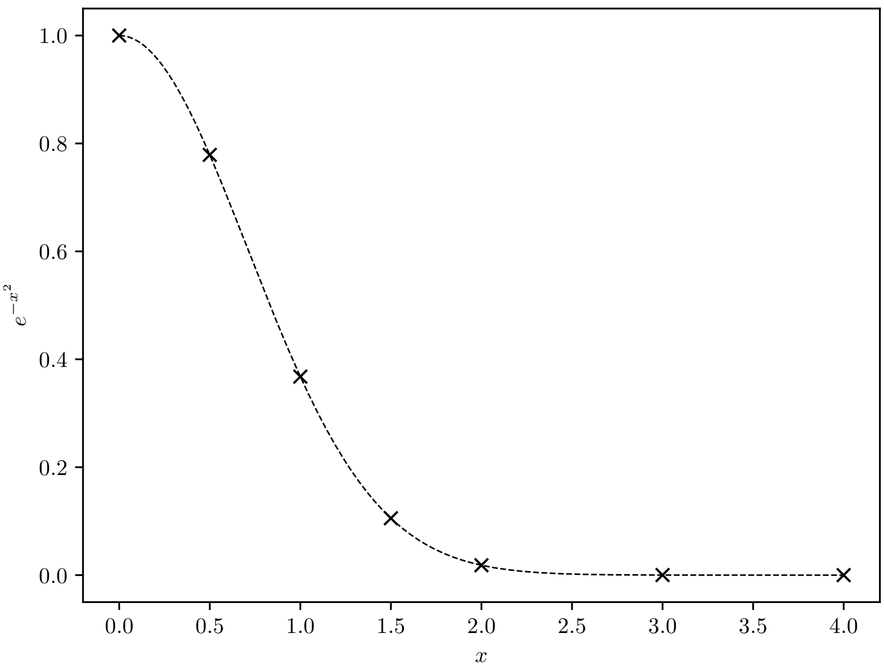


Figura 1: Gráfico de la función con las divisiones realizadas

Finalmente, debe calcularse la integral total como la suma de los elementos en rojo (al final de las ramificaciones) y aplicar Richardson en cada ramificación:

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^{-x^2} = & \frac{16 \cdot (0{,}46137 + 0{,}28548) - 0{,}74718}{15} + \\ & + \frac{16 \cdot (0{,}10931 + 0{,}02589) - 0{,}13463}{15} + \\ & + \frac{16 \cdot (0{,}00436 + 0{,}00002) - 0{,}00626}{15} = 0{,}88632\end{aligned}$$

Una mejor aproximación del resultado es 0,886227 por lo que se puede observar que se cumple que tiene un error menor a 10^{-3}.

$$E_{\text{abs}} = 9{,}3 \cdot 10^{-5}$$